ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 183, № 1
апрель, 2015

 В. М. Журавлев*

ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФУЗИИ

Излагается метод построения точных решений уравнений нелинейной диффузии в одномерном координатном пространстве на основе использования специального принципа суперпозиции. В качестве уравнения нелинейной диффузии рассматриваются уравнения вида $n_t-(\ln n)_{xx}+\mu n+\gamma n^2-g=0$, играющие важную роль в задаче о формировании регулярных структур в нелинейных средах под действием внешних источников излучения. Метод основан на использовании дифференциальных свойств полиномов от функциональных параметров. Приводятся конкретные решения и анализируются некоторые их общие свойства.

Ключевые слова: уравнения нелинейной диффузии, точные решения, принцип суперпозиции, регулярные структуры.

DOI: 10.4213/tmf8781

1. ВВЕДЕНИЕ

Формирование регулярных структур в различных веществах под действием внешних потоков излучения является одной из актуальных задач современной теории конденсированных сред. Один из способов объяснения возникающих регулярных структур опирается на предположение, что основную роль в их формировании играет нелинейная диффузия, т. е. зависимость коэффициента диффузии от концентрации диффундирующей примеси. В данном подходе функциональная зависимость коэффициента диффузии предполагается такой, что увеличение концентрации дефектов уменьшает скорость их диффузии. Это и приводит к формированию больших концентраций примеси. Такого рода модели исследовались ранее в связи с задачами распространения тепла в средах с нелинейными коэффициентами теплопроводности [1], [2].

Для появления регулярных структур в этом случае необходимо также наличие каких-либо законов сохранения или симметрий в среде. С математической точки

*Научно-исследовательский технологический институт им. С. П. Капицы, Ульяновский государственный университет, Ульяновск, Россия. E-mail: zhvictorm@gmail.com

зрения особыми свойствами обладает коэффициент диффузии вида

$$D = \frac{\mathcal{D}_0}{n + n_{\mathrm{s}}}, \tag{1}$$

где $\mathcal{D}_0$ и n_{s} – некоторые функции времени, n – концентрация изучаемых дефектов, изменяющаяся в пространстве и времени. Этот коэффициент диффузии отвечает требованию уменьшения скорости диффузии при увеличении концентрации, с другой стороны, уравнения диффузии с таким коэффициентом обладают специфическими симметрийными свойствами. Уравнения теплопроводности или диффузии с таким коэффициентом диффузии исследовались, например, в работах [3]–[5]. В этих работах было показано, что существуют обширный класс точных решений и специфический нелинейный принцип суперпозиции [5]–[7]. Поэтому при построении моделей процессов, приводящих к образованию регулярных структур в твердых телах, модели с коэффициентом диффузии (1) могут представлять особый интерес.

В работах [3]–[5] исследования проводились для уравнений диффузии или теплопроводности с коэффициентом (1) в двумерном координатном пространстве. Однако для ряда прикладных задач необходимо построение точных решений такого типа уравнений в одномерном и трехмерном координатных пространствах. В связи с этим в настоящей работе рассматривается задача нахождения точных решений уравнений нелинейной диффузии с коэффициентом (1) в случае одномерного координатного пространства, но с нелинейным источником в правой части в форме квадратичной функции концентрации. По аналогии с работой [5] для построения точных решений применяется нелинейный принцип суперпозиции в расширенной по сравнению со статьей [5] форме. Это позволяет применить метод и в случае изменяющихся со временем коэффициентов нелинейного источника.

2. УРАВНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФУЗИИ

Используя коэффициент диффузии (1), рассмотрим одномерное уравнение нелинейной диффузии в следующем виде:

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathcal{D}_0}{n_0 + n_{\mathrm{s}}}\frac{\partial n_0}{\partial x}\right) - p(t)n_0 - r(t)n_0^2 + I(t). \tag{2}$$

Здесь $n_0(x,t)$ – концентрация диффундирующей примеси или дефектов, t – время, x – координата, вдоль которой происходит диффузия. Источник в правой части этого уравнения описывает процессы возникновения и поглощения примеси или дефектов в зависимости от их локальной концентрации. Квадратичное по n_0 слагаемое в этом источнике обычно связывают с саморекомбинацией дефектов или примеси, а слагаемое с первой степенью n_0 отвечает за “диссипацию” за счет, например, самораспада или ухода за границы среды. Коэффициенты $p(t)$ и $r(t)$ этого уравнения будем в общем случае полагать функциями времени t. Функция $I(t)$ в правой части описывает внешний источник примеси или дефектов, например, за счет равномерного облучения среды. Такой тип источника является общим для многих задач формирования волн и структур в нелинейных средах с диффузией.

Вводя функцию $n = n_0 + n_{\rm s}$ и полагая $n_{\rm s} = n_{\rm s}(t)$, преобразуем уравнение (2) к виду

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathcal{D}_0}{n}\frac{\partial n}{\partial x}\right) - \mu(t)n - \gamma(t)n^2 + g(t). \tag{3}$$

Здесь

$$\mu(t) = p(t) - 2\gamma(t)n_{\rm s}, \qquad g(t) = I(t) + \dot{n}_{\rm s} + p(t)n_{\rm s} - \gamma(t)n_{\rm s}^2, \qquad \gamma(t) = r(t).$$

На первом этапе построения простых точных решений мы ограничимся случаем $g = 0$. Это ограничение связано с тем, что при этом условии существуют простейшие решения. На основе этих решений в настоящей работе построены более сложные суперпозиционные решения, с помощью которых рассмотрен вопрос о существовании решений с $g(t) \neq 0$ в правой части.

3. ПРОСТЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ПРИ $g = 0$

Наличие простых решений для уравнения нелинейной диффузии в двумерном координатном пространстве было показано в работе [5]. Однако в отличие от работы [5] здесь мы рассмотрим одномерный вариант уравнения нелинейной диффузии, но с более сложным нелинейным источником, содержащим квадратичную нелинейность с переменными во времени коэффициентами.

По аналогии с работой [5] введем вспомогательную функцию $\Phi = 1/n$, в результате чего уравнение (3) запишется как

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\Phi} + \mathcal{D}_0\frac{\partial^2 \ln\Phi}{\partial x^2} + \frac{\mu(t)}{\Phi} + \frac{\gamma(t)}{\Phi^2} = 0. \tag{4}$$

Его можно привести к виду

$$-\Phi_t + \mathcal{D}_0\big(\Phi\Phi_{xx} - (\Phi_x)^2\big) + \mu\Phi + \gamma = 0. \tag{5}$$

Будем искать решение этого уравнения в виде

$$\Phi = A(t) + B(t)e^{kx} + C(t)e^{-kx}, \tag{6}$$

где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ – функции времени, для которых необходимо получить уравнения и решить их, а k – произвольный, вообще говоря, комплексный, параметр. Подставляя (6) в (5), находим уравнения для функций A, B, C:

$$\begin{aligned}\dot{A} &= 4k^2\mathcal{D}_0BC + \mu(t)A + \gamma(t),\\ \dot{B} &= 4k^2\mathcal{D}_0AB + \mu(t)B,\\ \dot{C} &= 4k^2\mathcal{D}_0AC + \mu(t)C.\end{aligned} \tag{7}$$

Введем обозначение $\dot{\chi} = 4k^2\mathcal{D}_0A + \mu$. Тогда уравнение для χ можно записать в такой форме:

$$\ddot{\chi} = 16k^4\mathcal{D}_0^2B_0C_0e^{2\chi} + \big(\dot{\chi} - \mu(t)\big)\mu(t) + \gamma(t)4k^2D_1 + \dot{\mu}.$$

Решения уравнений для A, B и C имеют вид

$$A = \frac{1}{4k^2\mathcal{D}_0}\big(\dot\chi - \mu(t)\big), \qquad B = B_0 e^{\chi}, \qquad C = C_0 e^{\chi}.$$

Сделаем преобразование $\chi(t) = \Theta(t) + (1/2)\ln|B_0 C_0|$. Тогда для функции Θ уравнение примет вид

$$\ddot\Theta = 16k^4\mathcal{D}_0^2 \varepsilon e^{2\Theta} + \big(\dot\Theta - \mu\big)\mu + \gamma 4k^2\mathcal{D}_0 + \dot\mu, \tag{8}$$

где $\varepsilon = \operatorname{sgn}(B_0 C_0)$; тогда можно записать

$$A = \frac{1}{4k^2\mathcal{D}_0}(\dot\Theta - \mu), \qquad B = \varepsilon_1 Q_0 e^{\Theta}, \qquad C = \varepsilon_2 \frac{1}{Q_0} e^{\Theta}, \tag{9}$$

где

$$Q_0 = \sqrt{\frac{|B_0|}{|C_0|}}, \qquad \varepsilon_1 = \operatorname{sgn} B_0, \qquad \varepsilon_2 = \operatorname{sgn} C_0.$$

Кроме решений вида (6), существуют и решения $\Phi(x,t)$, квадратичные по координате x. Эти решения можно представить в виде

$$\Phi(x,t) = A_1(t) + B_1(t)x + C_1(t)x^2.$$

Уравнения для коэффициентов A_1, B_1, C_1 в этом случае записываются как

$$\begin{aligned} \dot A_1 &= 2\mathcal{D}_0 C_1 A_1 + \mu(t)A - \mathcal{D}_0 B_1^2 + \gamma(t), \\ \dot B_1 &= \big(-2\mathcal{D}_0 C_1 + \mu(t)\big)B_1, \\ \dot C_1 &= \big(-2\mathcal{D}_0 C_1 + \mu(t)\big)C_1. \end{aligned} \tag{10}$$

Решение двух последних уравнений таково:

$$B_1 = \frac{B_0}{\chi(t)} \exp\bigg\{\int \mu(t)\,dt\bigg\}, \qquad C_1 = \frac{1}{2\mathcal{D}_0}\frac{d\ln\chi(t)}{dt},$$

где

$$\chi(t) = \chi_1 \int^t \exp\bigg\{\int^{t'} \mu(t'')\,dt''\bigg\}\,dt' + \chi_0, \tag{11}$$

а χ_0, χ_1 – постоянные интегрирования. Линейное уравнение относительно $A(t)$ решается при этом без труда.

Таким образом, уравнения (4) и (5) имеют точные решения

$$\Phi = \frac{1}{4k^2\mathcal{D}_0}\big(\dot\Theta - \mu(t)\big) + A_0 e^{\Theta + kx} + \varepsilon \frac{1}{A_0} e^{\Theta - kx}, \tag{12}$$

$$\Phi = A_1(t) + B_1(t)x + C_1(t)x^2, \tag{13}$$

где k, $\mathcal{D}_0$ – произвольные постоянные, $\varepsilon = \{\pm 1, 0\}$, $A_0 = \varepsilon_1 Q_0$, при условии, что $\Theta(t)$ является решением уравнения (8), а функции A_1, B_1, C_1 – решения уравнений (10).

