В. М. Журавлев, Многомерные квазилинейные уравнения первого порядка и многозначные решения уравнений гиперболического и эллиптического типов, *ТМФ*, 2016, том 186, номер 3, 371–385

DOI: https://doi.org/10.4213/tmf8889

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 186, № 3
март, 2016

 В. М. Журавлев[*]

МНОГОМЕРНЫЕ КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА И МНОГОЗНАЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО И ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПОВ

Излагается расширение теории многомерных уравнений второго порядка гиперболического и эллиптического типов, связанных с системами многомерных квазилинейных автономных уравнений в частных производных первого порядка. Вычисляются общие интегралы этих уравнений, позволяющие строить их точные решения в форме неявных функций. Устанавливается связь с уравнениями гидродинамики. Вычисляется число свободных функциональных параметров построенных решений. Специально проводится построение и анализ неявных решений уравнений Лапласа и Даламбера в координатном пространстве произвольной конечной размерности. В частности, строятся обобщенные решения Пенроуза–Риндлера уравнений Даламбера в размерности $3+1$.

Ключевые слова: точные решения многомерных нелинейных гиперболических и эллиптических уравнений, многозначные решения, системы нелинейных уравнений гидродинамического типа, уравнения электромагнитных волн, уравнения Лапласа и Даламбера.

DOI: 10.4213/tmf8889

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах [1], [2] было показано, что для ряда многомерных линейных и нелинейных уравнений математической физики гиперболического типа, возникающих в теории электромагнетизма и акустике, существуют образующие особый класс специальные многозначные решения, которые были названы ривертонами. Построенные решения типа ривертонов обладают рядом интересных свойств. В частности, они дают точные решения уравнений Эйлера течений сжимаемой жидкости без внешних сил и существуют при любой размерности координатного пространства. Эти точные решения строились на основе устанавливаемой связи между автономными квазилинейными уравнениями первого порядка [3], [4] и уравнениями второго порядка типа

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (в рамках Государственного задания и проекта № 14.Z50.31.0015).

[*]Научно-исследовательский технологический институт им. С. П. Капицы, Ульяновский государственный университет, Ульяновск, Россия. E-mail: zhvictorm@gmail.com

уравнений плоско-поляризованных электромагнитных волн в среде с нелинейной поляризацией без дисперсии. Ривертоны расширяют класс точных решений большого числа часто встречающихся на практике уравнений математической физики, в частности уравнений Даламбера. Кроме естественной для точных решений квазилинейных уравнений первого порядка многозначности, связанной с опрокидыванием фронта волны, ривертоны демонстрируют и другой тип многозначности, связанный с возникновением областей, в которых происходит пересечение различных фронтов одной и той же волны, что характерно для задач теории катастроф [5].

Однако, возможно, более важным следствием представленной теории является сам факт наличия многозначных решений для широкого класса линейных уравнений типа уравнения Даламбера или Лапласа, как это было показано в работе [2]. Это дает повод несколько иначе взглянуть, например, на проблему единственности для этих уравнений. Ранее факт наличия многозначных решений у уравнения Даламбера в размерности $3+1$ был доказан и использовался в работе [6]. Эти решения затем были применены для построения точных решений в общей теории относительности и квантовой теории поля. Однако среди многозначных решений, найденных в статьях [1], [2], нет решений, которые бы в точности соответствовали решениям Пенроуза–Риндлера. Это означает, что существует более общий подход, который позволяет включить в общую схему как решения, найденные в [1], [2], так и решения Пенроуза–Риндлера [6]. Поскольку решения Пенроуза–Риндлера играют достаточно важную роль в прикладных задачах теоретической физики, проблема построения обобщенной схемы поиска многозначных точных решений уравнений математической физики, включающей эти решения и решения типа ривертонов, представляется важной для общего понимания структуры пространства решений гиперболических и эллиптических уравнений.

В настоящей работе проводится простая размерная классификация систем многомерных квазилинейных уравнений первого порядка с коэффициентами, зависящими только от неизвестной функции, которые связываются с уравнениями второго порядка, представляющими для нас основной интерес. Отметим, что в размерностях $1+1$ и $2+1$ такие системы исследовались в работах [7]–[9]. В настоящей работе вычисляются общие интегралы рассматриваемых систем, позволяющие находить их решения как решения алгебраических (или трансцендентных) уравнений. По аналогии с работами [1], [2] для каждого типа квазилинейных уравнений выписываются системы уравнений гидродинамического типа [7], имеющие точные решения, связанные с решениями исходных систем квазилинейных уравнений. В силу полученной связи между уравнениями первого и второго порядка рассматриваемого типа построенные точные решения квазилинейных уравнений первого порядка являются также решениями уравнений второго порядка. В работе показано, как решения Пенроуза–Риндлера уравнения Даламбера в размерности $3+1$ выводятся из общей схемы. Специальный анализ проводится для решений уравнений Лапласа и Даламбера произвольного порядка.

