```
> restart;
```

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ
(В.М.ГАЛИЦКИЙ, Б.М.КОРНАКОВ, В.И.КОГАН.
ЗАДАЧИ ПО КВАНТОВОЙ МЕХНИКЕ)
Журавлев В.М.
Ульяновский государственный университет, 2020

ОПЕРАТОР МОМЕНТА ИМПУЛЬСА. РОТАТОРЫ

```
> with(plots):
  with(plottools):
```

Формат графиков

```
> frm:=axes=boxed,gridlines=true,labeldirections=[horizontal,vertical],labelfont=[TIMES,BOLD,16],titlefont=[TIMES,BOLD,20],font=[TIMES,BOLD,20],symbol=solidcircle,symbolsize=18,legendstyle=[font=["TIMES",BOLD,18],location=bottom],size=[900,600];
```

frm := *axes* = *boxed*, *gridlines* = *true*, *labeldirections* = [*horizontal*, *vertical*], *labelfont* = [*TIMES*, *BOLD*, 16], *titlefont* = [*TIMES*, *BOLD*, 20], *font* = [*TIMES*, *BOLD*, 20], *symbol* = *solidcircle*, *symbolsize* = 18, *legendstyle* = [*font* = ["TIMES", *BOLD*, 18], *location* = *bottom*], *size* = [900, 600] **(1)**

ОПЕРАТОР МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

ПЛОСКИЙ РОТАТОР

Плоский ротатор - это квантовая система, вращающаяся вокруг одной своей оси. Момент инерции этой системы обозначим через J. Ось, вокруг которой происходит вращение, будем считать осью z. Тогда классическая энергия вращения тела вокруг оси z может быть записана в таком виде:

$$E = J\frac{\omega^2}{2}$$

Если ввести величину момента импульса вращения тела:

$$L_z = J\omega,$$

то формула для энергии примет такой вид :

$$E = \frac{(L_z)^2}{2J}$$

При переходе к квантовой механике момент импульса частицы заменяется на оператор момента импульса $\hat{L}_z$.

Оператор момента импульса

Проекция момента импульса на ось z имеет такой вид :

$$\hat{L}_z=[\vec{\hat{x}} \times \vec{\hat{p}}]_z=-i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\right)=(\hat{x}\hat{p}_y-\hat{x}\hat{p}_x)$$

В полярной системе координат проекция оператора импульса на ось z можно записать так:

$$\hat{L}_z=-i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi},$$

где φ – азимутальный угол в плоскости вращения ротатора. Вместо оператора $\hat{L}_z$ удобно ввести безразмерный оператор $\hat{l}_z$, называемый проекцией орбитального момента на ось z, равный:

$$\hat{l}_z=\frac{1}{\hbar}\hat{L}_z=-i\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Собственные функции оператора $\hat{l}_z$ описывают состояния с фиксированным значением m проекции орбитального момента на ось z. Эти функции находятся как решения уравнения:

$$\hat{l}_z\,\psi=-i\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}=m\psi.$$

Решение этого уравнения легко находится и имеет вид:

$$\psi_m(\varphi)=Ce^{im\varphi}.$$

Угол φ меняется в интервале [0,2π], т.е. вращение - это финитное движение. Поэтому спектр оператора $\hat{l}_z$ и, соответственно, $\hat{L}_z$ являтся дискретным. Граничными условиями для $\psi_m(\varphi)$ является условие периодичности этой функции, которое вытекает из постулата непрерывности волновой функции.

Это означает, что, начиная с любого заданного угла φ0 и сделав полный круг, мы должны получить тоже самое значение $\psi_m(\varphi 0)$.

Поэтому имеем:

$$Ce^{im\varphi}=Ce^{im(\varphi+2\pi)}$$

Отсюда находим :

$$\mathbf{1}=e^{i2\pi m}.$$

Это соотношение выполняется только, если **m - произвольное целое число.**

Собственное число m проекции орбитального момента на ось z называется **магнитным квантовым числом.**

Собственное число m проекции орбитального момента на ось z называется **магнитным квантовым числом.**
Найдем условие нормировки:

$$C^2\int_0^{2\pi}\left(\psi`\_m`\right)^*\psi_m\,d\varphi = C^2\int_0^{2\pi}\left(e^{im\varphi}\right)^* e^{im\varphi}\,d\varphi = C^2\int_0^{2\pi} e^{-im\varphi}e^{im\varphi}\,d\varphi = C^2\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi C^2 = 1.$$

Отсюда:

$$C=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Окончательно:

$$\psi_m(\varphi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi}$$

Стационарное уравнение Шредингера для плоского ротатора.

