ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 124, № 2
август, 2000

В. М. Журавлев*

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФУЗИИ $u_t = \Delta \ln u + \lambda u$ В ДВУМЕРНОМ КООРДИНАТНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Исследуются точные решения уравнения нелинейной диффузии, возникающего в ряде задач теории автоволновых процессов в гидродинамике и процессах переноса тепла. Найдены новые классы решений этого уравнения в двумерном координатном пространстве, а также специальный принцип суперпозиции, позволяющий строить сложные многомодовые решения из простейших двух- и трехмодовых решений.

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследуемое в настоящей работе уравнение

$$u_t = D\Delta \ln u + \lambda u \tag{1}$$

является элементом ряда моделей процессов в средах с нелинейной диффузией. Одной из характерных ситуаций, в которых встречается уравнение (1), является перенос пассивной примеси, например тепла, в турбулентной среде с нелинейным турбулентным коэффициентом теплопроводности (турбулентной диффузии) вида

$$K(T) = \frac{D}{T_0 + T}, \tag{2}$$

где $u = T_0 + T$, а T_0 – некоторая постоянная. Уравнение для функции T (температуры, концентрации) выглядит следующим образом:

$$T_t = \nabla\big(K(T)\nabla T\big) + \lambda(T + T_0) \equiv \nabla\left(\frac{D}{T_0 + T}\nabla T\right) + \lambda(T + T_0).$$

Другие примеры систем рассмотрены в работах [1–4]. Например, интерес представляет использование уравнения (1) в качестве модели, описывающей эволюцию глубины сезонного термоклина [2] или растекания вязкой жидкости [3]. В связи с тем, что это

*Ульяновский государственный университет, Институт теоретической физики, Ульяновск, Россия. E-mail: zhuravl@sv.uven.ru

уравнение важно с точки зрения прикладных задач гидромеханики и теории переноса, в ряде работ предпринимались исследования по отысканию классов точных решений этого уравнения в двумерном и трехмерном координатных пространствах [1, 4]. В работе [5] был предложен, а в [6] более детально развит метод построения точных решений нелинейных уравнений типа диффузионных цепочек Тоды в двумерном координатном пространстве. Среди этого класса уравнений есть и уравнение (1).

В настоящей работе на основе метода, изложенного в [6], строятся и исследуются точные решения (1), принадлежащие классу квадратичных форм. Как показано в данной работе, уравнение (1) представляет интерес не только с прикладной точки зрения, но и с точки зрения общей теории нелинейных уравнений диффузионного типа, поскольку оно допускает специальный принцип суперпозиции, позволяющий строить из простых решений более сложные. Наличие такого закона суперпозиции выделяет данное уравнение среди других типов диффузионных уравнений. В работе описывается указанный принцип суперпозиции и на его основе строятся новые точные решения уравнения (1).

2. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СТРУКТУРА ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ

Точные решения уравнения согласно схеме, предложенной в работах [5, 6], имеют представление в виде

$$u(x,y,t) = \frac{1}{\Psi(z,\bar z,t)}, \tag{3}$$

где $\Psi(z,\bar z,t)$ – квадратичная форма:

$$\Psi(z,\bar z,t) = \sum_{i,j=1}^{N} h_{ij}(t)\psi_i(z)\psi_j^*(\bar z), \tag{4}$$

где N – размерность квадратичной формы относительно линейно независимых дифференцируемых функций $\psi_i(z)$ комплексного аргумента $z = x + iy$, а $h_{ij}(t)$ – элементы квадратной эрмитовой матрицы $\mathbf{H}$ размерности N, зависящей от t. В простейших случаях $N = 2$ и $N = 3$, которые подробно изучаются в данной работе, имеем

$$\Psi(z,\bar z,t) = a(t)|\psi_1|^2 + b(t)|\psi_2|^2 + c(t)\psi_1\psi_2^* + c^*(t)\psi_1^*\psi_2 \tag{5}$$

$(h_{11} = a(t),\ h_{12} = h_{21}^* = c(t),\ h_{22} = b(t))$ для $N = 2$ и

$$\Psi(z,\bar z,t) = a(t)|\psi_1|^2 + b(t)|\psi_2|^2 + c(t)|\psi_3|^2 \tag{6}$$

$(h_{11} = a(t),\ h_{22} = b(t),\ h_{33} = c(t),\ h_{ij} = 0,\ i \neq j)$ для $N = 3$. Оба эти представления для $N = 2$ и $N = 3$ имеют сходную структуру. Единственное отличие состоит в том, что в первом случае структура определяется двумя отдельными пространственными структурами, эволюционирующими в пространстве со временем, а во втором – тремя. Эти отдельные структуры будем называть модами, а число N – модовой размерностью решения. То, что для (3) и (4) число мод равно N, является следствием очевидного факта:

в каждый момент времени квадратичную форму (4) можно диагонализировать так, что она будет иметь следующую структуру:

$$\Psi(z,\bar{z},t)=\sum_{i=1}^{N}A_i(t)|\phi_i(z,t)|^2, \tag{7}$$

при этом

$$\phi_i(z,t)=\sum_{i=1}^{N}u_{ij}(t)\psi_j(z),$$

где $\mathbf{U}=(u_{ij})$ – унитарная матрица:

$$\sum_{i=1}^{N}u_{ki}^{*}u_{ji}=\delta_{kj}.$$

Это выражение можно интерпретировать как совокупность N отдельных структур, которые описываются функциями $\phi_i(z,t)$, при этом функции $A_i(t)$, являющиеся собственными числами эрмитовой матрицы h_{ij}, можно рассматривать как амплитуды этих структур. Именно эти структуры и будут называться модами. Такое представление для (4) позволяет также говорить о том, что динамика мод сводится к динамике амплитуд и внутреннего вращения мод, которое описывается унитарной матрицей $\mathbf{U}$. С этой точки зрения представление (5) ($N=2$) соответствует наличию динамики не только амплитуд, но и вращению мод, а для $N=3$ представление (6) – отсутствию вращения.

