УДК 51.71; 519.254; 520.88; 004.932.2

А. В. Журавлев, В. М. Журавлев, Г. А. Егоров

ОЦЕНИВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ СПЕКТРОВ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ НА ОСНОВЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ИЗОБРАЖЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ МНОГОМЕРНОГО МЕТОДА МАКСИМАЛЬНОЙ ЭНТРОПИИ[1]

Рассматривается применение метода многомерной авторегрессии для оценивания спектров по сериям изображений. Метод обосновывается с помошью принципа максимальной энтропии. Строится многомерное обобщение реккуретного алгоритма Левинсона для оценивания коэффициентов многомерной авторегрессии.

Введение

Одним из основных методов анализа динамики глобальных процессов в атмосфере Солнца, а также планет солнечной системы является анализ последовательности изображений, сделанных с различного рода спутников. Для исследования динамики атмосферы Земли используются снимки в различных оптических диапазонах от видимого до инфракрасного, получаемые с геостационарных спутников, например, серии GOES или METEOSAT. Для анализа процессов в атмосфере Солнца используют регулярно пополняемые наборы снимков с космического аппарата SOHO или наземных обсерваторий. В частности, одним из успешных направлений исследования волновых процессов по снимкам Солнца являются методы гелиосейсмологии, заимствованные из арсенала геофизических исследований распространения волн в Земной коре и мантии, возникающих от естественных источников – землетрясений или искуственных взрывов. Методика построения оценок спектральной плотности волновых процессов по снимкам в целом основывается на стандартных способах оценивания спектров, широко используемых на протяжении уже более ста лет в геофизике, метеорологии, океанологии и т.д. [1, 2]. Этот способ опирается на метод измерения фазовых сдвигов между элементами дискретных антенных решеток на заданной частоте [3–5]. Его применение требует синхронных измерений параметров среды в узлах антенной решетки таких, например, как сеть метеорологических станций. В случае обработки спутниковых снимков в качестве набора узлов дискретной антенной решетки можно использовать фиксированные элементы изображений, привязанные к координатам снимка, которые, в свою очередь, связаны с фиксированными географическими или гелиографическими координатами.

Однако при обработке снимков часто возникают трудности с обеспечением синхронности получения изображений объектов. Это связано с тем,

[1] Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, проект 08-01-97013-р_поволжье_а.

как организуется получение и передача изображения на Землю с борта спутника. В результате применение метода дискретных фазовых решеток к задаче оценивания спектров по нерегулярной последовательности изображений требует либо применения методов интерполяции данных в узлы регулярной сетки, либо использования других способов оценивания.

Одним из таких новых способов оценивания спектров по последовательности изображений является изменение порядка оценивания по времени и пространству в методе фазовой решетки. Обычно метод фазовой решетки основывается на такой методике [1, 2], когда на первом этапе оценивается спектральная матрица для некоторого набора частот, а затем, на втором этапе, вычисляется спектр по волновым числам на заданной частоте. Именно на первом этапе требуется синхронность измерений по времени. Поскольку точки снимка (пиксели) равномерно упорядочены в пространстве снимка, то это позволяет для последовательности снимков воспользоваться обратным порядком оценивания спектра. На первом этапе вычисляется спектр по волновым числам для выделенного набора строк изображения на последовательности снимков, а на втором – получить оценку спектральной плотности по частотам для заданной длины волны. В таком подходе узлы антенной решетки располагаются в пространстве и времени, а стандартный временной ряд обычной методики заменяется выделенной строкой изображения. Такой подход был использован при создании электронного практикума «Космофизика–2007» [6] для оценивания эпюры скоростей дифференциального вращения Солнца по долготе. Этот метод предполагает использование метода максимальной энтропии [7–10] на обоих этапах оценивания спектральной плотности: на этапе оценивания спектральной матрицы [11, 12] на этапе построения пространственно-временного спектра [2–4, 10]. Однако такой подход оказывается слишком громоздким при требовании использования одновременно всех строк изображения в качестве элементов антенной решетки. Размерность спектральной матрицы может исчисляться в этом случае тысячами элементов, что создает большие вычислительные трудности как со скоростью получения оценок, так и с проблемой округления. Последнее связано с тем, что спектральная матрица вблизи спектральных пиков вырождена. При этом требуется проводить многократно ее обращение, что приводит к потери точности за счет округления. Чтобы избежать этих трудностей, в данной работе предлагается использовать относительно новый подход – применение на стадии оценивания спектральной матрицы метода многомерной регрессии, который также обосновывается с помощью метода максимальной энтропии. В работе излагаются основы построения оценки двумерной авторегрессии с помощью обобщения метода Левинсона [11, 12] и приведено обоснование найденной оценки с помощью метода максимальной энтропии.