Соответствующие решения уравнения (2) имеют вид

$$n = \frac{4k^2\mathcal{D}_0}{(\dot\Theta - \mu(t)) + \varepsilon_1 4k^2\mathcal{D}_0 e^{\Theta(t)}\big(e^{k(x-x_0)} + \varepsilon e^{-k(x-x_0)}\big)},$$

где $x_0 = -\ln|A_0|$, и

$$n = \frac{1}{A_1(t) + B_1(t)x + C_1(t)x^2};$$

при вещественных значениях k функция n удовлетворяет граничному условию $n \to 0$ при $|x| \to \infty$. В случае чисто мнимых значений $k = iq$ и условии $C_0 = B_0^*$ решения для Φ и n будут вещественными периодическими решениями по x:

$$\Phi = -\frac{1}{4q^2\mathcal{D}_0}\big(\dot\Theta - \mu\big) + |B_0|e^{\Theta}\cos(qx + \varphi),$$

$$n = \frac{4q^2\mathcal{D}_0}{(\mu(t) - \dot\Theta) + 4q^2\mathcal{D}_0|B_0|e^{\Theta}\cos(qx + \varphi)},$$

где $\varphi = \arg B_0$.

Отметим, что в случае $C_0 = 0$ (или $B_0 = 0$) последнее уравнение становится линейным

$$\ddot\Theta = \big(\dot\Theta - \mu(t)\big)\mu(t) + \gamma(t)4k^2\mathcal{D}_0 + \dot\mu.$$

В этом случае решение для Φ будет иметь такой вид:

$$\Phi = \frac{1}{4k^2\mathcal{D}_0}(\dot\Theta - \mu) + B_0 e^{\Theta + kx}. \tag{14}$$

Для полиномиальных решений имеются две аналогичные редукции. При $\chi_1 = 0$ в (11) имеем $C_1(t) \equiv 0$, и соответствующим образом упрощаются уравнения для $A_1(t)$, $B_1(t)$. При этом

$$\Phi = A_1(t) + B_0 e^{\Omega(t)}x, \qquad \Omega(t) = \int_0^t \mu(t')\,dt'. \tag{15}$$

При $B_0 = 0$ имеем $B(t) \equiv 0$ и $\Phi = A_1(t) + C_1(t)x^2$.

4. НЕЛИНЕЙНЫЙ ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ

Для построения более общих решений уравнения (5) и уравнения (4) с $g = 0$ воспользуемся методом, предложенным в работе [5], который опирается на свойство уравнения нелинейной диффузии – специальный принцип суперпозиции.

Для формулировки принципа суперпозиции введем некоторые обозначения. Обозначим через z_k, $k = 1, \ldots, N$, корни полинома

$$U_N(z) = z^N + \sum_{k=0}^{N-1} p_k z^k = \prod_{j=1}^{N}(z - z_j).$$

Для сокращения записи также введем обозначение $\mathbf{z} = \{z_1, z_2, \ldots, z_N\}$. Согласно теореме Виета коэффициенты p_k полинома $U_N(z)$ являются функциями его корней, это мы будем записывать как $p_k = (-1)^{N-k} P_k(\mathbf{z})$, где

$$P_0(\mathbf{z}) = \prod_{j=1}^{N} z_j, \qquad P_1(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^{N} \prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant N,\\ j\neq i}} z_j, \quad \ldots \quad, \quad P_{N-1}(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^{N} z_i, \qquad P_N = 1.$$

Обратим внимание на существование тождеств

$$P_k(z-z_1,\ldots,z-z_N) = \frac{1}{k!}\frac{\partial^k}{\partial z^k} P_0(z-z_1,\ldots,z-z_N),$$
$$p_k = P_k(z-z_1,\ldots,z-z_N)\big|_{z=0}, \qquad k=1,\ldots,N-1.$$

Рассмотрим совокупности решений (14) и (15)

$$\Phi_i = \frac{1}{4k^2\mathcal{D}_0}(\dot\Theta - \mu) + B_i e^{\Theta+kx}, \tag{16}$$
$$\Phi_i = A(t) + B_i x e^{\Omega(t)}, \qquad i=1,\ldots,N, \tag{17}$$

отличающихся лишь числовыми значениями параметров B_i. Для унификации вычислений функция $A_1(t)$ в решениях типа (15) обозначена как $A(t)$. Введем обозначения для решений (16)

$$Z(x,t) = A(t)e^{-\Theta}e^{-kx}, \qquad z_i = -B_i$$

и обозначения для решений (17)

$$Z(x,t) = \frac{A(t)}{x}\, e^{-\Omega}, \qquad z_i = -B_i.$$

Тогда в обоих случаях

$$\Phi_i = \frac{A}{Z}(Z - z_i), \qquad i=1,\ldots,N.$$

Для сокращения записи положим $\mathbf{Z} = \{Z - z_1,\ldots,Z-z_N\}$. Тогда имеют место следующие тождества:

$$P_j(\Phi_1,\ldots,\Phi_N) = \left(\frac{A}{Z}\right)^{N-j} P_j(\mathbf{Z}), \tag{18}$$
$$P_j(\Phi_1,\ldots,\Phi_N) = \left(\frac{A}{Z}\right)^{N-j} \frac{1}{j!}\frac{\partial^j}{\partial Z^j} P_0(\mathbf{Z}), \qquad j=0,\ldots,N-1. \tag{19}$$

Производные по x и $Z(x,t)$ для любой функции $F(Z)$ связаны следующими простыми соотношениями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}F(Z) &= \frac{\partial Z}{\partial x}\frac{\partial}{\partial Z}F(Z) = -kZ\frac{\partial}{\partial Z}F(Z),\\ \frac{\partial}{\partial x}F(Z) &= \frac{\partial Z}{\partial x}\frac{\partial}{\partial Z}F(Z) = -\frac{Z^2}{A}\frac{\partial}{\partial Z}F(Z). \end{aligned} \tag{20}$$

Поскольку дальнейшие построения аналогичны как для решений (16), так и для решений (17), будем проводить вычисления только для случая (16). Решения типа (17) могут быть использованы аналогичным образом.