Для функции $\Psi(z,\bar{z},t)$ в общем случае имеется следующее тождество (см. [6, 7]):

$$\Delta\ln\Psi=\frac{\sum_{i,j=1}^{N}\sum_{k,l=1}^{N}(h_{ij}h_{kl}-h_{il}h_{kj})W_{ik}W_{jl}^{*}}{\Psi^2}, \tag{8}$$

где

$$W_{ij}(z)=[\psi_i,\psi_j]=\psi_i\frac{d}{dz}\psi_j-\psi_j\frac{d}{dz}\psi_i,\quad i\neq j,\quad i,j=1,\ldots,N.$$

Соответственно для $N=2$

$$\Delta\ln\Psi=\frac{4(ab-|c|^2)|W_{12}|^2}{\Psi^2} \tag{9}$$

и для $N=3$

$$\Delta\ln\Psi=4\frac{ab|W_{12}|^2+bc|W_{23}|^2+ac|W_{13}|^2}{\Psi^2}. \tag{10}$$

Заметим, что множитель 4 в правой части этих выражений возникает вследствие того, что

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}=4\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}}.$$

Рассмотрим сначала случай $N=2$. Потребуем выполнения соотношений

$$W_{12}=\psi_1\frac{d}{dz}\psi_2-\psi_2\frac{d}{dz}\psi_1=(A\psi_1+B\psi_2), \tag{11}$$

где A, B – комплексные постоянные. Это соотношение определяет допустимую связь ψ_1 и ψ_2 и представляет собой дифференциальное уравнение относительно одной из функций. Решение этого уравнения относительно ψ_2 при заданной ψ_1 имеет вид

$$\psi_2(z) = \psi_1(z)\left(C\exp\{B\theta(z)\} - \frac{A}{B}\right) = \psi_1(z)C\eta(z), \tag{12}$$

где $\theta(z) = \int dz\, \psi_1^{-1}(z)$,

$$\eta(z) = \exp\{B\theta(z)\} - \frac{A}{CB}, \tag{13}$$

а C – постоянная интегрирования. В случае модовой размерности $N = 2$ решение (12) полностью фиксирует пространственную структуру решений исходного уравнения, которая определяется одной произвольной аналитической функцией $\psi_1(z)$ комплексного аргумента.

В случае модовой размерности $N = 3$ следует потребовать выполнения соотношений

$$W_{12} = k_3\psi_3, \qquad W_{23} = k_1\psi_1, \qquad W_{31} = k_2\psi_2, \tag{14}$$

где k_1, k_2, k_3 – комплексные постоянные. В этом случае подстановка (14) в (10) приводит к следующему тождеству:

$$\Delta \ln \Psi = 4\frac{ab|k_3|^2|\psi_3|^2 + bc|k_1|^2|\psi_1|^2 + ac|k_2|^2|\psi_2|^2}{\Psi^2}. \tag{15}$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (14) относительно функций ψ_1, ψ_2, ψ_3 имеет общее решение вида

$$\psi_1(z) = q_1\psi_3(z)\cos\theta(z), \quad \psi_2(z) = q_2\psi_3(z)\sin\theta(z), \quad \frac{d}{dz}\theta(z) = \frac{q_3}{\psi_3(z)}, \tag{16}$$

где

$$q_1 = i\sqrt{\frac{k_3}{k_1}}, \quad q_2 = i\sqrt{\frac{k_3}{k_2}}, \quad q_3 = \sqrt{k_1k_2},$$

а функция $\psi_3(z)$ произвольна.

3. ДИНАМИКА МОД ДЛЯ $N = 2$

Для случая $N = 2$ уравнения для функций $a(t)$, $b(t)$ и $c(t)$ в силу (9) и (11) могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \dot a + 4D(ab - |c|^2)|A^2| &= \lambda a, \\ \dot b + 4D(ab - |c|^2)|B^2| &= \lambda b, \\ \dot c + 4D(ab - |c|^2)AB^* &= \lambda c. \end{aligned} \tag{17}$$

Эта система нелинейных уравнений разрешается точно. Введем следующее обозначение:

$$P(t) = \int^t e^{-\lambda t'}(a(t')b(t') - |c(t')|^2)\, dt'.$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
a(t) &= e^{\lambda t}\bigl(-4D|A|^2P(t)+\alpha\bigr),\\
b(t) &= e^{\lambda t}\left(-4D|B|^2P(t)+\frac{\beta}{|C|^2}\right),\\
c(t) &= e^{\lambda t}\left(-4DAB^*P(t)+\frac{\gamma}{C^*}\right),
\end{aligned}
\tag{18}
$$