1 Общие принципы построения оценок спектральной плотности на основе серии изображений

Будем предполагать, что исследуемый процесс $u(x, y, t)$, наблюдения которого представлены снимками, является и по времени, и по пространственным координатам процессом стационарным в широком смысле. При работе с изображениями величина $u(x, y, t)$ представляет собой интенсивность излучения отдельных точек объекта с координатами x, y в момент времени t. Это означает, во-первых, что процесс $u(x, y, t)$ обладает следующим свойством стационарности в широком смысле:

$$< u(x, y, t) >= 0, \ < u^2(x, y, t) >= \sigma_u^2,$$
$$< u(x, y, t) u(x', y', t') >= R(x - x', y - y', t - t')$$

(здесь и далее угловые скобки означают осреднение по ансамблю), а, во-вторых, $u(x, y, t)$ в силу стационарности в широком смысле можно представить в виде Фурье-интеграла:

$$u(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A(k, l, \omega)\exp(i(kx + ly + \omega t))dkdld\omega,$$

причем Фурье-компоненты этого процесса обладают свойством

$$< A(k, l, \omega) >= 0,$$

$$< A(k, l, \omega) a^*(k', l', \omega') >= S(k, l, \omega)\delta(k - k', l - l', \omega - \omega'). \qquad (1)$$

Функция $S(k, l, \omega)$ называется пространственно-временным спектром процесса или его спектральной плотностью и связана с автоковариацией этого процесса $R(x - x', y - y', t - t')$ формулой Винера–Хинтчина:

$$R(\xi, \eta, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} S(k, l, \omega)\exp(-i(k\xi + l\eta + \omega\tau))dkdld\omega. \qquad (2)$$

Задачей спектрального анализа является построение оценки функции $S(k, l, \omega)$ по известной функции $u(x, y, t)$.

Мы будем предполагать, что изображения, на основе которых строится оценка спектральной плотности волнового процесса, приведены к единой системе координат так, что каждой точке изображения пикселю соответствует определенный набор чисел $x_i = i\Delta x$, $y_j = j\Delta y$, указывающий их декартовы координаты (x_i, y_j) относительно одинакового положения начала отсчета на всех снимках, сделанных в моменты времени t_a. Исследованию подвергаются при этом величины интенсивности каждой точки изображения, которые мы будем обозначать через u_{ij}^a, где индексы i и j соответствуют координатам точки x_i, y_j в момент времени t_a.

2 Двумерная авторегрессия

Рассмотрим вначале специальную модель процесса на одном снимке, который соответствует некоторому фиксированному моменту времени. В качестве такой модели процесса, с помощью которой мы будем в дальнейшем проводить оценивание спектральной плотности, рассмотрим двумерную модель авторегрессии – AR_2-модель, которая может быть представлена в следующей форме:

$$\sum_{i=0}^{L}\sum_{j=0}^{M} A_{ij} u_{n-i,m-j} = \varepsilon_{n,m},\ n,m=-\infty,\infty. \tag{3}$$

Величины A_{ij} будем называть коэффициентами авторегрессии, причем без ограничения общности можем полагать $A_{00}=1$. Пара целых чисел L,M будет называться составным порядком двумерной модели авторегрессии. Величины $\varepsilon_{n,m}$ представляют собой двумерный процесс белого шума:

$$<\varepsilon_{n,m}>=0,\ <\varepsilon_{n,m}^2)>=\sigma_0^2,$$
$$<\varepsilon_{n,m}\varepsilon_{n',m'}>=\delta_{nn'}\delta_{mm'}.$$