2. МНОГОМЕРНЫЕ КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В работе [1] показано, что система из n квазилинейных уравнений общего вида

$$\frac{\partial E}{\partial x^\alpha} = A_\alpha(E)E_t, \qquad \alpha = 1, \ldots, N, \tag{1}$$

где $\mathbf{A}(E) = \big(A_1(E), \ldots, A_n(E)\big)$ – вектор-функция, зависящая от неизвестной функции $E = E(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} = (x^1, \ldots, x^N)$, и t – время, допускает общий интеграл следующего вида:

$$H(E,\, t + A_1(E)x^1 + \cdots + A_N(E)x^N) = 0, \tag{2}$$

где $H(\xi, \eta)$ – произвольная, не всюду равная постояной, дифференцируемая функция двух аргументов $\xi = E$ и $\eta = t+(\mathbf{A}, \mathbf{x})$, где $(\mathbf{A}(E), \mathbf{x}) = A_1(E)x^1+\cdots+A_N(E)x^N$. Это устанавливается последовательным дифференцированием уравнений (2) по переменным $x^1, \ldots, x^N$, t:

$$\begin{aligned} E_{,\alpha}H_{,\xi} + \big(A_\alpha + (\mathbf{A}'(E), \mathbf{x})E_\alpha\big)H_{,\eta} &= 0, \qquad \alpha = 1, \ldots, N;\\ E_{,\,t}H_{,\xi} + \big(1 + (\mathbf{A}'(E), \mathbf{x})E_t\big)H_{,\eta} &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь введены обозначения

$$E_{,\alpha} = \frac{\partial E}{\partial x^\alpha}, \qquad E_{,\,t} = \frac{\partial E}{\partial t}, \qquad H_{,\xi} = \frac{\partial H}{\partial \xi}, \qquad H_{,\eta} = \frac{\partial H}{\partial \eta}.$$

Исключая из системы уравнений (3) производные функции $H(\xi, \eta)$, получаем систему уравнений (1).

Аналогичные построения доказывают, что квазилинейное уравнение

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{N} V^\alpha \frac{\partial E}{\partial x^\alpha} = 0 \tag{4}$$

с коэффициентами

$$V^\alpha = \left[\frac{dR_0}{dE}\right]^{-1}\frac{dR_\alpha}{dE}, \qquad R_0 = R_0(E), \quad R_\alpha = R_\alpha(E),$$

зависящими только от неизвестной функции $E(\mathbf{x}, t)$, имеет общий интеграл

$$H(t - R_0(E), x^1 - R_1(E), \ldots, x^N - R_N(E)) = 0. \tag{5}$$

Доказательство строится, как и в предыдущем случае, с помощью дифференцирования уравнения (5) по координатам и времени t и исключения производных функции $H(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_N)$ по ее аргументам.

По аналогии можно рассмотреть системы квазилинейных уравнений относительно дифференцируемой почти всюду функции $E(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ с аргументами $\mathbf{x} = (x^1, \ldots, x^n)$ и $\mathbf{y} = (y^1, \ldots, y^m)$, пробегающими все вещественное пространство $\mathbb{R}^{n+m}$ с общей размерностью $N = n+m$, число уравнений в которых равно $n = N-m$. Такие системы имеют следующий вид:

$$\frac{\partial E}{\partial x^\alpha} = \sum_{a=1}^{m} A^a_\alpha(E)\frac{\partial E}{\partial y^a}, \qquad \alpha = 1, \ldots, n, \quad a = 1, \ldots, m. \tag{6}$$

Докажем следующее утверждение.

Утверждение 1. *Система квазилинейных уравнений* (6) *имеет общий интеграл*

$$H(E,\, y^1 + \Phi^1(E,\mathbf{x}),\, \ldots,\, y^m + \Phi^m(E,\mathbf{x})) = 0, \tag{7}$$

где

$$\Phi^a(E,\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^{n} A^a_\alpha(E) x^\alpha, \qquad a = 1,\ldots,m. \tag{8}$$

Доказательство строится по аналогии с доказательством формулы (2). Дифференцируя равенство (7) по координатам x^α и y^a, получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial H}{\partial x^\alpha} = H_{,E} E_{,\alpha} + \sum_{b=1}^{M} (E_{,\alpha}\Phi^b_{,E} + A^b_\alpha) H_{,b} = 0, \tag{9}$$

$$\frac{\partial H}{\partial y^a} = H_{,E} E_{,a} + \sum_{b=1}^{M} (\delta^a_b + E_{,a}\Phi^b_{,E}) H_{,b} = 0, \tag{10}$$

где

$$H_{,E} = \frac{\partial H}{\partial E}, \qquad H_{,b} = \frac{\partial H}{\partial \xi^b}, \qquad \xi^b = y^b + \Phi^b(E,\mathbf{x}).$$

Вторая часть (10) данной системы представляет собой систему алгебраических уравнений относительно производных $H_{,E}$ и $H_{,b}$ с матрицей $\mathbf{M}$, имеющей элементы $M^a_b = \delta^a_b + E_{,a}\Phi^b_{,E}$. Определитель этой матрицы равен

$$D_M = \det \mathbf{M} = 1 + \sum_{b=1}^{m} E_{,b}\Phi^b_{,E}, \tag{11}$$

а элементы обратной матрицы $\mathbf{M}^{-1}$ можно представить в следующем виде:

$$(M^{-1})^a_b = \delta^a_b - \frac{1}{D_M} E_{,a}\Phi^b_{,E}, \qquad a, b = 1,\ldots,m.$$

Отсюда, используя выражение (11), находим решение системы (10):

$$H_{,b} = -H_{,E} \sum_{a=1}^{m} (\delta^a_b - D_M^{-1} E_{,b}\Phi^a_{,E}) E_{,a} = -H_{,E} \frac{1}{D_M} E_{,b}, \qquad b = 1,\ldots,m. \tag{12}$$

Подставляя это решение в первую часть (9) исследуемой системы, приходим к следующему выражению:

$$\frac{1}{D_M} H_{,E} \left(D_M E_{,\alpha} - \sum_{b=1}^{M} (E_{,\alpha}\Phi^b_{,E} + A^b_\alpha) E_{,b} \right) = 0, \qquad b = 1,\ldots,m.$$

Равенство нулю будет иметь место при любых значениях $H_{,E}$ тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$D_M E_{,\alpha} - \sum_{b=1}^{M} (E_{,\alpha}\Phi^b_{,E} + A^b_\alpha) E_{,b} = 0, \qquad \alpha = 1,\ldots,n,$$

которое после раскрытия скобок и подстановки D_M из (11) превращается в уравнение (6), что и доказывает утверждение.

