

# Автоволны в двухпроводных линиях с нелинейным активным элементом экспоненциального типа

В. М. Журавлев<sup>1)</sup>

Ульяновский государственный университет,  
Институт теоретической физики, 432700 Ульяновск, Россия

Поступила в редакцию 1 ноября 2001 г.

После переработки 23 ноября 2001 г.

Для нелинейной двухпроводной линии с активным элементом экспоненциального типа, характерного для распределенных  $p-n$ -переходов и нервного волокна, на основе точных решений исследованы режимы возникновения локализованных импульсов возбуждения в линии. Показано, что линия такого типа описывается в случае учета погонной индуктивности нелинейным телеграфным уравнением, а в случае ее отсутствия – одномерным нелинейным диффузионным уравнением. Исследованы основные свойства волн возбуждения и условия их возникновения.

PACS: 02.30.Jr, 11.10.Lm

1. Двухпроводные линии с активным распределенным элементом и с погонными параметрами, зависящими от напряжения на данном участке линии, являются часто встречающимися моделями реальных распределенных систем в физике и биологии. Примером могут служить различные волноводные системы канализования электромагнитных волн в СВЧ-диапазоне и нервное волокно, которое также в упрощенном виде может описываться как двухпроводная линия с активным элементом (см. [1] и библиографию там). Динамика волн в таких системах очень разнообразна и зависит от преобладания тех или иных физических факторов в линии: дисперсионных, диссипативных, нелинейных или их комбинаций. Наибольший прогресс в изучении моделей автоволн (как впрочем всех типов нелинейных систем) наблюдался в тех случаях, когда удавалось найти способы построения точных решений уравнений, описывающих процессы в них. Обычно это стационарные решения [2, 3], а также автомодельные решения, связанные со свойствами подобия этих систем [1, 3]. Богатый класс решений возникает в случаях, когда уравнения сводятся к уравнениям, интегрируемым с помощью метода обратной задачи рассеяния (МОЗР), например, к уравнению синус-Гордон (СГ) [4, 1]. Однако МОЗР не применим в случаях, когда в динамике системы важную роль играют диссипативные или диффузионные процессы. В таких ситуациях приходится прибегать к иным способам анализа систем. Подход такого рода был предложен в работах [5–7], где на основе метода квадратичных форм

были построены точные решения систем уравнений типа “реакция – диффузия”, названные в этих работах диффузионными цепочками Тоды. Для целей данной работы наиболее полезным примером применения метода квадратичных форм явилось исследование двумерного нелинейного уравнения диффузии (УНДф2) [5]:

$$u_t - D\Delta \ln u - \lambda u = 0, \quad (1)$$

которое встречается в ряде прикладных задач гидродинамики (см. библиографию в [5]) и в более общем контексте относится к описанию моделей со стимулированной диффузией [8]. В настоящей работе рассматриваются задачи описания волн в нелинейных двухпроводных линиях с распределенным активным элементом, описание которых сводится к исследованию одномерного уравнения нелинейной диффузии (УНДф1) и близкого к нему и к УНДф2 (1) нелинейного телеграфного уравнения (НТУ), см. ниже. Это уравнение описывает двухпроводные линии с активным элементом, близким к тем, которые встречаются на практике [1]. Основной целью настоящей работы будет построение точных решений уравнений двухпроводных линий и анализ волновых процессов в них, в частности, будет показано наличие ряда интересных эффектов в таких системах.

2. Уравнения активной двухпроводной линии, эквивалентная схема которой приведена на рис.1, могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial i}{\partial x} + C(u) \frac{\partial u}{\partial t} + j(u) &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + L(u) \frac{\partial i}{\partial t} + R(u)i &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

<sup>1)</sup>e-mail: zhuravl@sv.univen.ru

Здесь  $i = i(x, t)$  – ток в точке линии с координатой  $x$  в момент времени  $t$ ,  $u = u(x, t)$  – напряжение на том же участке линии,  $C(u)$  и  $L(u)$  – погонные емкость и индуктивность линии, соответственно,  $R(u)$  – погонное сопротивление участка линии, зависящее от напряжения на этом участке, и  $j = j(u)$  – вольт-амперная характеристика активного элемента линии. Соответствующая эквивалентная схема линии в этом случае имеет вид, представленный на рис.1.