Совершая дискретное Фурье-преобразование соотношения (3), приходим к следующей формуле для Фурье-компонент $Z(k,l)$ процесса $u_{n,m}$:

$$Z(k,l)A(k,l)=\rho(k,l),$$

где k,l – нормированные волновые числа по координатам x,y: $1/2\le k$, $l\le 1/2$; Δx и Δy – величина шагов по соответствующим координатам:

$$Z(k,l)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} u_{nm}\exp\left(-2i\pi[n\Delta xk+m\Delta yl]\right)dkdl,$$
$$A(k,l)==\sum_{n=0}^{L}\sum_{m=0}^{M} A_{nm}\exp\left(-2i\pi[n\Delta xk+m\Delta yl]\right)dkdl,$$
$$\rho(k,l)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \varepsilon_{nm}\exp\left(-2i\pi[n\Delta xk+m\Delta yl]\right)dkdl. \tag{4}$$

Отсюда спектральная плотность процесса $u_{n,m}$ будет иметь следующий вид:

$$<Z(k,l)Z^*(k',l')>=\frac{<\rho(k,l)\rho^*(k',l')>}{A(k,l)A^*(k',l')}$$

или

$$S(k,l)=\frac{\sigma_0^2}{|A(k,l)|^2}. \tag{5}$$

Здесь учтено, что спектральная плотность белого шума будет постоянна во всем диапазоне волновых чисел:

$$<\rho(k,l)\rho^*(k',l')>=\sigma_0^2.$$

3 Двумерная авторегрессия и метод максимальной энтропии

Обоснование использования AR_2-модели для оценивания спектральной плотности двумерного случайного процесса может быть построено на основе метода максимальной энтропии аналогично одномерному случаю [3–5, 11]. Метод максимальной энтропии [7, 9] предлагает в качестве оптимальной оценки спектральной плотности такую функцию $S(k,l)$, которая максимизирует энтропию случайного гауссового процесса стационарного в широком смысле, имеющую вид [8]:

$$H = \int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2} \ln S(k,l)dkdl, \tag{6}$$

при условии, что известны значения ковариаций для некоторого набора сдвигов $\hat{R}_{nm} = R^0_{nm}$, $-L \le n \le L, -M \le m \le M$.

Интеграл в (6) берется по интервалу, ограниченному нормированными волновыми числами Найквиста. Используя формулу Винера–Хинтчина, аналогичную (2), дополнительные условия функционала (6) можно представить в виде

$$R^0_{nm} = \int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2} S(k,l)\exp\left(-2i\pi[n\Delta xk + m\Delta yl]\right)dkdl,\ |k| \le L,\ |l| \le M. \tag{7}$$

В этом случае задача об условной максимизации функционала энтропии H сводится к безусловному максимуму функционала:

$$\tilde{H} = \int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2} \ln S(k,l)dkdl +$$

$$+\sum_{n=-L}^{L}\sum_{m=-M}^{M}\Lambda_{nm}\left(R^0_{nm} - \int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2} S(k,l)\exp\left(-2i\pi[n\Delta xk + m\Delta yl]\right)dkdl\right).$$

Варьируя этот функционал, находим следующую оценку для спектральной плотности:

$$S(k,l) = \frac{1}{\sum_{n=-L}^{L}\sum_{m=-M}^{M}\Lambda_{nm}\exp\left(-2i\pi[n\Delta xk + m\Delta yl]\right)}. \tag{8}$$

Сравнивая (5) и (8), видим, что эти оценки при совпадении порядков авторегрессии L и M с соответствующими значениями числа известных ковариаций не отличаются друг от друга функционально. Следуя [3–5, 12], мы можем воспользоваться этим, чтобы обосновать оценку авторегрессии как наилучшую с точки зрения максимума энтропии.