Определение 1. В дальнейшем систему многомерных квазилинейных уравнений первого порядка (6) будем обозначать через $QL^{(n,m)}$. В частности, системы (1) и (4) имеют обозначения $QL^{(n,1)}$ и $QL^{(1,n)}$ соответственно.

3. СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ МНОГОМЕРНЫХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА $QL^{(N,M)}$

Следствием утверждения 1 являются важные свойства решений, аналогичные свойствам решений системы (1), отмеченным в работах [1], [2].

Во-первых, в силу того что решения рассматриваемых уравнений являются неявно заданными и вычисляются как решения, вообще говоря, трансцендентных уравнений вида (7), они относятся к классу многозначных функций. Это одно из наиболее важных общих свойств таких решений. Число листов таких многозначных функций определяется функциональной формой интегралов $H(E,\xi_1,\dots,\xi_m)$, например, порядком полинома, если $H(E,\xi_1,\dots,\xi_m)$ выбирается в классе функций, полиномиальных по всем аргументам. В частности, решения типа ривертонов, которые были найдены в статье [1], являются многозначными функциями; число их листов определяется как характером опрокидывания фронта волны, так и числом пересечений фронтов волны. В дальнейшем мы не будем постоянно упоминать об этом свойстве многозначности решений исследуемых уравнений, подразумевая, что оно является их основным отличительным признаком.

Во-вторых, каждое решение $E(\mathbf{x},\mathbf{y})$ системы $QL^{(n,m)}$ является решением обобщенного уравнения эйконала

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial E}{\partial x^\alpha}\right)^2=\sum_{a=1}^{m}\sum_{b=1}^{m}R^{ab}\frac{\partial E}{\partial y^a}\frac{\partial E}{\partial y^b},$$

где

$$R^{ab}=\sum_{\alpha=1}^{n}A^a_\alpha(E)A^b_\alpha(E). \tag{13}$$

Доказательство этого факта строится простым умножением уравнений (6) на A^b_α и суммированием результата по индексу α.

Более интересным является следующее утверждение.

Утверждение 2. *Пусть $E(\mathbf{x},\mathbf{y})$ – решение системы $QL^{(n,m)}$. Тогда функции*

$$U^a_\alpha=-\sum_{b=1}^{m}Q^{ab}(E)A^b_\alpha(E), \tag{14}$$

где $Q^{ab}(E)$ – элементы матрицы $\mathbf{Q}$, обратной к матрице $\mathbf{R}$ с элементами $R^{ab}(E)$, определенными в (13), удовлетворяют системе нелинейных уравнений гидродинамического типа

$$\frac{\partial U^a_\alpha}{\partial y^b}+\sum_{\beta=1}^{n}U^b_\beta\frac{\partial U^a_\alpha}{\partial x^\beta}=0. \tag{15}$$

Доказательство. Умножим уравнения (6) на U_α^b и свернем полученные соотношения по индексу α. В результате получим набор следующих уравнений:

$$\frac{\partial E}{\partial y^b} + \sum_{\alpha=1}^{n} U_\alpha^b \frac{\partial E}{\partial x^\alpha} = 0. \tag{16}$$

При выводе было учтено, что

$$\sum_{\beta=1}^{n} U_\beta^c A_\beta^f = \sum_{\beta=1}^{n} Q^{cb} A_\beta^b A_\beta^f = \sum_{\beta=1}^{n} Q^{cb} R^{bf} = \delta^{cf}.$$

Соотношения (16) означают, что каждый из векторов $\mathbf{U}^b$, $b = 1, \ldots, m$, с компонентами U_α^b, $\alpha = 1, \ldots, n$, в координатном подпространстве $\mathbb{R}^n$ представляет собой скорость переноса гидродинамического маркера $E(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ соответствующим гидродинамическим потоком в этом пространстве. Поскольку $U_\alpha^a(E)$ является функцией только от $E(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, имеем

$$\frac{\partial U_\alpha^a}{\partial y^b} + \sum_{\beta=1}^{n} U_\beta^b \frac{\partial U_\alpha^a}{\partial x^\beta} = \frac{dU_\alpha^a(E)}{dE} \left(\frac{\partial E}{\partial y^b} + \sum_{\alpha=1}^{n} U_\alpha^b \frac{\partial E}{\partial x^\alpha} \right) = 0,$$

что доказывает утверждение.

4. УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Из системы уравнений (6) в результате дифференцирования находим

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial (x^\alpha)^2} E = \Delta E = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{a=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(A_\alpha^a(E) \frac{\partial E}{\partial y^a} \right).$$

Используя повторно сами уравнения (6) в правой части этого соотношения, приходим к общему уравнению следующего вида:

$$\Delta E = \sum_{a=1}^{m} \sum_{b=1}^{m} \frac{\partial}{\partial y^a} \left(R^{ab}(E) \frac{\partial E}{\partial y^b} \right). \tag{17}$$

Заметим, что в силу зависимости $R^{ab}(E)$ только от E выполняются соотношения

$$\frac{\partial}{\partial y^a} \left(R^{ab}(E) \frac{\partial E}{\partial y^b} \right) = \frac{\partial}{\partial y^b} \left(R^{ab}(E) \frac{\partial E}{\partial y^a} \right), \qquad a \neq b.$$

Это является полезным свойством уравнений при анализе числа их неэквивалентных решений, о чем речь пойдет далее.