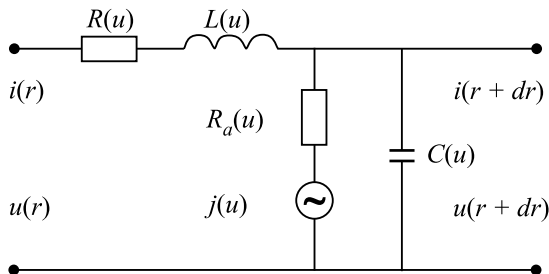


Рис.1. Эквивалентная схема двухпроводной линии с активным элементом

Рассмотрим модель физических явлений в ситуации, когда напряжения и токи в линии таковы, что погонные параметры линии  $R, C, L$  – постоянны вдоль линии и не зависят от напряжения на участке линии. Вольт-амперную характеристику активного элемента часто можно аппроксимировать экспоненциальной зависимостью

$$j(u) = r e^{u/u_0} - j_0. \quad (3)$$

Такой вольт-амперной характеристикой обладают  $p$ - $n$ -переходы и биологические мембраны при некоторых режимах их функционирования (см. [1, 9] и библиографию там). Заметим, что и для  $p$ - $n$ -переходов и биологических мембран [1, 9] при комнатной температуре  $u_0 = kT/e \sim 25$  мВ ( $e$  – заряд электрона,  $k$  – постоянная Больцмана,  $T$  – абсолютная температура).

Уравнение линии, подчиняющееся уравнениям (2), после исключения тока  $i$  в линейном погонном элементе линии можно представить в виде

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - LC \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u + Rj(u) + (RC - j'(u)) \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

Для биологических мембран уравнение в такой форме, учитывающей наличие ненулевой погонной индуктивности в линии, было предложено использовать в работах [11–13] (см. также [1]). Подставляя сюда выражение для  $j(u)$  из (3), получаем

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{V_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u + Rr e^{u/u_0} - Rj_0 + (RC - \frac{r}{u_0} e^{u/u_0}) \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \quad (4)$$

Величина  $V_0 = 1/\sqrt{LC}$  здесь представляет собой скорость распространения волн в линейном гиперболическом режиме. Нас будет интересовать в основном случай, когда в последнем уравнении можно пренебречь величинами  $Rj_0$  и  $RC$  по сравнению с экспоненциальными слагаемыми в соответствующих коэффициентах. Величина  $1/RC$  характеризует время разряда конденсатора с емкостью  $C$  через активное сопротивление величины  $R$ . Пренебрежение величиной  $RC$  в данном случае означает, что в основном разряд происходит не через активное сопротивление линии, а через ее активный элемент. Величина  $Rj_0$  представляет собой величину падения напряжения на активном сопротивлении за счет тока обратной проводимости. Обе эти величины могут быть сделаны малыми выбором подходящей рабочей точки линии. Физически это соответствует постоянному положительному напряжению между проводами линии. В уравнениях это смещение напряжения эквивалентно подстановке  $u = \tilde{u} + U_0$ , где  $U_0 = \text{const}$ . Уравнения в этом случае не изменяют своей формы:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{V_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u + Rr e^{U_0/u_0} e^{u/u_0} - Rj_0 + (RC - \frac{r}{u_0} e^{U_0/u_0} e^{u/u_0}) \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \quad (5)$$