4 Построение оценки коэффициентов авторегрессии

Построение оценки авторегрессии можно осуществить с помощью метода наименьших квадратов, минимизируя величину

$$\Sigma^2 = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{K}\varepsilon^2_{n,m} = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{K}\left(\sum_{i=0}^{L}\sum_{j=0}^{M}A_{ij}u_{n-i,m-j}\right)^2.$$

В результате можно получить систему линейных уравнений относительно коэффициентов A_{ij}, которая будет иметь вид блочно-теплицевой матрицы. В случае одномерной матричной авторегрессии решение для коэффициентов авторегрессии может быть найдено с помощью рекуррентного алгоритма Левинсона [3, 4, 12]. Для двумерной авторегрессии алгоритм Левинсона может быть обобщен следующим образом.

Предположим, что оптимальные коэффициенты AR_2-модели (3) определены для некоторого составного порядка модели (L,M) на основе набора данных u_{nm} на некотором k-м шаге алгоритма, $n=1,\dots,N$, $m=1,\dots,K$. Обозначим соответствующие коэффициенты авторегрессии через $A_{ij}^{[k]}$. Тогда вместе с (3) рассмотрим следующие три другие возможные перезаписи этой модели:

$$\sum_{i=0}^{L}\sum_{j=0}^{M} A_{ij}^{[k]} u_{n-1-i,m-j} = \varepsilon_{n-1,m}^{[k]},$$

$$\sum_{i=0}^{L}\sum_{j=0}^{M} A_{ij}^{[k]} u_{n-i,m-1-j} = \varepsilon_{n,m-1}^{[k]},$$

$$\sum_{i=0}^{L}\sum_{j=0}^{M} A_{ij}^{[k]} u_{n-1-i,m-1-j} = \varepsilon_{n-1,m-1}^{[k]}. \tag{9}$$

Здесь $\varepsilon_{n,m}^{[k]}$ – остаточный шум на k-м шаге алгоритма. Эти соотношения должны выполняться для $n=L+1,\dots,N$, $m=M+1,\dots,K$. Составим из соотношений (3) и (9) следующую линейную комбинацию с некоторыми коэффициентами $\rho_{\alpha\beta}^{[k+1]}$, $\alpha,\beta=0,1$, $\rho_{00}^{[k+1]}=1$:

$$\sum_{\alpha\beta=0,1} \rho_{\alpha\beta}^{[k+1]} \sum_{i=0}^{L}\sum_{j=0}^{M} A_{ij}^{[k]} u_{n-\alpha-i,m-\beta-j} = \sum_{\alpha\beta=0,1} \rho_{\alpha\beta}^{[k+1]} \varepsilon_{n-\alpha,m-\beta}^{[k]}. \tag{10}$$

Нетрудно видеть, что это соотношение с помощью замены немых индексов можно переписать в виде модели авторегрессии составного порядка $(L+1,M+1)$. Действительно, соотношение (10) можно представить в следующем виде:

$$\rho_{11}^{[k+1]} A_{LM}^{[k]} u_{n-L-1,m-M-1} + (\rho_{11}^{[k+1]} + \rho_{10}^{[k+1]}) A_{LM}^{[k]} u_{n-L-1,m-M} +$$
$$+(\rho_{11}^{[k+1]} + \rho_{01}^{[k+1]}) A_{LM}^{[k]} u_{n-L,m-M-1} +$$
$$+\sum_{i=0;\,i+j\neq 0}^{L}\sum_{j=0}^{M}\left(\sum_{\alpha\beta=0,1} \rho_{\alpha\beta}^{[k+1]} A_{i-\alpha j-\beta}^{[k]} u_{n-i,m-j}\right) + A_{00}^{[k]} u_{n,m} = \sum_{\alpha\beta=0,1} \rho_{\alpha\beta}^{[k+1]} \varepsilon_{n-\alpha,m-\beta}^{[k]}.$$

Это соотношение можно записать в следующей форме:

$$\sum_{i=0}^{L+1}\sum_{j=0}^{M+1} A_{ij}^{[k+1]} u_{n-i,m-j} = \varepsilon_{n,m}^{[k+1]},$$