Утверждение 3. *Каждое решение системы квазилинейных уравнений* (6) *в форме неявного алгебраического уравнения* (7) *для фиксированного выбора $R^{ab}(E)$ при соответствующем произвольном выборе функций $A_\alpha^a(E)$ является решением уравнения* (17). *Обратное утверждение неверно.*

Уравнение (17) можно записать в специальной форме дифференциального закона сохранения, аналогичного в некотором смысле уравнению непрерывности в гидродинамике. Введем формально величины

$$\rho^a = \sum_{b=1}^{m} R^{ab}(E)\frac{\partial E}{\partial y^b}. \tag{18}$$

Тогда уравнение (17) можно записать так:

$$\sum_{a=1}^{m} \frac{\partial \rho^a}{\partial y^a} + \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\sum_{a=1}^{m} \rho^a U_\alpha^a\right) = 0. \tag{19}$$

Последнее уравнение фактически является аналогом гидродинамического уравнения непрерывности и переходит в него в случае $m = 1$ при условии, что ρ^1 интерпретируется как плотность потока, а U_α^1 – как его скорость. При этих же условиях (15) переходят в уравнение Эйлера. Отметим также, что кроме дифференциального закона сохранения (19) имеется набор законов сохранения следующего вида:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} A_\alpha^a(E) = \sum_{b=1}^{m} \frac{\partial}{\partial y^b} P^{ab}(E), \qquad a = 1, \ldots, m, \tag{20}$$

где

$$P^{ab}(E) = \int^E \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{dA_\alpha^a}{dE} A_\alpha^b \, dE.$$

Проверка этих соотношений осуществляется прямыми вычислениями. Законы сохранения (20) могут быть полезными для практического использования уравнений (15) в прикладных задачах.

5. КЛАССИФИКАЦИЯ НЕЭКВИВАЛЕНТНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Общий анализ связи различных систем $QL^{(n,m)}$ с соответствующими им уравнениями второго порядка показывает, что одно и то же уравнение второго порядка может иметь несколько различных типов решений, которые определяются различными по размерности системами $QL^{(n,m)}$. Это порождает задачу поиска условий существования различных неэквивалентных типов решений в неявной форме (7) для уравнений второго порядка и перечисления всех таких решений. Данная задача состоит из двух подзадач. Первая из них сводится к выяснению числа свободных функциональных параметров $A_\alpha^a(E)$ матрицы системы $QL^{(n,m)}$, от которых не зависит вид матрицы $\mathbf{R}$ уравнения второго порядка. Вторая подзадача состоит в выяснении числа всех возможных редукций функциональных параметров $A_\alpha^a(E)$ системы $QL^{(n,m)}$, которые переводят эту систему в другую систему $QL^{(k,l)}$ той же полной размерности $N = n + m = k + l$ координатного пространства, как это было продемонстрировано в случае уравнений типа Даламбера в размерности $4 = 3 + 1$.

Утверждение 4. *При заданной общей размерности $N = n + m$ координатного пространства уравнение второго порядка* (17) *системы $QL^{(n,m)}$ будет иметь различные неэквивалентные решения, соответствующие различным неэквивалентным функциональным параметрам $A_\alpha^a(E)$, только при условии $m < 2n - 1$ или,* *эквивалентно*, $(N+1)/3 < n$. *Число свободных функциональных параметров при выполнении этого условия будет равно* $M = (2n-1-m)m/2 = (3n-N-1)(N-n)/2$. *В случае* $M \leqslant 0$ *уравнение второго порядка определяется единственным образом с помощью функциональных параметров* $A^a_\alpha(E)$.

Доказательство. Сформулированное утверждение доказывается путем сравнения размерностей матриц $\mathbf{R}$ и $\mathbf{A}$. Для системы $QL^{(n,m)}$ число независимых компонент R^{ab} матрицы $\mathbf{R}$ в силу ее симметричности равно $m(m+1)/2$, а количество компонент A^a_α матрицы $\mathbf{A}$ равно $n \times m$. Следовательно, свободные функциональные параметры в определении матрицы $\mathbf{A}$ по сравнению с матрицей $\mathbf{R}$ будут присутствовать только в том случае, когда $m < 2n-1$. Число свободных функциональных параметров A^a_α будет в этом случае определяться разностью между размерностями матриц $\mathbf{R}$ и $\mathbf{A}$. Эта величина равна

$$M = mn - \frac{m(m+1)}{2} = \frac{(2n-m-1)m}{2} = \frac{(3n-N-1)(N-n)}{2}.$$

Если $M < 0$, то свободные параметры отсутствуют и матрица $\mathbf{R}$ однозначно определяется функциональными параметрами $A^a_\alpha(E)$.

Так, например, для системы $QL^{(3,1)}$ имеем $M = 2 > 0$, т. е. для одного и того же уравнения второго порядка имеется бесконечное число неэквивалентных решений, которые определяются двумя свободными параметрами, что и было продемонстрировано в работе [1]. Для исследуемой далее системы $QL^{(2,2)}$ мы имеем $M = 1 > 0$, и неэквивалентные решения определяются одним свободным функциональным параметром. Для системы $QL^{(3,2)}$ число свободных функциональных параметров равно $M = 4$ и т. д.