Используя соотношения для полиномов $P_k(\mathbf{Z})$, можно записать равенства

$$
\begin{aligned}
u_N &= \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\Phi_k} = \frac{P_1(\Phi_1(x,t),\dots,\Phi_N(x,t))}{P_0(\Phi_1(x,t),\dots,\Phi_N(x,t))} = \frac{Z}{A}\frac{P_1(\mathbf{Z})}{P_0(\mathbf{Z})} = \\
&= \frac{Z}{A}\frac{\partial}{\partial Z}\ln P_0(\mathbf{Z}) = -\frac{1}{Ak}\frac{\partial}{\partial x}\ln P_0(\mathbf{Z}), \\
\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\Phi_i^2} &= \frac{P_1^2(\Phi_1,\dots,\Phi_N)}{P_0^2(\Phi_1,\dots,\Phi_N)} - 2\frac{P_2(\Phi_1,\dots,\Phi_N)}{P_0(\Phi_1,\dots,\Phi_N)} = \\
&= -\frac{Z^2}{A^2}\frac{\partial^2 \ln P_0(\mathbf{Z})}{\partial Z^2} = -\frac{1}{A}\left(Z\frac{\partial u_N}{\partial Z} - u_N\right) = \frac{1}{Ak}\frac{\partial u_N}{\partial x} + \frac{1}{A}u_N.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Утверждение 1. *Пусть $\Phi_i(x,t)$, $i = 1,\dots,N$, – совокупность точных решений уравнения (5) вида (16). Тогда функция u_N, определенная соотношениями (21), при произвольных функциях $\mathcal{D}_0(t)$, $\mu(t)$ и $\gamma(t)$, а также при произвольных значениях параметров $z_i = -B_i$, k и произвольном N удовлетворяет уравнению первого порядка*

$$
\frac{\partial u_N}{\partial t} - \left(kA\mathcal{D}_0 - \frac{\gamma}{Ak}\right)\frac{\partial u_N}{\partial x} + \left(\mu + \frac{\gamma}{A}\right)u_N = 0, \tag{22}
$$

где функция $A(t)$ определена соотношением (9).

Доказательство. Пусть Φ_i – совокупность решений (16), т. е. выполнены тождества

$$
\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{\Phi_i} + \mathcal{D}_0\frac{\partial^2 \ln \Phi_i}{\partial x^2} + \frac{\mu(t)}{\Phi_i} + \frac{\gamma(t)}{\Phi_i^2} = 0, \qquad i = 1,\dots,N.
$$

Суммируя все эти тождества, получаем, что

$$
\frac{\partial}{\partial t}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\Phi_i} + \mathcal{D}_0\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\prod_{i=1}^{N}\Phi_i + \mu(t)\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\Phi_i} + \gamma(t)\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\Phi_i^2} = 0.
$$

Используя определение функции u_N из (21), последнее уравнение приводим к следующему виду:

$$
\frac{\partial u_N}{\partial t} + \mathcal{D}_0\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln P_0(\Phi_1,\dots,\Phi_N) + \mu(t)u_N + \gamma(t)\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\Phi_i^2} = 0. \tag{23}
$$

Воспользуемся теперь равенствами (20) и вторым тождеством из (21). Тогда уравнение (23) можно записать как

$$
\frac{\partial u_N}{\partial t} + \mathcal{D}_0 k^2 AZ\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{Z}{A}\frac{\partial}{\partial Z}\ln P_0(\mathbf{Z})\right) + \mu(t)u_N + \frac{\gamma(t)}{A}\left(\frac{1}{k}\frac{\partial u_N}{\partial x} + u_N\right) = 0.
$$

Возвращаясь теперь к производным по x с помощью (20), приходим окончательно к уравнению (22). Утверждение доказано.

Доказанное утверждение указывает на то, что решения самóго исходного уравнения (4), имеющие вид суперпозиционного решения Φ_{s}, можно построить, если специальным образом вычислять числа B_i.

5. ОБОБЩЕННЫЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

Исследуем теперь вопрос о выводе уравнений, которым удовлетворяют суперпозиции решений (12) общего вида. Пусть Φ_i – совокупность решений вида (12), которые мы запишем как

$$\Psi_i(x,t) = B(t)\bigl(T(t)+\tau_i(x)\bigr), \qquad i=1,\dots,N. \tag{24}$$

Здесь

$$\begin{gathered} B(t)=e^{\Theta(t)}, \qquad T(t)=\frac{1}{4\mathcal{D}_0 k^2}\bigl(\dot\Theta-\mu\bigr)e^{-\Theta}, \\ \tau_i(x)=B_i e^{-kx}+\varepsilon_i\frac{1}{B_i}e^{kx}, \qquad \varepsilon_i=\pm1. \end{gathered} \tag{25}$$

Аналогичным образом можно исследовать и полиномиальные решения общего вида (13). Однако мы найдем только решения (12). Из определений (25) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial t}F(T)=\frac{\partial T}{\partial t}\frac{\partial}{\partial T}F(T)=\dot T\frac{\partial}{\partial T}F(T).$$

Для полиномов по T выполняются свойства, аналогичные (18) и (19):

$$\begin{aligned} &P_j(\Psi_1,\dots,\Psi_N)=B^{N-j}(t)P_j(\mathbf{T}), \\ &P_j(\Psi_1,\dots,\Psi_N)=B^{N-j}\frac{1}{j!}\,\frac{\partial^j}{\partial T^j}P_0(\mathbf{T}), \qquad j=0,\dots,N-1, \end{aligned}$$

где введено обозначение $\mathbf{T}=\{T-\tau_1,\dots,T-\tau_N\}$.