Здесь знак  $\sim$  опущен. Поскольку в результате такого преобразования в соответствующих коэффициентах появляется безразмерный множитель  $m = \exp\{U_0/u_0\}$ , то подходящим выбором  $U_0$  можно добиться выполнения условий  $Rrm \gg Rj_0$  и  $rm/u_0 \gg RC$ , что и определяет возможность использования рассматриваемого приближения для двухпроводной линии с активным элементом типа (3). Заметим, что из-за экспоненциального роста множителя  $m$  для выполнения этих условий достаточно превышения  $U_0$  над  $u_0$  в два-три раза, при этом  $m \sim 10 - 20$ . Режим работы линии, соответствующий  $m \gg 1$ , будем называть активным режимом. При больших отрицательных напряжениях ток через активный элемент становится близким к току обратной проводимости. Этот режим будем называть неактивным. При этом уравнение (5) становится эквивалентным обычному телеграфному уравнению. При условии малости величины  $RC$ , как и для режима с активным элементом, линия будет работать в ги-

гиперболическим режиме, который описывается уравнением Д'Аламбера. Отметим этот факт особо. В дальнейшем будет показано, что в активном режиме в линии могут генерироваться импульсы, которые распространяются в область, где линия работает в неактивном, близком к гиперболическому, режиме. Однако основным свойством гиперболического режима является бездисперсионная динамика волн. В таком режиме импульс будет распространяться без сильных искажений. Таким образом, рассматриваемое приближение относится лишь к некоторому участку линии, работающей в активном режиме, но может быть согласовано со всей линией в целом с помощью сшивки полученных ниже решений с решениями в неактивном режиме, которые находятся решением уравнения Д'Аламбера или телеграфного уравнения.

Приближение, соответствующее активному режиму, интересно тем, что позволяет применить к анализу системы методы, развитые в [5] для уравнения (1). Уравнение, соответствующее физической ситуации, в которой нельзя полагать  $RC \sim 0$ ,  $Rj_0 \sim 0$ , уже не будет обладать специальными свойствами и не допускает рассматриваемого ниже принципа суперпозиции. Это означает усложнение динамики системы.

Преобразуем уравнение (4), вводя безразмерные конусные координаты:

$$\xi = (x + V_0 t)x_0^{-1}, \quad \eta = (x - V_0 t)x_0^{-1},$$

где  $V_0$  – скорость волн в линейном приближении, а  $x_0$  – характерный масштаб длины в линии. В этих переменных, если ввести новую вспомогательную функцию  $\phi$ , полагая  $u(x, t) = -u_0 \ln \phi$ , уравнение модели приводится к стандартному виду

$$D \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \ln \phi - \frac{\Lambda}{\phi} + \frac{1}{\phi^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial \xi} - \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) = 0. \quad (6)$$

В дальнейшем будем называть это уравнение НТУ. Для этой модели постоянные безразмерные параметры  $\Lambda, D$  связаны с параметрами модели соотношениями

$$\Lambda = \frac{R x_0}{V_0}, \quad D = \frac{4 u_0}{x_0 r V_0}.$$

Заметим, что рассматриваемая модель представляет интерес и в случае, когда погонная индуктивность линии мала, так что ею можно пренебречь. В этом случае уравнение НТУ будет не телеграфным, а УНДФ1. Как уже отмечалось, именно такие модели первоначально рассматривались в качестве математических моделей нервного волокна и лишь после работ [11–13] модели модифицировались с целью учета индуктивности.

**3.** Основным методом размножения простейших типов решений в рассматриваемых системах будет метод, основанный на специальном принципе суперпозиции, аналогичном принципу, найденному в [5] для уравнения (1). Возможность существования такого принципа суперпозиции покажем на примере двух экземпляров решений уравнения (6). Пусть  $\phi_1$  и  $\phi_2$  – два линейно-независимых решения этого уравнения:

$$D \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \ln \phi_i - \frac{\Lambda}{\phi_i} + \frac{1}{\phi_i^2} \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} - \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} \right) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Складывая уравнения для  $\phi_1$  и  $\phi_2$ , получаем

$$D \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \ln(\phi_1 \phi_2) - \Lambda \left( \frac{1}{\phi_1} + \frac{1}{\phi_2} \right) - \left( \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left( \frac{1}{\phi_1} + \frac{1}{\phi_2} \right) = 0.$$