Рассмотрим теперь вопрос о редукциях уравнений второго порядка системы $QL^{(k,l)}$ к идентичным уравнениям второго порядка системы $QL^{(n,m)}$ при условии, что размерности координатного пространства связаны условием $n + m \leqslant k + l$. Смысл редукции состоит в том, чтобы с помощью специального выбора функциональных параметров $A^a_\alpha(E)$ системы $QL^{(k,l)}$ редуцировать уравнение второго порядка меньшей или той же размерности координатного пространства, но со структурой матрицы, соответствующей другой системе $QL^{(n,m)}$. Существование нетривиальных редукций также связано с наличием свободных функциональных параметров. Однако в случае редукций затруднительно дать полное описание всех таких возможных вариантов, поскольку тип редукции определяется не только исходной системой, но и типом уравнения, к которому система редуцируется. Поэтому удобнее процедуру редукций описать на конкретных примерах.

6. СИСТЕМА $QL^{(2,2)}$ И ЕЕ РЕДУКЦИИ

Рассмотрим в качестве важного примера систему $QL^{(2,2)}$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial x} &= A(E)\frac{\partial E}{\partial z} + B(E)\frac{\partial E}{\partial t}, \\ \frac{\partial E}{\partial y} &= C(E)\frac{\partial E}{\partial z} + D(E)\frac{\partial E}{\partial t}. \end{aligned} \tag{21}$$

Коэффициенты этой системы A^a_α записываются как

$$A^1_1 = A(E), \qquad A^2_1 = B(E), \qquad A^1_2 = C(E), \qquad A^2_2 = D(E).$$

Решения системы (21) можно найти из общего интеграла

$$H(E,\, z+\Phi(E,x,y),\, t+\Psi(E,x,y))=0,$$

где

$$\Phi(E,x,y)=A(E)x+C(E)y, \qquad \Psi(E,x,y)=B(E)x+D(E)y.$$

Матрица $\mathbf{R}$ для этой системы имеет элементы

$$R^{11}=(A_1^1)^2+(A_2^1)^2=A^2(E)+C^2(E), \qquad R^{22}=(A_1^2)^2+(A_2^2)^2=B^2(E)+D^2(E),$$
$$R^{21}=R^{12}=A_1^1A_1^2+A_2^1A_2^2=A(E)B(E)+C(E)D(E).$$

Уравнение второго порядка, соответствующее этой матрице, имеет вид

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial z}\left(R^{11}(E)\frac{\partial E}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(R^{22}(E)\frac{\partial E}{\partial t}\right)+2\frac{\partial}{\partial z}\left(R^{12}(E)\frac{\partial E}{\partial t}\right). \tag{22}$$

В математической физике уравнение второго порядка, записанное в такой форме, появляется редко. Поэтому интересны ситуации, когда это уравнение в результате определенной редукции переходит в уравнения, чаще встречающиеся на практике. Примером таких уравнений являются уравнения распространения электромагнитных волн в диэлектриках без дисперсии или акустических волн в газе. Решения этих уравнений, как было показано в работе [1], в соответствии со введенными выше обозначениями относятся к системам $QL^{(3,1)}$. Поэтому интерес представляют редукции системы $QL^{(2,2)}$ к системам $QL^{(3,1)}$. Такой интерес в первую очередь вызван тем, что решения систем $QL^{(2,2)}$ определяются интегралами (7) с двумя независимыми аргументами, в то время как решения систем $QL^{(3,1)}$ – только с одним. Это означает, что функциональный класс решений, которые можно получить с помощью систем $QL^{(2,2)}$, значительно шире, чем с помощью систем $QL^{(3,1)}$.

Необходимая редукция $QL^{(2,2)}$, приводящая к уравнениям второго порядка, связанных с системами $QL^{(3,1)}$, соответствует условию

$$R^{12}=R^{21}=A(E)B(E)+C(E)D(E)=0. \tag{23}$$

Если это условие выполнено, то уравнение (22) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 Q(E)}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 P(E)}{\partial t^2},$$

где

$$\frac{dQ}{dE}=R^{11}(E), \qquad \frac{dP}{dE}=R^{22}(E).$$

При дополнительном условии

$$R^{11}=A^2(E)+C^2(E)=-1 \tag{24}$$

уравнение (22) превращается в уравнение

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 E}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 P(E)}{\partial t^2}, \tag{25}$$

которое совпадает по форме с уравнением (17) для системы $QL^{(3,1)}$ (1) с $n = 3$, подробно рассмотренной в статье [1]. Как отмечалось в этой работе, уравнение (25) описывает распространение электромагнитных волн в среде с нелинейной поляризацией без дисперсии.