Оператор полной энергии вращения (оператор Гамильтона) для ротатора имеет такой вид :

$$\widehat{H}=\frac{1}{2J}\hat{L}_z^2=-\frac{\hbar^2}{2J}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

Стационарное уравнение Шредингера для плоского ротатора можно теперь записать так :

$$\widehat{H}\,\psi=\frac{1}{2J}\hat{L}_z^2\psi=-\frac{\hbar^2}{2J}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\psi=E\psi$$

Это уравнение можно переписать :

$$-\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\psi=m^2\psi,$$

где m − магнитное квантовое число, то есть целое число, нумерующее значения проекции орбитального момента на ось z.
Вид этого уравнения следует из вида собственного числа оператора $\hat{l}_z$.

Отсюда следует, что вращательная энергия квантового плоского ротатора может принимать только такие значения:

$$E_m=\frac{\hbar^2}{2J}m^2.$$

Вращательная энергия молекул квантуется и может принимать лишь дискретные значения, что подтверждается экспериментами.
Состояния с фиксированной энергией вращения имеют такой вид:

$$\psi_m(\varphi)=C_+e^{im\varphi}+C\_e^{-im\varphi}.$$

Это является следствием того, что одна и та же энергия соответствует вращениям по двум направлениям.

СФЕРИЧЕСКИЙ РОТАТОР

Под сферическим ротатором понимают вращающееся тело, моменты инерции которого одинаковы по всем осям.
В классической механике энергия вращения произвольного тела в системе отсчета, связанной с самим телом с приведением системы координат к главным осям тела может быть записана в таком виде:

$$E=J_{xx}\frac{\omega_x^2}{2}+J_{yy}\frac{\omega_y^2}{2}+J_{zz}\frac{\omega_z^2}{2}$$

или

$$E=\frac{(L_x)^2}{2J_{xx}}+\frac{(L_y)^2}{2J_{yy}}+\frac{(L_z)^2}{2J_{zz}}$$

Здесь

$$L_x=[r\times p]`\_x`=yp_z-zp_y,\; L_y=[r\times p]`\_y`=zp_x-xp_z, L_z=[r\times p]`\_z`=xp_y-yp_x$$

− компоненты вектора момента импульса на соответствующие оси.
В случае сферического ротатора $J_{xx}=J_{yy}=J_{zz}=J$ и энергия вращения равна:

$$E=\frac{1}{2J}\left((L_x)^2+(L_y)^2+(L_z)^2\right)=\frac{1}{2J}\boldsymbol{L}^2$$

При переходе к квантовой механике операторы проекции оператора момента импульса на оси координат изображаются следующими операторами:

$$\hat{L}_x=[\vec{\hat{x}}\times\vec{\hat{p}}]_x=-i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y}\right)=(\hat{y}\,\hat{p}_z-\hat{z}\,\hat{p}_y),$$

$$\hat{L}_y=[\vec{\hat{x}}\times\vec{\hat{p}}]_y=-i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial z}\right)=(\hat{z}\,\hat{p}_x-\hat{y}\,\hat{p}_z),$$

$$\hat{L}_z=[\vec{\hat{x}}\times\vec{\hat{p}}]_z=-i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\right)=(\hat{x}\,\hat{p}_y-\hat{x}\,\hat{p}_x),$$

Как уже отмечалось выше, оператор $\hat{L}_z$ в полярной системе координат может быть выражен через производную от азимутального угла в плоскости (x,y), ортогональной оси z:

$$\hat{L}_z=-i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

То же самое касается и операторов $\hat{L}_x$ и $\hat{L}_y$. Их также можно представить в виде:

$$\hat{L}_x=-i\hbar\frac{\partial}{\partial\xi},\;\hat{L}_y=-i\hbar\frac{\partial}{\partial\gamma},$$