Предположим теперь, что выполняется условие

$$\phi_1 + \phi_2 = f(\xi)g(\eta), \quad (7)$$

где  $f(\xi)$  и  $g(\eta)$  – произвольные дифференцируемые функции одного аргумента, соответственно  $\xi$  и  $\eta$ . Тогда в силу того, что

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \ln(f(\xi)g(\eta)) = 0,$$

находим, что функция

$$\Phi = \phi_1 \phi_2 / (\phi_1 + \phi_2)$$

удовлетворяет тому же уравнению (6):

$$D \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \ln \Phi - \frac{\Lambda}{\Phi} + \frac{1}{\Phi^2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) = 0.$$

При этом функция  $\Phi$  удовлетворяет условию

$$1/\Phi = 1/\phi_1 + 1/\phi_2,$$

что представляет собой принцип суперпозиции со связью (7). Опять же по аналогии с уравнением нелинейной диффузии (1) [5] этот принцип суперпозиции в принципе можно обобщить, рассматривая такие  $r$  линейно-независимых экземпляров  $\phi_i$ ,  $i = 1, \dots, r$ , решений исходного уравнения (6), для которых выполнено условие

$$\sum_{k=1}^r \prod_{i=1, k \neq i}^r \phi_i = f(\xi)g(\eta). \quad (8)$$

Если это условие имеет место, то функция  $\Phi$ , связанная с  $\phi_i$  соотношением

$$\frac{1}{\Phi} = \sum_{i=1}^r \frac{1}{\phi_i}, \quad (9)$$

вновь будет решением исходного уравнения. Число  $r$  будем называть рангом суперпозиционного решения.

4. Для того чтобы указанный принцип суперпозиции мог быть реализован на практике, необходимо существование решений, подчиняющихся условиям (7) и в более общем виде условиям (8). Такие простейшие решения могут быть найдены в рамках метода квадратичных форм, предложенного в [5–7]. Найденные таким способом решения могут быть двух типов. Первый тип решений может быть представлен в следующем виде:

$$\phi = -D\Lambda BCe^{\Lambda(\xi-\eta)} + Be^{\Lambda\xi} + Ce^{-\Lambda\eta}, \quad (10)$$

где  $B$  и  $C$  – произвольные вещественные постоянные. Решение (10), пересчитанное для напряжения  $u$  в линии, не сингулярно, если  $\phi$  не имеет нулей во всей области определения. Условием этого является одновременное выполнение неравенств:  $B > 0$ ,  $C > 0$ ,  $\Lambda < 0$ .

Второй, более сложный тип, решений представим в виде

$$\phi = -DBC\Lambda \exp\{2\Lambda\xi - \Lambda\eta\} - \frac{B}{4DC\Lambda} \times \\ \times \exp\{2\Lambda\xi + \Lambda\eta\} + B \exp\{2\Lambda\xi\} + C \exp\{-\Lambda\eta\}, \quad (11)$$

где  $B, C, \Lambda$  – вещественные постоянные. Это решение будет не сингулярным, например, в случае  $\Lambda < 0$ ,  $B > 0$ ,  $C > 0$ . Еще одна область значений параметров, при которых решение для напряжения не сингулярно, можно легко установить, если представить его в следующем виде:

$$\phi = B \exp\{2\Lambda\xi\} (1 - \operatorname{ch}\{\Lambda\eta + \chi\}) + C \exp\{-\Lambda\eta\},$$

где  $\chi = \ln\{2DC\Lambda\}$ . Отсюда видно, что это решение также положительно, если  $B < 0$  и  $C > B$  при условии  $C\Lambda > 0$ .