где α, β – действительные, а γ – комплексная постоянные. Для функции P получаем уравнение

$$
\frac{dP}{dt}e^{-\lambda t} = \mu P + \frac{\alpha\beta-|\gamma|^2}{|C|^2},
$$

в котором

$$
\mu = -4D\left(\beta\frac{|A|^2}{|C|^2}+\alpha|B|^2-\frac{\gamma^*}{C}AB^*-\frac{\gamma}{C^*}BA^*\right) = \mathrm{const}\,.
$$

Решением этого уравнения является функция

$$
P(t) = P_0e^{\mu u(t)} + P_1, \tag{19}
$$

где

$$
u(t) = u_0 + \frac{e^{\lambda t}}{\lambda},
$$

u_0, P_0 – произвольные постоянные, а $P_1 = (\alpha\beta-|\gamma|^2)/|C|^2\mu$. Заметим, что в случае $\lambda = 0$

$$
P(t) = P_0e^{\mu t} + P_1.
$$

Совместно (18) и (19) дают полное решение задачи о динамике мод. В представлении (7) амплитуды мод описываются выражениями

$$
A_1(t) = -\frac{a+b}{2}+\sqrt{\frac{(a-b)^2}{4}+|c|^2},\qquad A_2(t) = -\frac{a+b}{2}-\sqrt{\frac{(a-b)^2}{4}+|c|^2},
$$

а сами функции ϕ_1 и ϕ_2 могут быть представлены в виде

$$
\phi_1(z,t) = \psi_1(z)+\frac{A_1(t)-a(t)}{c(t)}\psi_2(z),\qquad \phi_2(z,t) = \psi_1(z)+\frac{A_2(t)-a(t)}{c(t)}\psi_2(z).
$$

Заметим также, что путем объединения (12) и (18) выражение для Ψ может быть представлено в виде

$$
\Psi(z,\bar z,t) = f(t)|C|^2|g(z)|^2 + e^{\lambda t}\Phi(z,\bar z), \tag{20}
$$

где

$$
\begin{gathered}
g(z) = \psi_1(z)\exp\bigl\{B\theta(z)\bigr\},\qquad f(t) = -4D|B|^2e^{\lambda t}P(t),\\
\Phi(z,\bar z) = |\psi_1|^2\bigl(\alpha+\beta|\eta|^2+\gamma\eta^*+\gamma^*\eta\bigr),
\end{gathered}
\tag{21}
$$

а функция $\eta(z)$ описывается соотношением (13). При этом

$$
\mu = -4D|B|^2(\beta|\xi|^2+\alpha-\gamma^*\xi^*-\gamma\xi),
$$

где $\xi = A/(CB)$.

4. ДИНАМИКА МОД БЕЗ ВРАЩЕНИЯ ДЛЯ $N = 3$

В случае $N = 3$ для (6) (в отсутствие вращения мод) имеем следующие уравнения для функций $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$:

$$\dot{a} + 4Dbc|k_1|^2 = \lambda a, \qquad \dot{b} + 4Dac|k_2|^2 = \lambda b, \qquad \dot{c} + 4Dab|k_3|^2 = \lambda c. \tag{22}$$

Эта система подобна уравнениям, встречающимся в задачах трехволнового взаимодействия, и интегрируется в квадратурах. Ее общее решение строится из следующих соотношений, получающихся прямо из (22):

$$\begin{aligned} a^2 &= e^{2\lambda t}\left(\alpha_0 - 8D|k_1|^2 \int e^{-2\lambda t'} Q\, dt'\right),\\ b^2 &= e^{2\lambda t}\left(\beta_0 - 8D|k_2|^2 \int e^{-2\lambda t'} Q\, dt'\right),\\ c^2 &= e^{2\lambda t}\left(\gamma_0 - 8D|k_3|^2 \int e^{-2\lambda t'} Q\, dt'\right), \end{aligned}$$

где $Q(t) = a(t)b(t)c(t)$, а $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ – постоянные. Перемножая эти уравнения, находим, что $Q(t)$ удовлетворяет уравнению

$$Q^2 = \big(\alpha_0 - 8D|k_1|^2 P(t)\big)\big(\beta_0 - 8D|k_2|^2 P(t)\big)\big(\gamma_0 - 8D|k_3|^2 P(t)\big)e^{6\lambda t},$$

где $P(t) = \int e^{-2\lambda t'} Q\, dt'$. Для последней функции получаем следующее уравнение:

$$\left(\frac{d}{dt}P\right)^2 = (\alpha_0 - 8D|k_1|^2 P)(\beta_0 - 8D|k_2|^2 P)(\gamma_0 - 8D|k_3|^2 P)e^{2\lambda t}. \tag{23}$$

Общее решение (23) представимо в виде функции Вейерштрасса $\wp(u)$ [8, 9, гл. 18, с. 443]:

$$P(u) = p_0 + \wp(u; g_2, g_3), \qquad u(t) = \frac{e^{\lambda t}}{d_0 \lambda} + u_0,$$