По аналогии с предыдущим анализом рассмотрим систему тождеств

$$\begin{aligned} v_N &= \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\Psi_i}=\frac{P_1(\Psi_1,\dots,\Psi_N)}{P_0(\Psi_1,\dots,\Psi_N)}= \\ &= \frac{1}{B}\frac{\partial\ln P_0(\mathbf{T})}{\partial T}=\frac{1}{B\dot T}\frac{\partial}{\partial t}\ln P_0(\mathbf{T}), \\ \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\Psi_i^2} &= \frac{P_1^2(\Psi_1,\dots,\Psi_N)}{P_0^2(\Psi_1,\dots,\Psi_N)}-2\frac{P_2(\Psi_1,\dots,\Psi_N)}{P_0(\Psi_1,\dots,\Psi_N)}= \\ &= -\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2}{\partial T^2}\ln P_0(\mathbf{T})=-\frac{1}{B\dot T}\frac{\partial v_N}{\partial t}-\frac{\dot B}{\dot T B^2}v_N. \end{aligned} \tag{26}$$

Утверждение 2. *Пусть $\Phi_i(x,t)$, $i=1,\dots,N$, – совокупность точных решений уравнения (5) вида (24). Тогда функция v_N, определенная соотношениями (26), при произвольных функциях $\mu(t)$ и $\gamma(t)$, а также при произвольных значениях параметров B_i и k и произвольном N удовлетворяет уравнению второго порядка*

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(1-\frac{\gamma}{B\dot T}\right)\frac{\partial v_N}{\partial t}\right]+\mathcal{D}_0 B\dot T\frac{\partial^2 v_N}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\mu-\frac{\gamma\dot B}{\dot T B^2}\right)v_N\right]=0, \tag{27}$$

где функции $B(t)$ и $T(t)$ определены соотношениями (25).

Доказательство строится аналогично доказательству утверждения 1. Используя соотношения (26), как и при доказательстве утверждения 1, получаем уравнение

$$\left(1-\frac{\gamma}{B\dot{T}}\right)\frac{\partial v_N}{\partial t}+\mathcal{D}_0\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln P_0(\mathbf{T})+\left(\mu-\frac{\gamma\dot{B}}{\dot{T}B^2}\right)v_N=0.$$

Дифференцируя его по t, приходим к неавтономному уравнению второго порядка (22), содержащему в качестве неизвестной только v_N, что и доказывает утверждение.

Полученный результат интересен с точки зрения его использования для построения решений уравнений телеграфного типа, каким является (27) при определенном выборе знака коэффициентов. Важно отметить, что любая суперпозиция v_N простых решений Ψ_i удовлетворяет данному уравнению. Это дает альтернативный способ нахождения решений таких уравнений с помощью рядов или произведений.

6. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ К СТАНДАРТНОЙ ФОРМЕ

Рассмотрим теперь вопрос о применимости суперпозиционных решений u_N для вычисления решений исходного уравнения нелинейной диффузии (3). Рассмотрим функции

$$\begin{gathered}S(x,t)=a(t)\big(P_1(\Phi_1,\ldots,\Phi_N)+b(x,t)P_0(\Phi_1,\ldots,\Phi_N)\big)=a(t)\frac{A^N}{Z^N}\sigma(Z,t),\\ \sigma(Z,t)=\frac{Z}{A}P_1(\mathbf{Z})+b(x,t)P_0(\mathbf{Z}),\qquad F(x,t)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln S.\end{gathered}\tag{28}$$

Функция $a(t)$ может быть любой дифференцируемой функцией времени, а функцию $b(x,t)$ мы выберем далее. Используя тождества (18) и (19), находим

$$F(x,t)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln S(x,t)=k^2Z\frac{\partial}{Z}\left(Z\frac{\partial}{\partial Z}\ln\sigma(Z,t)\right).\tag{29}$$

Имеют место два тождества, одно из которых получается следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}u_N&=-\frac{1}{Ak}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\frac{P_0(\mathbf{Z})}{a(t)ZP_1(\mathbf{Z})A^{-1}(t)+a(t)b(x,t)P_0(\mathbf{Z})}-\frac{F(x,t)}{Ak}=\\&=\frac{1}{Ak}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\left(a(t)\frac{Z}{A}\frac{P_1(\mathbf{Z})}{P_0(\mathbf{Z})}+a(t)b(x,t)\right)-\frac{F(x,t)}{Ak}=\\&=\frac{1}{Ak}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln w_N-\frac{F(x,t)}{Ak},\end{aligned}\tag{30}$$

где $w_N=a(u_N+b)$. Второе тождество

$$u_N=\frac{1}{Ak}\frac{\partial}{\partial x}\ln w_N-\frac{J(x,t)}{Ak}+\frac{N}{A}\tag{31}$$