где выполнены следующие условия связи:

$$A_{ij}^{[k+1]} = \sum_{\alpha\beta=0,1} \rho_{\alpha\beta}^{[k+1]} A_{i-\alpha j-\beta}^{[k]}, \quad i=0,\dots,L, \quad j=0,\dots,M,$$

$$A_{L+1M+1}^{[k+1]} = \rho_{11}^{[k+1]} A_{LM}^{[k]}, \quad A_{00}^{[k+1]} = 1,$$

$$A_{L+1M}^{[k+1]} = (\rho_{11}^{[k+1]} + \rho_{10}^{[k+1]}) A_{LM}^{[k]}, \quad A_{LM+1}^{[k+1]} = (\rho_{11}^{[k+1]} + \rho_{01}^{[k+1]}) A_{LM}^{[k]},$$

$$\varepsilon_{n,m}^{[k+1]} = \sum_{\alpha\beta=0,1} \rho_{\alpha\beta}^{[k+1]} \varepsilon_{n-\alpha,m-\beta}^{[k]}. \tag{11}$$

По аналогии с одномерным алгоритмом Левинсона [11, 12] выбор коэффициентов $\rho_{\alpha\beta}$, которые играют роль коэффициента отражения одномерного алгоритма, можно осуществить с помощью минимизации дисперсии остаточного шума $\varepsilon_{n,m}^{[k+1]}$. В этом случае имеем

$$\sum_{n=L+1}^{N} \sum_{m=M+1}^{K} \left(\varepsilon_{n,m}^{[k+1]}\right)^2 = \sum_{n=L+1}^{N} \sum_{m=M+1}^{K} \left(\sum_{\alpha\beta=0,1} \rho_{\alpha\beta} \varepsilon_{n-\alpha,m-\beta}^{[k]} \right)^2.$$

Дифференцируя по независимым параметрам $\rho_{\alpha\beta}^{[k+1]}$, исключая $\rho_{00}^{[k+1]} = 1$, находим для них следующие три уравнения:

$$\sum_{n=L+1}^{N} \sum_{m=M+1}^{K} \sum_{\alpha\beta=0,1} \rho_{\alpha\beta}^{[k+1]} \varepsilon_{n-\alpha,m-\beta}^{[k]} \varepsilon_{n-\alpha',m-\beta'}^{[k]} = 0, \quad \alpha',\beta' = 0,1, \quad \alpha'+\beta' \neq 0,$$

или

$$\sum_{\alpha,\beta=0,1;\alpha+\beta\neq 0} \rho_{\alpha\beta}^{[k+1]} W_{\alpha\beta\alpha'\beta'}^{[k]} = -W_{00\alpha'\beta'}^{[k]}, \quad \alpha',\beta' = 0,1, \quad \alpha'+\beta' \neq 0. \tag{12}$$

Здесь

$$W_{\alpha\beta\alpha'\beta'}^{[k]} = \sum_{n=L+1}^{N} \sum_{m=M+1}^{K} \varepsilon_{n-\alpha,m-\beta}^{[k]} \varepsilon_{n-\alpha',m-\beta'}^{[k]}. \tag{13}$$

Таким образом, мы построили рекуррентный алгоритм вычисления параметров двумерной авторегрессии. В качестве начального условия для запуска данного алгоритма достаточно выбрать, как и в одномерном случае, модель нулевого составного порядка $(0,0)$:

$$u_{mn} = \varepsilon_{mn}^{[0]}. \tag{14}$$

В результате приходим к следующей схеме вычислений:

Шаг 0. Вычисляем коэффициенты отражения $\rho_{\alpha\beta}^{[1]}$ для остаточного шума, определяемого соотношением (14), разрешая линейную систему алгебраических уравнений (12) с матрицей (13).