где

$$\begin{aligned} &g_2 = -4(e_1e_2 + e_3e_2 + e_1e_3), \quad g_3 = 4e_1e_2e_3, \quad e_1 + e_2 + e_3 = 0,\\ &d_0 = \frac{1}{8}|k_1||k_2||k_3|p_0^{3/2}, \qquad p_0 = -\frac{1}{3}\left(\frac{\alpha_0}{|k_1|^2} + \frac{\beta_0}{|k_2|^2} + \frac{\gamma_0}{|k_3|^2}\right),\\ &e_1 = -\frac{\alpha_0 + |k_1|^2 p_0}{|k_1|^2 p_0}, \qquad e_2 = -\frac{\beta_0 + |k_2|^2 p_0}{|k_2|^2 p_0}, \qquad e_3 = -\frac{\gamma_0 + |k_3|^2 p_0}{|k_3|^2 p_0}. \end{aligned}$$

Отсюда решение для a, b, c можно представить в виде

$$\begin{aligned} a(t) &= \pm\sqrt{8D}|k_1|e^{\lambda t}\sqrt{e_1 p_0 - \wp(u(t); g_2, g_3)}\,,\\ b(t) &= \pm\sqrt{8D}|k_2|e^{\lambda t}\sqrt{e_2 p_0 - \wp(u(t); g_2, g_3)}\,,\\ c(t) &= \pm\sqrt{8D}|k_3|e^{\lambda t}\sqrt{e_3 p_0 - \wp(u(t); g_2, g_3)}\,. \end{aligned} \tag{24}$$

Два частных решения этих уравнений можно записать в элементарных функциях. Одно – в тригонометрических функциях:

$$a(t) = \frac{a_0 e^{\lambda t}}{\cos\chi}, \qquad b(t) = \frac{b_0 e^{\lambda t}}{\cos\chi}, \qquad c(t) = c_0 e^{\lambda t}\,\mathrm{tg}\,\chi, \tag{25}$$

где

$$\chi(t) = \theta_0 \pm 4Dc_0|k_1||k_2|\frac{e^{\lambda t}}{\lambda}, \qquad a_0 = \pm c_0\frac{|k_1|}{|k_3|}, \qquad b_0 = \pm c_0\frac{|k_2|}{|k_3|}, \tag{26}$$

c_0 – произвольная действительная постоянная. Второе – в гиперболических функциях:

$$a(t) = \frac{a_0 e^{\lambda t}}{\mathrm{sh}\,\chi}, \qquad b(t) = \frac{b_0 e^{\lambda t}}{\mathrm{sh}\,\chi}, \qquad c(t) = c_0 e^{\lambda t}\,\mathrm{cth}\,\chi, \tag{27}$$

где все постоянные и функция $\chi(t)$ удовлетворяют тем же соотношениям (26). Заметим, что оба эти решения подбором постоянных могут быть сделаны несингулярными на любом интервале времени $t > t_0$, поскольку функция $\chi(t)$, играющая роль фазы колебаний в среде, подбором соответствующих постоянных превращается в ограниченную функцию на этом интервале времени.

Более общий класс частных решений обоих типов соответствует следующим значениям параметров e_1, e_2, e_3 [8]:

$$e_1 = e_2 \neq e_3: \quad \wp(u) = \mu_-^2\left(-\frac{2}{3} + \mathrm{cth}^2(\mu_- u)\right),$$
$$e_1 \neq e_2 = e_3: \quad \wp(u) = \mu_+^2\left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{\sin^2(\mu_+ u)}\right),$$

где

$$\mu_\pm^2 = \pm\frac{9g_3}{2g_2}.$$

5. ДИНАМИКА МОД С ВРАЩЕНИЕМ ДЛЯ $N = 3$

Исследование общей динамики мод в случае $N = 3$ при выполнении соотношений (14) и (16) сводится к исследованию системы уравнений для эрмитовой матрицы $\mathbf{H}$ с компонентами $h_{ij}(t)$ (4)

$$\dot{\mathbf{H}} = -4DQ(t)\mathbf{K}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{K}^* + \lambda\mathbf{H}, \tag{28}$$

здесь $\mathbf{K} = \mathrm{diag}\{k_1, k_2, k_3\}$, $Q(t) = \det\mathbf{H}$. Форма уравнения связана с тем, что при выполнении условий (14) тождество (8) приобретает вид

$$\Delta\ln\Psi = \frac{\sum_{i,j=1}^N \sum_{k,l=1}^N \sum_{m,n=1}^N (h_{ij}h_{kl} - h_{il}h_{kj})\varepsilon_{ijm}\varepsilon_{kln}k_m\psi_m k_n^*\psi_n^*}{\Psi^2} =$$
$$= \det\mathbf{H}\frac{\sum_{i,j=1}^N \tilde{h}_{ij}k_i k_j^*\psi_i\psi_j^*}{\Psi^2}, \tag{29}$$

где $\tilde{h}_{ij}(t)$ – элементы матрицы $\mathbf{H}^{-1}$, обратной к матрице $\mathbf{H}$.