где ξ - азимутальный угол в плоскости (y,z), а χ - азимутальный угол в плоскости (x,z). В сферической системе координат, связанной с осью z. Выражение для оператора $\hat{L}_z$ остается неизменным, а операторы $\hat{L}_x$ и $\hat{L}_y$ будут иметь более сложный вид:

$$\hat{L}_x = i\left(\sin(\varphi)\frac{\partial}{\partial\theta} + \cos(\varphi)\,ctg(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$

$$\hat{L}_y = -i\left(\cos(\varphi)\frac{\partial}{\partial\theta} - \sin(\varphi)\,ctg(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$

При использовании сферической системы координат с азимутальным углом φ и полярным углом θ квадрат вектора момента импульса можно записать так:

$$(\hat{L}_x)^2 + (\hat{L}_y)^2 + (\hat{L}_z)^2 = \hat{\boldsymbol{L}}^2 = -\hbar^2\left(\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{(\sin(\theta))^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right) = -\hbar^2\Delta_{\varphi\theta}$$

Здесь $\Delta_{\varphi\theta}$ - угловая часть оператора Лапласа в сферической системе координат.

Как и в случае оператора $\hat{L}_z$, полезно ввести оператор орбитального момента с компонентами:

$$\hat{\boldsymbol{l}} = (\hat{l}_x, \hat{l}_y, \hat{l}_z) = \frac{1}{\hbar}\hat{\boldsymbol{L}}$$

В этом случае:

$$\hat{\boldsymbol{l}}^2 = -\Delta_{\varphi\theta}$$

Собственные функции квадрата орбитального момента есть собственные функции угловой части оператора Лапласа. Эти собственные функции представляют собой сферические гармоники:

$$\Psi_{lm}(\varphi,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi}\sqrt{\frac{2l+1}{2}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^{|m|}(\theta),$$

где $P_l^{|m|}(\theta)$ - присоединенные полиномы Лежандра. Здесь m - магнитное квантовое число, а l - орбитальное квантовое число.

Собственные числа оператора $\hat{\boldsymbol{l}}^2$ равны $\Lambda=l(l+1)$:

$$\hat{\boldsymbol{l}}^2\Psi_{lm} = l(l+1)\Psi_{lm}.$$

Соответственно, энергетические уровни равны:

$$E_l = \frac{J\hbar^2}{2}l(l+1).$$

Первые несколько сферических гармоник:

l=0: $\Psi_{00}(\varphi,\theta) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}},$

l=1: $\Psi_{1,\pm1}(\varphi,\theta) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}e^{\pm i\varphi}\sin(\theta),\ \Psi_{10}(\varphi,\theta) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos(\theta).$

l=2: $\Psi_{2,\pm2}(\varphi,\theta) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}e^{\pm 2i\varphi}(\sin(\theta))^2,\quad \Psi_{2,\pm1}(\varphi,\theta) = \sqrt{\frac{15}{8\pi}}e^{\pm i\varphi}\sin(\theta)\cos(\theta),$

$\Psi_{20}(\varphi,\theta) = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\frac{1}{2}\left(3(\cos(\theta))^2 - 1\right).$

В теории плоского и сферического ротатора мы встречаемся с таким квантово-механическим явлением как множественное вырождение энергетических уровней.

Уровень энергии квантовой системы называется вырожденным, если ему соответствуют более одной линейно независимых волновых функций.

Первый пример такого вырождения нам представляла квантовая динамика свободной частицы. Поскольку кинетическая энергия свободной частицы выражается через квадрат ее импульса:

$$E = \frac{p^2}{2m},$$

то свободной частице с фиксированным значением энергии соответствуют две волновые функции де Бройля :

$$\psi_+ = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{\frac{ipx}{\hbar} - \frac{iEt}{\hbar}},\quad \psi_- = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{-\frac{ipx}{\hbar} - \frac{iEt}{\hbar}},$$

с импульсом, направленным в положительном направлении оси x и в обратном.

Эти две функции линейно независимы.

В этом случае говорят, что энергетический уровень двукратно вырожден.

Аналогичная ситуация имеет место для плоского ротатора.

Энергетическому уровню плоского ротатора соответствуют две линейно независимые функции :

$$\psi_+ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{im\phi}{\hbar} - \frac{iEt}{\hbar}},\quad \psi_- = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{im\phi}{\hbar} - \frac{iEt}{\hbar}},\quad E = \frac{\hbar^2}{2J}m^2.$$

Более сложная ситуация, которая существенно влияет на множество задач квантовой теории, соответствует сферическому ротатору .