Шаг 1. С помощью коэффициентов $\rho^{[1]}_{\alpha\beta}$ вычисляем коэффициенты авторегрессии $A^{[1]}_{ij}$ и остаточный шум $\varepsilon^{[1]}_{n,m}$, используя формулы (11):

$$A^{[1]}_{11} = \rho^{[1]}_{11} A^{[1]}_{00} = \rho^{[1]}_{11},$$

$$A^{[1]}_{01} = (\rho^{[1]}_{11} + \rho^{[1]}_{01}) A^{[1]}_{00} = \rho^{[1]}_{11} + \rho^{[1]}_{01},$$

$$A^{[1]}_{10} = (\rho^{[1]}_{11} + \rho^{[1]}_{10}) A^{[1]}_{00} = \rho^{[1]}_{11} + \rho^{[1]}_{10},$$

$$\varepsilon^{[1]}_{nm} = \varepsilon^{[0]}_{nm} + \rho^{[1]}_{11}\varepsilon^{[0]}_{n-1m-1} + \rho^{[1]}_{01}\varepsilon^{[0]}_{nm-1} + \rho^{[1]}_{10}\varepsilon^{[0]}_{n-1m}, \quad n = 2, \ldots, N, \ m = 2, \ldots, K. \quad (15)$$

Вычисляем коэффициенты отражения $\rho^{[2]}_{\alpha\beta}$ для нового остаточного шума, разрешая линейную систему алгебраических уравнений (12) с матрицей (13) .

Шаг k. Производится аналогично по выведенным формулам.

5 Построение оценки пространственно-временного спектра

Рассмотрим теперь последовательность изображений объекта, представленную в форме последовательности набора данных $u_{nm} = (u^a_{nm})$, как это было определено выше. Индекс $a = 1, \ldots, P$ нумерует изображения, полученные в моменты времени $t = t_1, t_2, \ldots, t_P$. Для построения оценки воспользуемся методом максимальной энтропии. Для рассматриваемого случая спектральные свойства процесса максимально полно содержатся в спектральной матрице $\hat{S}(k,l)$ с компонентами $S^{ab}(k,l)$, $a, b = 1, \ldots, P$, которая по определению связана с Фурье-компонентами отдельных изображений $A^a(k,l)$ соотношениями:

$$< A^a(k,l) A^{b*}(k',l') >= S^{ab}(k,l)\delta(k-k', l-l').$$

Согласно [8], энтропия такого гауссова процесса равна

$$H = \iint \ln\det \hat{S}(k,l) dkdl. \quad (16)$$

С точки зрения метода максимальной энтропии необходимо найти максимум этого функционала при заданных значениях матрицы ковариаций $R^{ab}(\xi,\eta)$:

$$R^{ab}(\xi,\eta) = \iint S^{ab}(k,l) \exp\{-i(k\xi + l\eta)\} dkdl.$$

Решением этой задачи является оценка, функционально совпадающая с оценкой по методу авторегрессии для векторного процесса $u^a(x,y)$. В дискретном варианте это означает, что оптимальной оценкой является оценка на основе модели следующего вида:

$$\sum_{b=1}^{P}\sum_{i=0}^{L}\sum_{j=0}^{M} A^{ab}_{ij} u^b_{n-i,m-j} = \varepsilon^a_{n,m}, \quad n, m = -\infty, \infty. \quad (17)$$

Нетрудно видеть, что все соотношения для построения оценки коэффициентов матричной двумерной авторегрессии повторяются в соответствии с приведенными формулами для скалярной двумерной авторегрессии, но с заменой соответствующих коэффициентов авторегрессии A_{nm}, коэффициентов отражения $\rho_{\alpha\beta}$, дисперсии шума σ^2 на соответствующие им матрицы:

$$A_{nm} = (A_{nm}^{ab}),\ R_{\alpha\beta} = (\rho_{nm}^{ab}),\ D^2 = (\Sigma_{nm}^{ab}),\ e_{nm} = (\varepsilon_{nm}^{a}).$$