получается аналогичным способом. Здесь

$$J(x,t)=\frac{\partial\ln S}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\ln\sigma(Z,t)-Nk.$$

Тождество (31) можно, используя (30), переписать так:

$$a\frac{\partial u_N}{\partial x} = \frac{a}{Ak}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln w_N - \frac{aF}{Ak} = \\ = Ak\left(u_N + \frac{J(x,t)}{Ak} - \frac{N}{A}\right)w_N - \frac{\partial a}{\partial x}u_N - a\frac{\partial b}{\partial x}. \tag{32}$$

Теперь, используя только тождество (30), приведем уравнение (22) к нужной форме (2) без квадратичной нелинейности:

$$\frac{\partial u_N}{\partial t} - \left(\mathcal{D}_0 - \frac{\gamma}{A^2k^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln w_N + \left(\mu + \frac{\gamma}{A}\right)u_N + \left(\mathcal{D}_0 - \frac{\gamma}{A^2k^2}\right)F = 0; \tag{33}$$

используя еще и тождество (32), это уравнение можно привести к более общему виду

$$\frac{\partial u_N}{\partial t} - \left(\mathcal{D}_0 - \frac{\gamma}{A^2k^2} - \frac{Ga}{Ak}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln w_N + \left(\mu + \frac{\gamma}{A}\right)u_N - \\ - G\left[Ak\left(u_N + \frac{J(x,t)}{Ak} - \frac{N}{A}\right)w_N - \frac{\partial a}{\partial x}u_N\right] + \\ + Ga\frac{\partial b}{\partial x} + \left(\mathcal{D}_0 - \frac{\gamma}{A^2k^2} - \frac{Ga}{Ak}\right)F = 0, \tag{34}$$

где $G = G(x,t)$ – произвольная функция координат и времени.

Предполагая, что функция $a = a(t)$ является только функцией времени, в уравнении (33) удобно сделать подстановку $u_N = (w_N - b)/a$ и ввести новую переменную времени τ такую, что $d\tau = a(t)\mathcal{D}\,dt$. Здесь

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_0 - \frac{\gamma}{A^2k^2}.$$

В этом случае уравнение (33) приобретет вид уравнения (3):

$$\frac{\partial w_N}{\partial \tau} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln w_N + m(t)w_N + g = 0, \tag{35}$$

где

$$m(t) = \frac{a(A\mu+\gamma) - A\dot{a}}{a^2\mathcal{D}A}, \qquad g(x,t) = -\frac{1}{\mathcal{D}}Q(x,t) + F(x,t), \\ Q(x,t) = \frac{\partial b}{\partial t} + \left(\mu + \frac{\gamma}{A}\right)b. \tag{36}$$

Аналогично преобразуется уравнение (34) с помощью подстановки $u_N = w_N/a - b$ и новой переменной τ такой, что $d\tau = a(t)\mathcal{D}_G(t)\,dt$, где

$$\mathcal{D}_G = \mathcal{D}_0 - \frac{\gamma}{A^2k^2} - \frac{Ga}{Ak}.$$

Полагая $G = G(t)$ и $a = a(t)$, имеем

$$\frac{\partial w_N}{\partial \tau} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln w_N + m_1(x,t)w_N + \gamma_1(t)w_N^2 + g(x,t) = 0. \tag{37}$$

Здесь

$$
m_1(t,x) = \frac{1}{a^2\mathcal{D}_G}\left[-\frac{da}{dt} + \left(\mu + \frac{\gamma}{A}\right)a - Ga^2kN - GY(x,t)\right],
$$
$$
\gamma_1(t) = -\frac{GAk}{a\mathcal{D}_G}, \qquad g(x,t) = -\frac{1}{\mathcal{D}_G}\left(Q(x,t) - \mathcal{D}_G F(x,t) - G(t)\frac{\partial b}{\partial x}\right), \tag{38}
$$
$$
Y(x,t) = Ak\left(b(x,t)a - a^2\frac{J(x,t)}{Ak}\right).
$$

Таким образом, в случае $a = a(t)$ и $G = G(t)$ при произвольных функциях времени $\mu(t)$, $\gamma(t)$, $\mathcal{D}_0(t)$ и произвольной функции $b(x,t)$ функция $w_N = a(u_N + b)$, где u_N определено в (21), удовлетворяет уравнениям нелинейной диффузии (33) и (34).

7. УСЛОВИЯ КОМПЛЕМЕНТАРНОСТИ

Определение 1. Под *условием комплементарности* совокупности решений Φ_i, $i = 1,\ldots,N$, уравнения (4) будем понимать такой выбор коэффициентов этих функций, а также вспомогательных функций $a(t)$ и $b(Z,t)$, фигурирующих в определении функций $F(x,t)$ и $S(x,t)$, при которых уравнения (35) или (37) сводятся к исходному уравнению (3) с коэффициентами, являющимися функциями заданного вида, которые зависят только от переменной t.