Введем матрицу $\mathbf{R} = e^{-2\lambda t}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{H}$. Тогда матричное уравнение для $\mathbf{R}$ выглядит следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{R}^2 = -8De^{-2\lambda t}Q(t)\mathbf{K}^{-1}\mathbf{K}^*.$$

Решение этого уравнения можно записать в матричной форме

$$\mathbf{R}^2 = -8D\mathbf{K}^{-1}\mathbf{K}^*P(t) + \mathbf{R}_0, \tag{30}$$

где $\mathbf{R}_0$ – произвольная постоянная матрица (ее структура должна быть лишь согласована с требованием, что $\mathbf{H}$ является эрмитовой матрицей),

$$P(t) = \int e^{-2\lambda t'}Q\,dt'.$$

Отсюда решение для $\mathbf{H}$ может быть компактно записано в матрично-функциональной форме

$$\mathbf{H} = e^{2\lambda t}\mathbf{K}\big(-8D\mathbf{K}^{-1}\mathbf{K}^*P(t) + \mathbf{R}_0\big)^{1/2} = \big(\mathbf{C}P(t) + \mathbf{K}\mathbf{R}_0\big)^{1/2}, \tag{31}$$

где

$$\mathbf{C} = -8D\mathbf{K}\mathbf{K}^* = -8D\,\mathrm{diag}\{|k_1|^2, |k_2|^2, |k_3|^2\}.$$

Отсюда следует, что $\mathbf{M}_0 = \mathbf{K}\mathbf{R}_0$ должна быть эрмитовой матрицей. Полученное решение может быть представлено в более удобной форме

$$\mathbf{H} = l_0(t)\mathbf{I} + l_1(t)(\mathbf{C}P(t) + \mathbf{M}_0) + l_2(t)(\mathbf{C}P(t) + \mathbf{M}_0)^2, \tag{32}$$

где $\mathbf{I}$ – единичная матрица, а $l_m(t)$, $m = 0, 1, 2,$ – решения системы трех линейных алгебраических уравнений

$$\Lambda_\alpha(t)^{1/2} = \sum_{m=0}^{2} l_m(t)[\Lambda_\alpha(t)]^m, \quad \alpha = 1, 2, 3, \tag{33}$$

а $\Lambda_\alpha(t)$ – собственные числа матрицы $\mathbf{C}P(t) + \mathbf{M}_0$.

Функциональная зависимость решения (31) от t определяется одной функцией $P(t)$, уравнение для которой следует из (30):

$$\left(\frac{dP}{dt}\right)^2 = \frac{e^{2\lambda t}}{k_1^2k_2^2k_3^2}\det\{\mathbf{C}P(t) + \mathbf{M}_0\}. \tag{34}$$

Так как $\det\{\mathbf{C}P(t) + \mathbf{M}_0\}$ – полином третьей степени с действительными постоянными коэффициентами, то решением последнего уравнения является функция Вейерштрасса $P(t) = \wp(u; g_2, g_3)$ при некоторых значениях ее инвариантов g_2 и g_3, выражающихся через элементы постоянных матриц $\mathbf{K}$ и $\mathbf{R}_0$. В совокупности соотношения (34), (33) и (32) полностью описывают решения, соответствующие $N = 3$ с вращением мод.

Все частные решения, приведенные для случая $N = 3$, демонстрируют общее свойство, состоящее в том, что динамика мод (с вращением и без вращения) в случае $\lambda = 0$

оказывается сингулярной, т.е. за конечное время решение всюду обращается в бесконечность. Последнее есть следствие свойств функции Вейерштрасса (см. [8, 9]). Время обращения в бесконечность определяется периодами функции Вейерштрасса, через которую выражаются амплитуды мод. В случае же $\lambda \neq 0$ существуют такие значения λ и значения инвариантов функции Вейерштрасса g_2 и g_3, при которых решение не достигает сингулярного состояния на полуоси $t > 0$, поскольку в этом случае аргумент функции Вейерштрасса меняется в конечных пределах.

6. ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ

Построенные решения представляют собой классы частных решений исходного уравнения (1), зависящие от одного функционального параметра в виде функции комплексного аргумента ($\eta(z)$). Каждый вид функционального параметра выделяет специальный класс начальных условий. Выше рассмотрены решения, соответствующие двум случаям $N = 2$ и $N = 3$, что в терминологии работы [6] и данной работы определяет число мод, эволюционирующих в системе одновременно. Вообще говоря, можно рассматривать задачу о существовании решений с числом мод $N > 3$. Прямое решение этой задачи оказывается весьма сложным. Однако имеется другой способ построить решения с $N > 3$. Этот способ связан с существованием специального принципа суперпозиции, выполняющегося для построенных решений классов $N = 2$ и $N = 3$. Именно, пусть согласно (3) $u_1 = \Psi_1^{-1}$ и $u_2 = \Psi_2^{-1}$ – два решения уравнения (1) одного из рассмотренных классов. Тогда, складывая два уравнения, соответствующие этим решениям, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\Psi_1+\Psi_2}{\Psi_1\Psi_2}\right) = -D\Delta\ln\bigl(\Psi_1\Psi_2\bigr) + \lambda\frac{\Psi_1+\Psi_2}{\Psi_1\Psi_2}. \tag{35}$$

Потребуем, чтобы коэффициенты квадратичных форм Ψ_1 и Ψ_2 были такими, чтобы выполнялось соотношение

$$\Psi_1(z,\bar z,t) + \Psi_2(z,\bar z,t) = G(z,t)[G(\bar z,t)]^*, \tag{36}$$

где $G(z,t)$ – некоторая комплексная функция аргументов z и t. В этом случае, вводя новую функцию

$$U(z,\bar z,t) = \frac{\Psi_1+\Psi_2}{\Psi_1\Psi_2} = \frac{G(z,t)[G(\bar z,t)]^*}{\Psi_1\Psi_2}, \tag{37}$$

находим, что она удовлетворяет исходному уравнению (1):

$$U_t = D\Delta\ln U + \lambda U.$$

Таким образом, функция $U = u_1 + u_2 = G(z,t)[G(\bar z,t)]^* u_1 u_2$ при условии (36) – новое решение исходного уравнения. С точки зрения модовой классификации функция $\Psi_0 = U^{-1}$ – квадратичная форма размерности $N \geqslant 3$.