Хотя суперпозиционные решения могут быть построены для обоих классов простых решений, однако наибольший интерес представляют решения второго типа. Решения первого типа описывают эволюцию напряжения в линии без возникновения автоволнового импульса. Графики решений второго типа демонстрируют появление автоволнового импульса при достижении критического уровня напряжения в некоторой точке линии. Графики этих решений представлены на рис.2, где изображены мгновенные распреде-

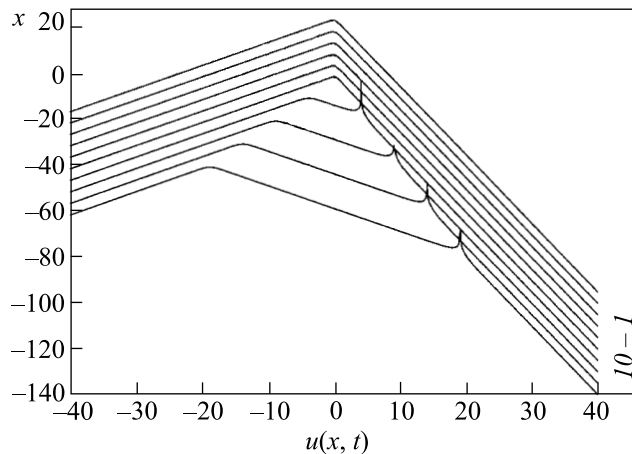


Рис.2. Распределение напряжения вдоль линии для решения (11)

ления напряжений в последовательные моменты времени от 1)  $t = -50$  до 10)  $t = 40$  с шагом  $\Delta t = 10$  для случая  $B = -1$ ,  $C = 2$ ,  $\Lambda = 1$ ,  $D = 0.1$ ,  $V = 0.5$ . Первоначально решение состоит из двух областей с почти постоянным градиентом напряжения. Затем, после формирования импульса, между точкой его генерации и текущим положением образуется новая область с почти постоянным градиентом напряжения, размер которой равен пройденному импульсом расстоянию. Особо отметим, что импульс генерируется в области с напряжением  $u$ , близким к нулю, что соответствует активной области по рассмотренной выше классификации. Затем он распространяется в область с большими отрицательными напряжениями, то есть в область с гиперболическим режимом. Динамика в этой области описывается уже телеграфным уравнением, и для ее анализа необходимо получать решение этого уравнения. Затем необходимо произвести шивку решений. Эта процедура достаточно громоздка. Поэтому здесь не рассматривается.

5. Суперпозиционные решения позволяют получить модели более сложной динамики автоволн в линии. Рассмотрим в качестве первого примера суперпозиционные решения первого типа.

Для сокращения записи введем следующие обозначения  $X = e^{\Lambda\xi}$ ,  $Y = e^{-\Lambda\eta}$ . Рассмотрим  $r$  экземпляров решений (10), которые при фиксированном значении параметра  $\Lambda$  теперь приобретут следующий вид:

$$\phi_i = -A_iXY + B_iX + C_iY, \quad i = 1, \dots, r, \quad (12)$$

где  $A_i = D\Lambda B_i C_i$ . В случае  $r = 2$  условием существования суперпозиционного решения является соотношение (7), для выполнения которого достаточно выполнения одного из следующих алгебраических условий:

$$C_1 = -C_2; \quad (13)$$

$$B_1 = -B_2. \quad (14)$$

Пусть выполнено первое из этих условий, тогда суперпозиционное решение будет иметь следующий вид:

$$\Phi = \frac{\phi_1 \phi_2}{\phi_1 + \phi_2} = \frac{[D\Lambda B_1 C_1 XY + B_1 X + C_1 Y] [-D\Lambda B_2 C_1 XY + B_2 X - C_1 Y]}{X[(B_2 - B_1)C_1 D\Lambda Y + B_1 + B_2]}. \quad (15)$$

Если выбрать второе условие, то решение будет иметь аналогичный вид с заменой  $X$  на  $Y$ , а  $Y$  на  $X$ . Рассмотрим два частных случая этой общей формулы. Первый частный случай соответствует ситуации, когда выполнены оба условия, (13) и (14). В этом случае суперпозиционное решение примет вид

$$\Phi = \frac{\phi_1 \phi_2}{\phi_1 + \phi_2} = \frac{[D\Lambda B_1 C_1 XY]^2 - [B_1 X + C_1 Y]^2}{[2B_1 C_1 D\Lambda XY]}. \quad (16)$$