Чтобы найти условия комплементарности, рассмотрим в качестве $b(x,t)$ функцию

$$
b(x,t) = \beta(Z)A^{-1}(t), \tag{39}
$$

где $\beta(Z)$ – аналитическая по Z функция. В результате функция $\sigma(Z,t)$, заданная в (28), примет следующий вид:

$$
\sigma(Z,t) = \frac{1}{A(t)}\xi(Z), \qquad \xi(Z) = ZP_0'(Z) + \beta(Z)P_0(Z).
$$

Используя эти соотношения, вычислим функцию $g(x,t)$ в уравнении (35). Согласно (29) имеем

$$
F(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln S = k^2 Z\frac{\partial}{\partial Z}\left(Z\frac{\partial \ln\xi(Z)}{\partial Z}\right).
$$

Далее,

$$
Q(x,t) = \left[\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{A} + \left(\mu + \frac{\gamma}{A}\right)\frac{1}{A}\right]\beta(Z) + \frac{1}{A}\frac{\partial\beta(Z)}{\partial t} = \frac{R}{A}Z\frac{\partial\beta}{\partial Z}.
$$

Здесь $R(t) = \dot{A}/A - \dot{\Theta}$ и было использовано уравнение (7) для A. Подставляя полученные соотношения для $F(x,t)$ и $Q(x,t)$ в выражение (36) для функции $g(x,t)$, находим

$$
g(x,t) = -\frac{R}{\mathcal{D}A}Z\frac{\partial\beta}{\partial Z} + k^2 Z\frac{\partial}{\partial Z}\left(Z\frac{\partial\ln\xi(Z)}{\partial Z}\right).
$$

Полагая

$$
\frac{R}{A\mathcal{D}} = \lambda. \tag{40}
$$

выводим общее уравнение, связывающее функции $\beta(Z)$ и $P_0(\mathbf{Z})$, при котором функция $g(x,t)$ является некоторой вещественной постоянной g_0:

$$g_0 = -\lambda Z\frac{\partial\beta}{\partial Z} + k^2 Z\frac{\partial}{\partial Z}\left(Z\frac{\partial\ln\xi(Z)}{\partial Z}\right). \tag{41}$$

Интегрируя это уравнение один раз по Z, приходим к уравнению

$$g_1 + g_0\ln Z = -\lambda\beta(Z) + k^2 Z\frac{\partial\ln\xi(Z)}{\partial Z}, \tag{42}$$

которое и представляет собой общее условие комплементарности функций Φ_i, входящих в суперпозицию u_N, определенную соотношениями (21). В (42) g_1 – постоянная интегрирования.

Результат можно сформулировать в виде утверждения.

Утверждение 3. *Если выполнены условия* (40) *и* (42), *то функция*

$$w_\beta(x,t) = -\frac{a(t)}{A(t)}\left[\frac{1}{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}\ln P_0(Z(x,t))\right) + \beta(Z(x,t))\right] \tag{43}$$

есть решение уравнения (35) *при произвольных постоянных* k, λ, g_1, g_0 *с коэффициентом* $m = m(t)$ *и* $g \equiv g_0$.

Для завершения исследования рассмотрим решения уравнения (42). Введем для удобства функцию $\zeta(Z) = \beta(Z) + P_0'/P_0$ и переменную $y = \ln Z$. В этом случае уравнение (42) примет вид

$$\frac{d\zeta}{dy} - \lambda\zeta^2 + U(y)\zeta = 0,$$

где

$$U(y) = (k^2+\lambda)\frac{d\ln P_0}{dy} - g_1 - g_0 y.$$

Это уравнение Риккати легко интегрируется, в результате чего получаем выражение для функции ζ:

$$\zeta(Z) = -\frac{Z}{\lambda}\frac{d}{dZ}\ln\eta(\ln Z),$$

где

$$\eta(y) = \eta_1\int^y \exp\left(-\int^y U(y'')\,dy''\right)dy' + \eta_0 = \eta_1\int^y \frac{e^{-g_1 y' - g_0 y'^2}dy'}{P_0^{k^2+\lambda}(e^{y'})} + \eta_0, \tag{44}$$

а η_0, η_1 – постоянные интегрирования. Соответственно

$$w_\beta(x,t) = -\frac{a}{A(t)}\frac{1}{k}\frac{\partial}{\partial x}\ln\zeta(Z(x,t)) = \frac{a}{A(t)}\frac{1}{\lambda k^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\eta(\ln Z(x,t)).$$

Выбор порядка N и коэффициентов полинома $P_0(Z)$ произволен, что также эквивалентно произвольности выбора чисел $z_i = -B_i$, поэтому полученные соотношения позволяют решать задачу Коши на всей оси координат для начальных распределений концентрации, заданных как аналитические функции координаты x. Это связано с тем, что, переходя к пределу $N \to \infty$, вместо полинома $P_0(Z)$ мы можем брать любую аналитическую в нуле по Z функцию. Поскольку в начальный момент времени переменная Z является аналитической функцией от x, соответствующие решения могут быть согласованы с почти любым гладким начальным распределением концентрации. Сложности могут возникать в случае, когда строится решение задачи с $g_0 \neq 0$. В этом случае в выражении для $F(\ln Z)$ явно содержится слагаемое, пропорциональное $\ln Z$, которое неаналитично в нуле. Однако анализ данной ситуации полезно проводить при решении конкретных задач.

Важными являются случаи, когда в (44) можно вычислить интеграл в правой части в аналитическом виде. Он вычисляется достаточно просто, если выполнены следующие условия: $g_0 = 0$, $g_1 = L$, $k^2 + \lambda = M$, где M и L – целые числа, а порядок N полинома $P_0(Z)$ конечен. В частности, при $M < 0$ и $g_0 = 0$ для любого конечного N интеграл в (44) является полиномом по Z.

8. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ С КВАДРАТИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Аналогичные вычисления можно проделать и для уравнения (37). При сделанном выборе функции $b(x,t)$ в форме (39) вычисление функции $g(x,t)$, определенной соотношениями (38), дает

$$g(x,t) = -\frac{R + kG}{\mathcal{D}_G A} Z \frac{\partial \beta}{\partial Z} + k^2 Z \frac{\partial}{\partial Z}\left(Z \frac{\partial \ln \xi(Z)}{\partial Z}\right).$$

Отсюда вытекает, что эта функция будет постоянной, если выполнено условие

$$\frac{R + kG}{\mathcal{D}_G A} = \lambda = \text{const}.$$

При этом функции $\beta(Z)$ и $P_0(\mathbf{Z})$ связаны тем же уравнением (41) и, как следствие, уравнением (42).

Вычислим теперь функцию $Y(x,t)$, входящую в коэффициент $m_1(x,t)$ уравнения (37). Подставляя в нее выражения для b и J, с учетом условия комплементарности находим

$$Y(x,t) = a^2 k\left(\beta(Z) + Z \frac{\partial \ln \xi(Z)}{\partial Z} - N\right).$$

Чтобы эта функция зависела только от переменной t, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось еще одно условие:

$$\beta(Z) + Z \frac{\partial \ln \xi(Z)}{\partial Z} = \beta_0 = \text{const}, \tag{45}$$

где β_0 – произвольная вещественная постоянная. При этом коэффициент $m_1(t)$ в уравнении (37) будет зависеть только от t и иметь вид

$$m_1(t) = \frac{1}{a^2 \mathcal{D}_G}\left[-\frac{da}{dt} + \left(\mu + \frac{\gamma}{A}\right) a - G a^2 \beta_0\right].$$

Следовательно, доказано

Утверждение 4. *Функция* $w_\beta(x,t)$, *определенная соотношением* (43) *в утверждении* 3, *при произвольных постоянных* λ, β_0, k *является решением уравнений* (37) *с коэффициентами* $m_1 = m_1(t)$, $\gamma_1 = \gamma_1(t)$, *зависящими только от* t, *и* $g(t) \equiv g_0$, *если функции* $\beta(Z)$ *и* $P_0(\mathbf{Z})$ *связаны уравнениями* (42) *и* (45) *и выполнено условие*

$$\frac{R + kG}{\mathcal{D}_G A} = \lambda.$$

Вычисление функциональной формы решений в этом случае приводит при произвольных постоянных g_0 и β_0 к определению явного вида и $\beta(Z)$, и $P_0(Z)$:

$$\beta(Z) = \beta_0 - Z\frac{d\ln\xi(Z)}{dZ}, \qquad P_0(Z) = Z^{-\beta_0}\xi(Z)\left(q_0 + \frac{Z}{\beta_0+1}\right),$$

где

$$\xi(Z) = e^{W(Z)}, \qquad W(Z) = Z^{-\lambda/k^2}\left(c_1 + \int^Z Z'^{\lambda/k^2}\big((g_0+\lambda\beta_0)\ln Z' + g_1\big)\,dZ'\right).$$

Функция $W(Z)$ вычисляется в явном виде при любых значениях параметров решения. В частности,

$$W(Z) = Z^{-\lambda/k^2}c_1 + \frac{Z}{\lambda/k^2+1}\big((g_0+\lambda\beta_0)\ln Z + g_1\big) - \frac{(g_0+\lambda\beta_0)}{(\lambda/k^2+1)^2}Z.$$

Эти решения уже не содержат произвольных функциональных параметров и описывают ограниченный класс точных решений уравнения (3). Все замечания о решениях, построенных в предыдущем разделе, остаются справедливыми и для решений, построенных в данном разделе.

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развитый в предложенной работе метод представления суперпозиции простых решений производными от полиномов позволил построить решение задачи Коши для уравнения нелинейной диффузии с нелинейным источником в форме линейной или квадратичной функции концентрации. Поскольку решения строятся практически для любого начального распределения, в рамках такого подхода можно решать задачи о формировании регулярных и периодических структур в среде с нелинейной диффузией. В работе из-за ограниченности объема статьи не проводились вычисления для решений Ф полиномиального по x вида. Для таких решений уравнения для суперпозиционных функций отличаются от тех, которые были получены для решений с экспонентами. Однако все необходимые построения можно воспроизвести по аналогии с приведенными в статье. Более того, развитый метод построения суперпозиционных решений полиномиального типа может быть полезным для более широкого круга нелинейных задач. В частности, связь между суперпозициями решений некоторых нелинейных уравнений с решениями линейных уравнений может рассматриваться в качестве одного из способов строить решения таких уравнений с переменными коэффициентами заданного типа. Это было продемонстрировано на примере суперпозиций полиномов по переменной T как решений телеграфного уравнения.

Благодарности. Автор благодарит за полезные обсуждения результатов данной работы И. О. Золотовского и Д. А. Коробко. Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (в рамках Государственного задания и проекта № 14.Z50.31.0015), а также при частичной финансовой поддержке РФФИ в рамках проекта 13-01-97067 р-поволжье_а.

Список литературы

[1] А. А. Самарский, А. П. Михайлов, *Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры*, Наука, М., 1997.

[2] А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов, *Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений*, Наука, М., 1987.

[3] В. В. Пухначев, *Прикл. механика и техн. физика*, **36**:2 (1995), 23–31.

[4] С. Н. Аристов, *Прикл. механика и техн. физика*, **40**:1 (1999), 22–26.

[5] В. М. Журавлев, *ТМФ*, **124**:2 (2000), 265–278.

[6] В. М. Журавлев, *Письма в ЖЭТФ*, **75**:1 (2002), 11–16.

[7] В. М. Журавлев, *ЖЭТФ*, **129**:3 (2006), 587–604.

Поступила в редакцию 19.08.2014,
после доработки 8.10.2014