Этот принцип суперпозиции можно обобщить, полагая

$$U = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{1}{\Psi_1} + \frac{1}{\Psi_2} + \dots + \frac{1}{\Psi_n} \tag{38}$$

и требуя, чтобы выполнялось соотношение

$$\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \Psi_j(z,\bar{z},t) = G(z,t)[G(\bar{z},t)]^* \tag{39}$$

при некоторой функции $G(z,t)$. При этом функция U – вновь решение исходного уравнения (1).

Рассмотрим несколько экземпляров решений $\Psi_i,\ i=1,\ldots,n$, с $N=2$. Эти решения можно представить согласно (20) в следующем виде:

$$\Psi_i(z,\bar{z},t) = f(t)|C_i|^2|g(z)|^2 + e^{\lambda t}\Phi_i(z,\bar{z}), \quad i=1,\ldots,n, \tag{40}$$

где $f(t)$, $g(z)$ те же, что и в (20),

$$\Phi_i(z,\bar{z}) = |\psi_1|^2\big(\alpha_i + \beta_i|\eta|^2 + \gamma_i\eta^* + \gamma_i^*\eta\big), \quad i=1,\ldots,n.$$

Таким образом, функции Ψ_i отличаются друг от друга значением постоянных параметров C_i, α_i, β_i, γ_i при фиксированных значениях ξ, B и P_1. Заметим, что фиксация $P_1 = (\alpha_i\beta_i - |\gamma_i|^2)/|C_i|^2\mu$ (19) накладывает ограничение на выбор постоянных α_i, β_i, γ_i. При этом решения (18) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} a_i(t) &= |\xi|^2|C_i|^2 f(t) + \alpha_i e^{\lambda t}, \quad i=1,\ldots,n,\\ b_i(t) &= f(t) + \frac{\beta_i}{|C_i|^2}e^{\lambda t}, \quad i=1,\ldots,n,\\ c_i(t) &= \xi C_i f(t) + \frac{\gamma_i}{C_i^*}e^{\lambda t}, \quad i=1,\ldots,n. \end{aligned} \tag{41}$$

Используя эти общие обозначения, покажем, что соотношения (36) и (39) для $n=2,3$ действительно приводят к новым нетривиальным решениям (37) и (38).

6.1. Новые решения с $N=3$. Начнем с построения суперпозиционного решения из двух решений с $N=2$, что соответствует $n=2$. В этом случае условие (36) сводится к требованию

$$\Phi_1 + \Phi_2 = F(t)|g(z)|^2 = F(t)|\psi_1|^2|\xi+\eta(z)|^2 = F(t)|\psi_1|^2\exp\{B\theta(z) + B^*[\theta(z)]^*\},$$

где $F(t) = 2f(t)(|C_1|^2 + |C_2|^2) + e^{\lambda t}(\beta_1+\beta_2)$. Последнее условие и, следовательно, условие (36) выполняются, если параметры α_i, β_i и γ_i удовлетворяют алгебраическим соотношениям

$$\gamma_1 + \gamma_2 = (\beta_1+\beta_2)\xi, \qquad (\alpha_1+\alpha_2) = (\beta_1+\beta_2)|\xi|^2. \tag{42}$$

В этом случае функция

$$U = \frac{F(t)|g(z)|^2}{f^2(t)|C_1C_2|^2|g(z)|^4 + e^{\lambda t}f(t)(|C_1|^2\Phi_2 + |C_2|^2\Phi_1) + e^{2\lambda t}\Phi_1\Phi_2}$$

является решением уравнения (1) с $N=3$, поскольку функция $\Psi = \Psi_1\Psi_2$ – квадратичная форма относительно трех функций ψ_1^2, ψ_2^2, $\psi_1\psi_2$.

6.2. Комплексифицированные решения. Заметим также, что принцип суперпозиции позволяет расширить динамический класс решений, вводя в рассмотрение решения, соответствующие комплексным квадратичным формам. Рассмотрим две квадратичные формы со взаимно сопряженными комплексными коэффициентами $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$:

$$\Psi_1 = \Psi(z, \bar{z}, t) = a(t)|\psi_1|^2 + b(t)|\psi_2|^2 + c(t)\psi_1\psi_2^* + d(t)\psi_1^*\psi_2,$$
$$\Psi_2 = \Psi^*.$$

Динамические решения для функций $a_i(t), b_i(t), c_i(t), d_i(t)$ имеют тот же вид (17), в котором $c^*(t)$ заменена на $d(t)$ и все параметры комплексные (за исключением λ). Решение этой системы имеет вид

$$a(t) = e^{\lambda t}\bigl(-4D|A|^2P(t) + \alpha\bigr), \qquad b(t) = e^{\lambda t}\left(-4D|B|^2P(t) + \frac{\beta}{|C|^2}\right),$$
$$c(t) = e^{\lambda t}\left(-4DAB^*P(t) + \frac{\gamma}{C^*}\right), \quad d(t) = e^{\lambda t}\left(-4DA^*BP(t) + \frac{\delta}{C}\right),$$