Мы приведем их без вывода. В векторно-матричном виде соотношения (11) примут следующий вид:

$$A_{ij}^{[k+1]} = \sum_{\alpha\beta=0,1} R_{\alpha\beta}^{[k+1]} A_{i-\alpha j-\beta}^{[k]},\ \ i = 0,\dots,L,\ \ j = 0,\dots,M,$$

$$A_{L+1M+1}^{[k+1]} = R_{11}^{[k+1]} A_{LM}^{[k]},\ \ A_{00}^{[k+1]} = 1,$$

$$A_{L+1M}^{[k+1]} = (R_{11}^{[k+1]} + R_{10}^{[k+1]}) A_{LM}^{[k]},\ \ A_{LM+1}^{[k+1]} = (R_{11}^{[k+1]} + R_{01}^{[k+1]}) A_{LM}^{[k]},$$

$$e_{n,m}^{[k+1]} = \sum_{\alpha\beta=0,1} R_{\alpha\beta}^{[k+1]} e_{n-\alpha,m-\beta}^{[k]}. \tag{18}$$

Уравнения для коэффициентов отражения в матричной записи будут такими:

$$\sum_{\alpha,\beta=0,1;\alpha+\beta\neq 0} R_{\alpha\beta}^{[k+1]} W_{\alpha\beta\alpha'\beta'}^{[k]} = -W_{00\alpha'\beta'}^{[k]},\ \ \alpha',\beta' = 0,1,\ \ \alpha'+\beta' \neq 0, \tag{19}$$

здесь

$$W_{\alpha\beta\alpha'\beta'}^{[k]} = \sum_{n=L+1}^{N} \sum_{m=M+1}^{K} e_{n-\alpha,m-\beta}^{[k]} \otimes e_{n-\alpha',m-\beta'}^{[k]}. \tag{20}$$

Здесь знак $\otimes$ означает тензорное произведение векторов (столбец слева на строку справа).

6 Обоснование оценки пространственно-временного спектра с помощью метода максимальной энтропии

Для построения оценки пространственно-временного спектра воспользуемся подходом, предложенным в [3–5]. Как указывалось выше, энтропия нормально-распределенного стационарного в широком смысле пространственно-временного процесса может быть представлена в виде интеграла:

$$H_s = \iiint \ln S(k,l,\omega)\, dk\, dl\, d\omega,$$

где $S(k,l,\omega)$ – пространственно-временной спектр, определенный в соотношении (1). В соответствии с (2), можно показать, что вариация этого функционала при условии известных значений спектральной матрицы на антенной решетке совпадает с вариацией функционала (16). Действительно, имеем

$$\delta H_s = \iiint S^{-1}(k,l,\omega)\delta S(k,l,\omega)dkdld\omega. \qquad (21)$$

Рассмотрим вариацию (16) :

$$\delta H = \iint Tr\left(S^{-1}(k,l)\delta S(k,l)\right)dkdl = \iint \sum_{a,b=1}^{P}\left(S^{-1}(k,l)\right)^{ab}\delta S^{ab}(k,l)dkdl. \qquad (22)$$

Используя связь

$$S^{ab}(kl) = \int e^{i(\omega t_a)}e^{-i(\omega t_b)}S(k,l,\omega)d\omega,$$

соотношение (22) можно переписать в виде

$$\delta H = \iint \sum_{a,b=1}^{P}\left(S^{-1}(k,l)\right)^{ab}\delta\int e^{i(\omega t_a)}e^{-i(\omega t_b)}S(k,l,\omega)d\omega dkdl =$$

$$= \iiint\left[\sum_{a,b=1}^{P}\left(S^{-1}(k,l)\right)^{ab}e^{i(\omega t_a)}e^{-i(\omega t_b)}\right]\delta S(k,l,\omega)d\omega dkdl =$$

$$= \iiint[S(k,l\omega)]^{-1}\delta S(k,l,\omega)d\omega dkdl.$$

Здесь $\left(S^{-1}(k,l)\right)^{ab}$ – элементы матрицы, обратной спектральной матрице. Вариации функционалов H_s и H должны совпадать, что соответствует отличию этих функционалов на некоторую постоянную величину. Сравнивая (21) с последним соотношением для оценки пространственно-временного спектра, находим

$$S(k,l,\omega)^{-1} = \left[\sum_{a,b=1}^{P}(S^{-1}(k,l))^{ab}e^{i(\omega t_a)}e^{-i(\omega t_b)}\right],$$