Еще один вариант решения соответствует ситуации, когда  $C_1, C_2, B_1, B_2$  – комплексные постоянные. Если выбрать при этом  $C_1 = i\kappa = -C_2$  и  $B_2 = B_1^* = \alpha + i\beta$  (здесь знак \* означает комплексное сопряжение), то решение будет вещественным и примет следующий вид:

$$\Phi = \frac{[D\Lambda B_1 C_1 XY + B_1 X + C_1 Y]^2}{X[2\beta\kappa D\Lambda Y + 2\alpha]} = \frac{(-D\Lambda\beta\kappa XY + \alpha X)^2 + (D\Lambda\alpha\kappa XY + \beta X + \kappa Y)^2}{X[2\beta\kappa D\Lambda Y + 2\alpha]}. \quad (17)$$

Суперпозиционные решения рангов  $r > 2$  строятся аналогично.

Суперпозиция решений второго типа приводит к новым решениям, которые описывают более интересные режимы распространения автоволн в рассматриваемых линиях. Для этого необходимо рассмотреть  $r$  экземпляров решений типа (11):

$$\begin{aligned} \phi_i = & -DB_i C_i \Lambda \exp\{2\Lambda\xi - \Lambda\eta\} - \\ & - \frac{B_i}{4DC_i \Lambda} \exp\{2\Lambda\xi + \Lambda\eta\} + \\ & + B_i \exp\{2\Lambda\xi\} + C_i \exp\{-\Lambda\eta\}, \quad (18) \\ & i = 1, \dots, r. \end{aligned}$$

В случае  $r = 2$  для коэффициентов  $C_1, C_2$  получаем следующие соотношения:

$$C_1 = -C_2 = C.$$

При этом коэффициенты  $B_1, B_2$  произвольны. Суперпозиционные решения, соответствующие  $r = 2$ , могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \Phi = & \phi_1 \phi_2 \exp\{2\Lambda\xi\} \times \\ & \times \left\{ \left[ -DC\Lambda \exp\{-\Lambda\eta\} - \frac{1}{4DC\Lambda} \exp\{\Lambda\eta\} \right] \times \right. \\ & \left. \times (B_1 - B_2) + B_1 + B_2 \right\}^{-1}. \quad (19) \end{aligned}$$

Среди этих решений существует вещественное решение с чисто мнимым параметром  $C = ik$  и вещественными  $B_1 = B_2 = b$ .

Один из графиков, соответствующих не сингулярному решению (19), представлен на рис.3. Первоначально, в отличие от решения на рис.2, решение со-

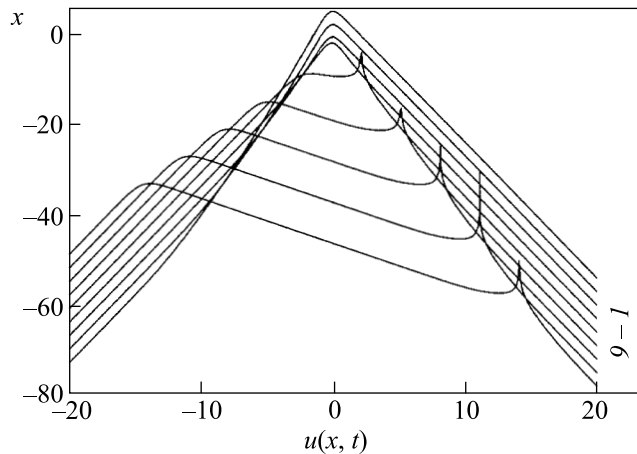


Рис.3. Распределение напряжения вдоль линии для суперпозиционного решения ранга  $r = 2$

стоит из трех областей с почти постоянным градиентом напряжения. Как и в предыдущем случае, при достижении в максимуме напряжения нулевого значения в системе генерируется импульс. На рисунке представлены мгновенные распределения в линии в последовательные моменты времени от 1)  $t = -40$  до 9)  $t = 40$  с шагом  $\Delta t = 10$  для случая  $B_1 = -3, B_2 = -4, C = 2, \Lambda = 1, D = 0.1$ .