Условия (23) и (24) выполняются автоматически, если функции A, B, C имеют следующий общий вид:

$$A(E) = i\cos\chi(E), \qquad C(E) = i\sin\chi(E), \qquad B(E) = -D(E)\operatorname{tg}\chi(E). \tag{26}$$

Другой вариант выполнения условий (23) и (24) таков:

$$A(E) = \operatorname{sh}\chi(E), \qquad C(E) = i\operatorname{ch}\chi(E), \qquad B(E) = -iD(E)\operatorname{cth}\chi(E). \tag{27}$$

При этом функции $D(E)$ и $\chi(E)$ остаются произвольными. В случае (26) мы имеем

$$\frac{dP(E)}{dE} = \frac{D^2(E)}{\cos^2\chi(E)},$$

а в случае (27) имеем

$$\frac{dP(E)}{dE} = -\frac{D^2(E)}{\operatorname{sh}^2\chi(E)}.$$

В отличие от интеграла (2) системы $QL^{(3,1)}$ интеграл (7), соответствующий системе $QL^{(2,2)}$, при выполнении условий (23) и (24) будет иметь более общий вид. Для варианта (26) он записывается как

$$H(E,\, z + i[x\cos\chi(E) + y\sin\chi(E)],\, t + D(E)[x\operatorname{tg}\chi(E) + y]) = 0.$$

Для варианта (27) он имеет вид

$$H(E,\, z + x\operatorname{sh}\chi(E) + iy\operatorname{ch}\chi(E),\, t + D(E)[-ix\operatorname{cth}\chi(E) + y]) = 0.$$

Эти соотношения представляют собой наиболее общий функциональный вид интегралов для уравнения (25), что существенно расширяет класс решений этих уравнений. Однако в отличие от решений, рассмотренных в работе [1], решения, соответствующие этим интегралам, являются, вообще говоря, комплексными. Такие решения в конечном итоге оказываются аналогичными решениям комплексных уравнений типа $QL^{(3,1)}$, рассмотренным в работе [2].

7. УРАВНЕНИЕ ДАЛАМБЕРА В РАЗМЕРНОСТИ $3+1$. РЕШЕНИЕ ПЕНРОУЗА–РИНДЛЕРА

Частным случаем системы (25) является уравнение Даламбера, которое соответствует следующему выбору элементов матрицы $\mathbf{R}$:

$$\begin{gathered} R^{11} = A^2(E) + C^2(E) = -1, \qquad R^{22} = B^2(E) + D^2(E) = 1, \\ R^{12} = R^{21} = A(E)B(E) + C(E)D(E) = 0. \end{gathered} \tag{28}$$

В этом случае $P(E) = 1$, и уравнение (25) принимает вид

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}.$$

Соответствующий (28) функциональный вид коэффициентов A, B, C, D следующий:

$$\begin{aligned} A(E) &= i\cos\chi(E), & C(E) &= i\sin\chi(E), \\ B(E) &= \sin\chi(E), & D(E) &= -\cos\chi(E), \end{aligned} \tag{29}$$

где функция $\chi(E)$ произвольна. Это приводит к следующему интегралу:

$$H(E,\, z + i[x\cos\chi(E) + y\sin\chi(E)],\, t + x\sin\chi(E) - y\cos\chi(E)) = 0.$$

По аналогии с (27) можно получить интеграл с гиперболическими функциями от произвольной функции $\chi(E)$.

Интерес представляет особое решение Пенроуза–Риндлера, соответствующее специальному выбору элементов матрицы $\mathbf{R}$. А именно, рассмотрим матрицу с элементами следующего вида:

$$\begin{gathered} R^{11} = A^2(E) + C^2(E) = 0, \qquad R^{22} = B^2(E) + D^2(E) = 0, \\ R^{12} = R^{21} = A(E)B(E) + C(E)D(E) = 1. \end{gathered} \tag{30}$$

Соответствующие этим соотношениям функции B, C, D можно выбрать так:

$$C(E) = iA(E), \qquad D(E) = -iB(E), \qquad B(E) = \frac{A^{-1}(E)}{2},$$

где функция $A(E)$ произвольна. Интеграл при этом можно записать в виде

$$H\left(E,\, u + A(E)(x+iy),\, v + 2\frac{x-iy}{A(E)}\right) = 0$$

или

$$H(E,\, u + A(E)(x+iy),\, A(E)v + 2(x-iy)) = 0. \tag{31}$$

Уравнение второго порядка в этом случае таково:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = 2\frac{\partial^2 E}{\partial u\,\partial v},$$

что эквивалентно уравнению Даламбера в конусных переменных $u = z + t$, $v = z - t$. Интеграл (31) представляет собой обобщенный интеграл Пенроуза–Риндлера [6], который переходит в точности в интеграл Пенроуза–Риндлера в случае $A(E) = E$.

Уравнение Даламбера является линейным, поэтому комплексность интегралов (31) не составляет существенной проблемы для получения вещественных решений, поскольку и вещественная, и мнимая часть этих интегралов являются по отдельности решениями уравнения Даламбера.

8. СИСТЕМЫ $QL^{(N,M)}$ И УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

На примере системы $QL^{(2,2)}$ рассмотрим другой тип редукций, который позволяет в качестве одного из вариантов уравнения второго порядка получить уравнение Лапласа в размерностях $d = 2$ и $d = 3$. Поскольку число свободных функциональных параметров системы $QL^{(2,2)}$ равно $M = 1$, вырожденная система уравнений относительно элементов матрицы $\mathbf{R}$

$$\begin{gathered} R^{11} = A^2(E) + C^2(E) = 0, \qquad R^{22} = B^2(E) + D^2(E) = 0, \\ R^{12} = R^{21} = A(E)B(E) + C(E)D(E) = 0 \end{gathered} \tag{32}$$

имеет нетривиальное решение $C(E) = iA(E)$, $D(E) = iB(E)$, содержащее два свободных функциональных параметра $A(E)$ и $B(E)$. Соответствующий интеграл принимает такой вид:

$$H(E,\, z + A(E)(x + iy),\, t + B(E)(x + iy)) = 0. \tag{33}$$

Решения этого уравнения удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} = 0. \tag{34}$$