где α, β, γ, δ – комплексные постоянные. Решение же для комплексной функции $P(t)$ будет иметь вид, аналогичный (19):

$$P(t) = P_0e^{\mu u(t)} + P_1, \tag{43}$$

где теперь
$$\mu = -4D|B|^2(\beta|\xi|^2 + \alpha - \gamma^*\xi^* - \delta\xi) = \mathrm{const}$$
и u_0, P_0 – комплексные постоянные. Комплексной теперь является и $P_1 = (\alpha\beta - \gamma\delta)/\mu$. В результате функция $P(t)$ также комплексная. В отличие от (19) решение (43) может быть периодическим. Это возможно, например, в случае $\lambda = 0$ и $\mathrm{Re}\{\mu\} = 0$.

Представим решение для Ψ в форме, аналогичной (5),

$$\Psi(z, \bar{z}, t) = f(t)|C|^2|g(z)|^2 + e^{\lambda t}\Phi(z, \bar{z}), \tag{44}$$

где
$$\Phi(z, \bar{z}) = |\psi_1|^2\bigl(\alpha + \beta|\eta|^2 + \gamma\eta^* + \delta\eta\bigr), \tag{45}$$

а все остальные обозначения совпадают с (21). Рассмотрим условие (36) в следующей форме:

$$\Psi_1 + \Psi_2 = \Psi + \Psi^* = |C|^2|g(z)|^2\bigl(f(t) + f^*(t)\bigr) + e^{\lambda t}\bigl(\Phi + \Phi^*\bigr) = F(t)|g(z)|^2.$$

Отсюда находим, что комплексные постоянные α, β, γ, δ должны быть связаны соотношениями, аналогичными (42),

$$\gamma + \delta^* = (\beta + \beta^*)\xi, \qquad (\alpha + \alpha^*) = (\beta + \beta^*)|\xi|^2,$$

первое из которых комплексное, а второе действительное. В результате получаем

$$F(t) = |C|^2\big(f(t) + f^*(t)\big) + e^{\lambda t}(\beta + \beta^*).$$

Решение исходного уравнения в этом случае имеет вид

$$U = \frac{F(t)|g(z)|^2}{|f(t)|^2|C|^4|g(z)|^4 + e^{\lambda t}|C|^2(f^*(t)\Phi + f(t)\Phi^*) + e^{2\lambda t}\Phi\Phi^*}. \tag{46}$$

В случае $\lambda = 0$ и $\mathrm{Re}\{\mu\} = 0,\ \mathrm{Im}\{\mu\} = \nu$ согласно (21) и (19)

$$f(t) = -4D|B|^2P(t) = -4D|B|^2(P_0e^{i\nu t} + P_1),$$

поэтому функция (46) – периодическое по времени решение и соответствует $N = 3$, как и предыдущее.

6.3. Решения с $N > 3$. Рассмотрим теперь три экземпляра функций (40) ($n = 3$). Условие (39) в этом случае сводится к системе алгебраических уравнений

$$\begin{gathered}
C_1(\alpha_2 + \alpha_3) + C_2(\alpha_1 + \alpha_3) + C_3(\alpha_2 + \alpha_1) = \nu_0|\xi|^2,\\
C_1(\beta_2 + \beta_3) + C_2(\beta_1 + \beta_3) + C_3(\beta_2 + \beta_1) = \nu_0,\\
C_1(\gamma_2 + \gamma_3) + C_2(\gamma_1 + \gamma_3) + C_3(\gamma_2 + \gamma_1) = \nu_0\xi
\end{gathered} \tag{47}$$

и

$$\begin{gathered}
\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_2 + \alpha_3\alpha_1 = |\xi|^4\mu_0,\\
\beta_1\beta_2 + \beta_3\beta_2 + \beta_3\beta_1 = \mu_0,\\
\gamma_1\gamma_2 + \gamma_3\gamma_2 + \gamma_3\gamma_1 = \xi^2\mu_0,\\
\beta_1(\gamma_2 + \gamma_3) + \beta_2(\gamma_3 + \gamma_1) + \beta_3(\gamma_2 + \gamma_1) = 2\xi\mu_0,\\
\alpha_1(\gamma_2 + \gamma_3) + \alpha_2(\gamma_3 + \gamma_1) + \alpha_3(\gamma_2 + \gamma_1) = 2\xi|\xi|^2\mu_0,\\
\gamma_1(\gamma_2^* + \gamma_3^*) + \gamma_2(\gamma_3^* + \gamma_1^*) + \gamma_3(\gamma_2^* + \gamma_1^*) +\\
+\alpha_1(\beta_2 + \beta_3) + \alpha_2(\beta_3 + \beta_1) + \alpha_3(\beta_2 + \beta_1) = 4|\xi|^2\mu_0.
\end{gathered} \tag{48}$$