Аналогичным способом могут быть получены суперпозиционные решения с рангами  $r = 3$  и  $r = 4$  для решений первого типа, и как минимум, ранга  $r = 3$  для решений второго типа. Для более высоких рангов система уравнений на свободные коэффициенты простых решений оказывается переопределенной. В силу нелинейности этой системы невозможно без дополнительных исследований сказать: существуют ли суперпозиционные решения с  $r > 4$  или нет.

6. Полученные точные решения дают представление о новых автоволновых явлениях, которые могут возникать в реальных системах, моделями которых являются рассматриваемые здесь активные двухпроводные линии. Как было указано выше, предлагаемая модель описывает поведение рассматриваемой линии лишь в области активного режима и не может быть отнесена ко всей линии в целом. Однако именно в этой области возможна генерация импульсов, которые затем каналируются через области, работающие в неактивном гиперболическом режиме. Генерация импульсов и их трансформация при достижении некоторых критических значений параметров в линии (здесь это глобальные максимумы напряжения) являются типичными для автоволновых систем. И при определенных условиях эти явления могут быть соотнесены с явлениями, сопровождающими функционирование биологических мембран и в том числе нервного волокна. Такие процессы можно рассматривать как элементы регуляторных механизмов в биологических системах. Действительно, импульс, генерируемый в линии, свидетельствует о том, что в некоторой точке линии напряжение достигло минимального или максимального (в зависимости от ситуации) критического значения напряжения. Движение импульса в линии сопровождается формированием новой области почти постоянного градиента напряжения, располагающейся между точкой генерации импульса и текущим его положением, то есть система “запоминает” место, где произошло рождение импульса. Возможны и более сложные явления, соответствующие решениям рангов  $r > 2$ , которые здесь не рассматриваются. В заключение отметим, что полученные решения показывают возмож-

ность технической реализации генераторов импульсов, работающих в соответствии с рассмотренной моделью. Как указывалось во введении, рассматриваемые двухпроводные линии могут быть реализованы на основе распределенных  $p$ - $n$ -переходов.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований: грант # 0001-00260.

1. Э. Скотт, *Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике*, М.: Советское радио, 1977.
2. Ю. Н. Свиржев, А. А. Гигаури, В. Н. Разжеваткин, в сб. *Нелинейные волны. Самоорганизация*, под ред. Гапонова-Грехова, М.: Наука, 1983, стр. 32.
3. А. А. Самарский, А. П. Михайлов, *Математическое моделирование*, М.: Наука, 1997.
4. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов: метод обратной задачи*, М.: Наука, 1980.
5. В. М. Журавлев, ТМФ **124**, 3 (2000).
6. В. М. Журавлев, Письма в ЖЭТФ **65**, 285 (1997).
7. В. М. Журавлев, ЖЭТФ **114**, 1897 (1998).
8. Я. А. Федотов, *Основы физики полупроводниковых приборов*, М.: Советское радио, 1964.
9. В. И. Таланов, в сб. *Нелинейные волны. Самоорганизация*, под ред. Гапонова-Грехова, М.: Наука, 1983, стр. 47.
10. M. Elsenberg, J. E. Hall, and C. F. Mead, *J. Membrane Biol.* **11**, 1 (1973).
11. H. M. Leiberstein, *Math. Biosci.* **1**, 45, 181 (1967).
12. S. W. Brady, *Proc. Japan. Acad.* **39**, 721 (1963).
13. C. D. Isaacs, *Math. Biosci.* **7**, 305 (1970).