Можно заметить, что интеграл (33) приводит к хорошо известным комплексным аналитическим решениям уравнения Лапласа в размерности $d = 2$ общего вида $E = E(x - iy, z, t)$, где z и t – параметры. Нетрудно проверить, что увеличение общей размерности системы $QL^{(2,m)}$ для получения решений уравнения (34) более общего вида с помощью редукций типа (32) не приводит к новым решениям относительно x, y, но усложняет параметрическую зависимость этих решений относительно параметров $y^1, \ldots, y^m$. Такие решения будут определяться интегралами

$$H(E,\, y^1 + A_1^1(E)(x + iy),\, \ldots,\, y^m + A_1^m(E)(x + iy)) = 0$$

при произвольных $A_1^m(E)$. Кроме этого, в силу линейности уравнения (34) его общее решение является линейной суперпозицией комплексно-сопряженных решений $E = E(x - iy, z, t)$ и $E = E(x + iy, z, t)$. С точки зрения функциональной формы решений уравнения (34) эти решения не представляют существенного интереса, но могут быть интересны с точки зрения устойчивости решений по отношению к изменению множества параметров $\mathbf{y} = \{y^1, \ldots, y^m\}$, поскольку зависимость от параметров представляет собой опрокидывающиеся волны в гиперболических системах.

Подобный анализ можно провести для уравнения Лапласа в размерности $d = 3$. Для этого первоначально рассмотрим систему $QL^{(3,2)}$. Для этой системы матрица $\mathbf{R}$ будет иметь размерность $m = 2$, а число свободных функциональных параметров $M = 4$. Рассмотрим условия обращения в ноль всех элементов матрицы $\mathbf{R}$, что обеспечивает редукцию уравнения второго порядка к уравнению Лапласа в трехмерном пространстве с координатами x, y, z. В результате имеем

$$\begin{gathered} R^{11} = (A_1^1)^2 + (A_2^1)^2 + (A_3^1)^2 = 0, \qquad R^{22} = (A_1^2)^2 + (A_2^2)^2 + (A_3^2)^2 = 0, \\ R^{12} = R^{21} = A_1^1 A_1^2 + A_2^1 A_2^2 + A_3^1 A_3^2 = 0. \end{gathered} \tag{35}$$

Без ограничения общности решение этих алгебраических уравнений можно записать в виде

$$A_2^p = iA_1^p(E)\cos\phi(E), \quad A_3^p = iA_1^p(E)\sin\phi(E), \qquad p = 1, 2.$$

Соответствующий интеграл записывается как

$$H(E,\, y^1 + A_1^1(E)\theta(x, y, z, \phi(E)),\, y^2 + A_1^2(E)\theta(x, y, z, \phi(E))) = 0,$$

где

$$\theta(x, y, z, \phi(E)) = x + iy\cos\phi(E) + iz\sin\phi(E). \tag{36}$$

Следовательно, решение трехмерного уравнения Лапласа, соответствующее найденному интегралу, определяется одной комплексной функцией $\theta(x, y, z, \phi(E))$, т. е. это решение можно записать в виде

$$E = E(\tau^1(E), \tau^2(E), \theta(x, y, z, \phi(E))), \qquad \tau^a = \frac{y^a}{A_1^a(E)}, \quad a = 1, 2. \tag{37}$$

В силу произвольности функции $\phi(E)$ полное решение уравнения Лапласа определяется линейной суперпозицией всех возможных решений с функциями $\theta(x, y, z, \phi(E))$, где $\phi(E)$ – любая аналитическая функция одного комплексного аргумента E. Следует при этом иметь в виду, что (37) необходимо рассматривать как алгебраическое уравнение для E, а соответствующие его неявные решения в общем случае будут многозначными функциями. Полезно также заметить, что все возможные векторы $\mathbf{n}(E) = \{\cos\phi(E), \sin\phi(E)\}$ представляют собой единичные векторы в плоскости (y, z), выходящие из начала координат и зависящие от одного комплексного аргумента E. Это указывает на то, что решения, соответствующие (36), являются фактически ривертонами, описанными в работе [1]. Поэтому нет особой необходимости отдельно анализировать структуру полученных многозначных решений.

По аналогии с двумерным уравнением Лапласа можно рассмотреть все возможные системы $QL^{(3,m)}$, для которых форма уравнений (35) будет оставаться неизменной, что приводит к тем же решениям (37), но с бóльшим числом параметров $\mathbf{y} = \{y^1, \dots, y^m\}$, $m \geqslant 2$.

Рассуждая аналогичным образом, получаем общее

Утверждение 5. *Уравнение Лапласа в координатном пространстве размерности $n \geqslant 2$,*

$$\Delta E = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial (x^\alpha)^2} E = 0, \tag{38}$$

имеет частное неявное решение

$$E = F(\mathbf{t}, \theta(\mathbf{x}, \mathbf{n}(E)) \tag{39}$$

с произвольной не всюду постоянной функцией $F(\mathbf{t}, \theta)$, зависящей от набора из m функциональных параметров $\mathbf{t}(E) = (y^1/A_1^1(E), \dots, y^m/A_1^m(E))$ и одной функции

$$\theta = x^1 + i \sum_{\alpha=2}^{n} n_\alpha(E) x^\alpha, \tag{40}$$

являющейся функцией от координат $\mathbf{x} = \{x^1, \dots, x^n\}$ и произвольного единичного вектора $\mathbf{n}(E)$ размерности $n - 1$. Общее решение уравнения (38) есть линейная суперпозиция решений (39):

$$E = \sum_{\mathbf{n}(E)} F_{\mathbf{n}}(\mathbf{y}, \theta(\mathbf{x}, \mathbf{n}(E))),$$

где сумма берется по всем возможным единичным векторам $\mathbf{n}(E)$ с произвольной зависимостью от E.