Система уравнений (47), (48), состоящая из девяти нелинейных алгебраических уравнений (пять действительных и четыре комплексных) относительно одиннадцати действительных и четырех комплексных параметров, невырождена и недоопределена и поэтому имеет бесконечное число решений. Эти решения находятся без особого труда, но имеют достаточно громоздкий явный вид. Поэтому не будем их здесь приводить. Следствием выполнения уравнений (47) является тождество

$$\begin{aligned}
&\Psi_1\Psi_2 + \Psi_2\Psi_3 + \Psi_3\Psi_1 =\\
&\qquad = |g(z)|^4\big(f(t)^2(C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1) + e^{\lambda t}f(t)\nu_0 + e^{2\lambda t}\mu_0\big),
\end{aligned}$$

и суперпозиционное решение можно записать в виде

$$U = \frac{|g(z)|^4\big(f(t)^2(C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1) + e^{\lambda t}f(t)\nu_0 + e^{2\lambda t}\mu_0\big)}{\Psi_1\Psi_2\Psi_2}.$$

Это решение соответствует $N = 4$, поскольку $\Psi_0 = \Psi_1\Psi_2\Psi_2$ – квадратичная форма с координатами $\{\psi_1^3, \psi_2^3, \psi_1^2\psi_2, \psi_2^2\psi_1\}$.

По аналогии с этими примерами можно построить решения, соответствующие произвольному значению N, с помощью подбора подходящего числа функций Ψ_i, $i = 1, \ldots, n$. В случае $n = 2k$ существуют периодические решения, если $\Psi_{i+k} = \Psi_i^*$, $i = 1, \ldots, k$.

В качестве еще одного примера рассмотрим решение, получающееся с помощью суперпозиции двух решений с $N = 3$ типа (6), (24). Для построения этих решений можно воспользоваться тем обстоятельством, что в (24) функции a, b, c определены с точностью до знака, т.е. если a, b, c – решения, то и $\varepsilon_1 a$, $\varepsilon_2 b$, $\varepsilon_3 c$ – вновь решения, где $\varepsilon_i = \pm 1$. Выберем в качестве Ψ_1 и Ψ_2 функции следующего вида:

$$\Psi_1(z, \bar{z}, t) = a(t)|\psi_1|^2 + b(t)|\psi_2|^2 + c(t)|\psi_3|^2,$$
$$\Psi_2(z, \bar{z}, t) = a(t)|\psi_1|^2 - b(t)|\psi_2|^2 - c(t)|\psi_3|^2.$$

Тогда условие (36) выполняется автоматически: $\Psi_1 + \Psi_2 = 2a(t)|\psi_1|^2$. Отсюда получаем, что

$$U = \frac{2a(t)|\psi_1|^2}{\Psi_1\Psi_2}$$

– решение исходного уравнения. Модовая размерность этого решения $N = 6$. Аналогично можно строить и более сложные решения.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Следствием существования нелинейного принципа суперпозиции для решений исходного уравнения (1) является наличие у (1) многомодовых решений, зависящих от одного функционального параметра. Это напоминает наличие многосолитонных решений для уравнений, имеющих представление Лакса. Существенным отличием уравнения (1) от уравнений, интегрируемых с помощью метода обратной задачи рассеяния и допускающих многосолитонные решения, является его диффузионный характер, что, по-видимому, не допускает представления этого уравнения в форме бесконечномерной гамильтоновой системы. С другой стороны, наличие принципа суперпозиции для этого уравнения указывает на существование у него достаточно богатого набора динамических симметрий (в чистом виде для $\lambda = 0$) типа законов сохранения для "солитонных" уравнений. Если следовать идеологии теории солитонов, то можно сказать, что для изучаемого здесь уравнения (1) наличие точных решений с "простой" динамикой и структурой является следствием баланса нелинейности и диффузии наподобие того баланса, который существует в нелинейных диспергирующих средах для солитонов. Таким образом, исследованное уравнение представляет собой уравнение нового негамильтонова типа, допускающее, однако, богатый набор точных решений. Результаты работ [5, 6] показывают, что уравнения такого типа образуют достаточно большой класс диффузионных уравнений, который в [5, 6] был назван диффузионными цепочками Тоды. Метод квадратичных форм, использованный в данной работе и работах [5, 6] и обобщенный в работе [10], представляет естественный способ построения многомодовых решений для этого класса уравнений.

Благодарности. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, грант № 00-01-00260.

Список литературы

[1] *С. Н. Аристов.* ПМТФ. 1999. Т. 40. № 1. С. 22–26.
[2] *М. Н. Аристов, В. П. Мясников.* Докл. РАН. 1996. Т. 349. № 4. С. 475–477.
[3] *О. В. Воинов.* ПМТФ. 1994. Т. 35. № 6. С. 69–85.
[4] *В. В. Пухначев.* ПМТФ. 1995. Т. 36. № 2. С. 23–31.
[5] *В. М. Журавлев.* Письма в ЖЭТФ. 1997. Т. 65. № 3. С. 285–290.
[6] *В. М. Журавлев.* ЖЭТФ. 1998. Т. 114. № 5. С. 1897–1914.
[7] *В. М. Журавлев.* ПММ. 1994. Т. 58. № 6. С. 61–67.
[8] *И. С. Градштейн, И. М. Рыжик.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1971.
[9] *М. А. Абрамовиц, И. А. Стиган.* Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Мир, 1979.
[10] *В. М. Журавлев.* ТМФ. 1999. Т. 120. № 1. С. 3–19.

Поступила в редакцию 11.I.2000 г.