или

$$S(k,l,\omega) = \left[\sum_{a,b=1}^{P}(S^{-1}(k,l))^{ab}e^{i\omega(t_a - t_b)}\right]^{-1}. \qquad (23)$$

В теории оценок спектра на антенной решетке это выражение обычно называют оценкой максимального правдоподобия [1, 2]. По аналогии с [3, 4] здесь мы показали, что она совпадает с оценкой по методу максимальной энтропии. Таким образом, соотношение (23) есть искомая оценка пространственно-временного спектра для последовательности изображений.

Заключение

Построенный в работе эффективный рекуррентный алгоритм вычисления коэффициентов двумерной авторегрессии может быть применен к обработке двумерных изображений. Матричное обобщение данного алгоритма может быть использовано в задаче оценивания пространственно-временных спектров по последовательности изображений. Как было показано, метод оценивания спектральной плотности на основе двумерной авторегрессии имеет обоснование с точки зрения метода максимальной энтропии на обоих этапах построения оценок. Это достаточно надежно выделяет сигналы и регулярные составляющие волновых процессов в задачах с достаточно высоким уровнем шума, которые возникают при анализе спутниковых изображений Солнца и Земли, а также в других астрофизических и геофизических задачах.

Список литературы

1. **Кейпон, Д.** Пространсвенно-временной спектральный анализ с высоким разрешением / Д. Кейпон // ТИИЭР. – 1969. – Т. 51. – С. 69–79.
2. **Джонсон, Д. Х.** Применение методов спектрального анализа к задаче определения угловых координат источников излучений / Д. Х. Джонсон // ТИИЭР. – 1982. – Т. 70. – № 9. – С. 126–139.
3. **Маклеллан, Дж. Х.** Многомерный спектральный анализ / Дж. Х. Маклеллан // ТИИЭР. – 1982. – Т. 70. – № 9. – С. 139–151.
4. **Дворянинов, Г. С.** Метод максимальной энтропии в многомерном спектральном анализе временных рядов / Г. С. Дворянинов, В. М. Журавлев, А. В. Прусов // Морской гидрофизический журнал. – 1987. – № 3. – С. 41–48.
5. **Дворянинов, Г. С.** Методы максимальной энтропии и комплексных нормальных мод для многомерного и пространственно-временного спектрального анализа / Г. С. Дворянинов, В. М. Журавлев, Е. М. Лемешко, А. В. Прусов // Моделирование гидрофизических процессов и полей в замкнутых водоемах и морях / под ред. А. С. Саркисяна. – М. : Наука, 1987. – С. 213–228.
6. Электронный практикум «Космофизика–2007» / под ред. В. М. Журавлева. – Ульяновск : Ульяновский государственный университет, 2007.
7. **Burg, J. P.** Maximum entropy spectral analysis / J. P. Burg // In proc. 37-th Meet. Society of Exploration Geophysisists. – Oklahoma city, 1967, Oct. 31.
8. **Стратанович, Р. Л.** Теория информации / Р. Л. Стратанович. – М. : Сов. радио, 1975. – 424 с.
9. **Фриден, Б. Р.** Оценки, энтропия, правдоподобие / Б. Р. Фриден // ТИИЭР. – 1985. – Т. 73. – № 12. – С. 78.
10. **Джеймс, Э. Т.** О логическом обосновании методов максимальной энтропии / Э. Т. Джеймс // ТИИЭР. – 1982. – Т. 70. – № 9. – С. 33–51.
11. **Марпл (мл.), С. Л.** Цифровой спектральный анализ и его приложения / С. Л. Марпл (мл.). – М. : Мир, 1990.
12. **Бендат, Дж.** Применения корреляционного и спектрального анализа / Дж. Бендат, А. Пирсол. – М. : Мир, 1983.