Этот результат без труда переносится на уравнения Даламбера произвольной размерности. Наиболее простой способ состоит в формальной замене $x^1 \to ix^1$ координаты x^1 на чисто мнимую координату ix^1. В результате оператор Лапласа переходит в оператор Даламбера, а функция $\theta(\mathbf{x}, \mathbf{n}(E))$ оказывается чисто мнимой, что эквивалентно ее вещественности.

Построенные общие решения, как отмечалось выше, фактически являются вариантом ривертонов [1]. Основным свойством ривертонов является то, что их изоповерхности представляют собой гиперплоскости в координатном пространстве. Этим же свойством обладают и решения (39), которые при условии $E = E_0 = \mathrm{const}$ приводят к уравнению гиперплоскости

$$\theta = x^1 + i\sum_{\alpha=2}^{n} n_\alpha(E_0)x^\alpha = \mathrm{const}.$$

Эта гиперплоскость имеет размерность $n-2$ в случае уравнения Лапласа, поскольку в этом случае θ – комплексная функция, и имеет размерность $n-1$ в случае уравнения Даламбера, для которого θ – чисто мнимая или вещественная функция. Отметим также, что зависимость от параметров $\mathbf{y}$ выглядит в решениях (39) несущественной, но может играть определенную роль в проблеме устойчивости решений краевых задач. Однако этот вопрос выходит за рамки настоящей работы.

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной работе проведен анализ решений всех возможных автономных квазилинейных систем уравнений первого порядка в произвольной конечной размерности координатного пространства. Для всех таких систем получен общий вид интегралов, с помощью которых строятся в неявном виде точные многозначные решения этих систем. Установлена связь этих систем с обобщенными уравнениями эйконала и специальными уравнениями гидродинамического типа, а также с нелинейными уравнениями второго порядка как гиперболического, так и эллиптического типов. На основе этой связи построены решения уравнений второго порядка и проведен общий анализ их свойств. Для специальных случаев уравнений второго порядка, таких как уравнения Лапласа и Даламбера произвольной конечной размерности, получен общий вид решений в форме суперпозиции частных решений, которые в общем случае являются многозначными. Полученные решения содержат произвольные функциональные параметры, количество которых определено соответствующим утверждением. Этот факт касается и линейных уравнений Лапласа, и Даламбера.

На основе этих результатов в работе указан тип квазилинейной системы первого порядка, который в точности соответствует решениям Пенроуза–Риндлера уравнения Даламбера в размерности $3+1$, и получено их обобщение. Это системы типа $QL^{(2,2)}$ со специальной матрицей $\mathbf{R}$. Для уравнений Лапласа и Даламбера свободные функциональные параметры для каждого частного решения являются координатами единичного вектора размерности $n-1$, произвольным образом зависящего от неизвестной функции. Общее решение представляет собой суперпозицию всех таких частных решений с различной зависимостью единичных векторов от неизвестной функции.

Таким образом, решения уравнений Лапласа и Даламбера можно представить как суперпозиции многозначных функций, которые по сути являются ривертонами, исследованными в работе [1]. Фактически многозначность становится не уникальным, а естественным свойством решений уравнений математической физики. Этот вывод дает основания для реализации новых подходов к построению решений краевых задач для некоторых часто встречающихся на практике уравнений теоретической и математической физики [10].

Список литературы

[1] В. М. Журавлев, *ТМФ*, **174**:2 (2013), 272–284.

[2] В. М. Журавлев, *Пространство, время и фундаментальные взаимодействия*, 2013, № 4, 56–67.

[3] Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко, *Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике*, Наука, М., 1978.

[4] А. Г. Куликовский, Е. И. Свешникова, А. П. Чугайнова, *Математические методы изучения разрывных решений нелинейных гиперболических систем уравнений*, Лекционные курсы НОЦ, **16**, МИАН, М., 2010.

[5] В. И. Арнольд, *Особенности каустик и волновых фронтов*, Фазис, М., 1996.

[6] R. Penrose, W. Rindler, *Spinors and Space-Time*: *Spinor and Twistor Methods in Space-Time Geometry*, **2**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1986; V. V. Kassandrov, J. A. Riscalla, “Particles as singularities within the unified algebraic field dynamics”, *Geometrization of Physics* III (Kazan, Russia, October 1–5, 1997), ed. V. I. Bashkov, Kazan State Univ., Kazan, 1997, 199–212, arXiv: gr-qc/9809056.

[7] С. П. Царев, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54**:5 (1990), 1048–1068.

[8] E. V. Ferapontov, K. R. Khusnutdinova, *Commun. Math. Phys.*, **248**:1 (2004), 187–206; *J. Phys. A*, **37**:8 (2004), 2949–2963, arXiv: nlin/0310021; *J. Math. Phys.*, **45**:6 (2004), 2365–2377, arXiv: nlin/0312015.

[9] Е. В. Ферапонтов, К. Р. Хуснутдинова, М. В. Павлов, *ТМФ*, **144**:1 (2005), 35–43.

[10] V. M. Zhuravlev, *Gravit. Cosmol.*, **17**:3 (2011), 201–217.

Поступила в редакцию 6.03.2015,
после доработки 9.06.2015