С этой ситуацией придется постоянно сталкиваться в задачах, связанных с атомами.

В случае сферического ротатора каждому уровню энергии, который определяется однозначно орбитальным числом l, соответствует $2l+1$ линейно независимых волновых функций, соответствующих значениям магнитного квантового числа $m = -l, \ldots, l$. Для нагляности такого вырождения полезно построить следующую диаграмму.

```
> r2:=(x,y,L)->x^2+y^2-L^2; # Функция для изображения окружностей радиуса L
```

$$r2 := (x, y, L) \rightarrow x^2 + y^2 - L^2 \quad (2)$$

```
> Cr:=(L)->implicitplot(r2(x,y,L),x=-L..L,y=-L..L,color=blue,linestyle=dash,thickness=2,frm,scaling=constrained,
  filled=true,transparency=0.8): # Рисуем окружность
```

Рисуем линии в направлении ориентации орбитального момента с орбитальным числом L и магнитным m

```
> Lin:=(L,m,CL)->line([0,0],[L*cos(arcsin(m/L)),m],color=CL,thickness=5);
```

$$Lin := (L, m, CL) \rightarrow plottools\text{:-}line\left([0, 0], \left[L\cos\left(\arcsin\left(\frac{m}{L}\right)\right), m\right], color = CL, thickness = 5\right) \quad (3)$$

Рисуем линии проекций орбитального момента с орбитальным числом L и магнитным m на ось z

```
> HLin:=(L,m,CL)->line([0,m],[L*cos(arcsin(m/L)),m],color=CL,thickness=3,linestyle=dot);
```

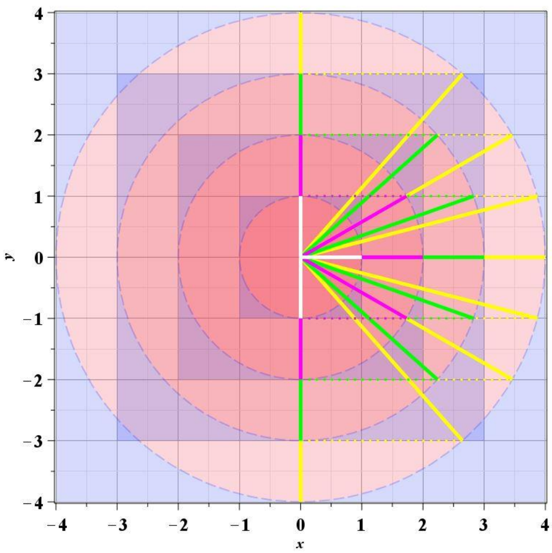
$$HLin := (L, m, CL) \rightarrow plottools\text{:-}line\left([0, m], \left[L\cos\left(\arcsin\left(\frac{m}{L}\right)\right), m\right], color = CL, thickness = 3, linestyle = dot\right) \quad (4)$$

Создаем все линии, соответствующие орбитальному числу L

```
> LL:=(L,CL)->seq(Lin(L,m,CL),m=-L..L):
  HL:=(L,CL)->seq(HLin(L,m,CL),m=-L..L):
```

Выводим все на экран

```
> display(Cr(1),Cr(2),Cr(3),Cr(4),LL(4,yellow),HL(4,yellow),LL(3,green),HL(3,green),LL(2,magenta),HL(2,magenta),
  LL(1,white),HL(1,white),size=[1000,800]);
```



Решение задач

Задача 4.2 ГКК

Задача 1.

Найти вероятность обнаружить плоский ротатор в состоянии с волновой функцией:

$$\psi(\varphi) = C\,(\cos(\varphi))^3$$

Решение задачи

Найдем условие нормировки:

$$\int_0^{2\pi} (\psi)^* \psi \, d\varphi = C^2 \int_0^{2\pi} (\cos(\varphi))^6 \, d\varphi = \frac{1}{8} C^2 \int_0^{2\pi} (1 + \cos(2\varphi))^3 \, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{8} C^2 \int_0^{2\pi} \left(1 + 3\cos(2\varphi) + 3(\cos(2\varphi))^2 + (\cos(2\varphi))^3\right) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{8} C^2 \int_0^{2\pi} \left(1 + 3\cos(2\varphi) + \frac{3}{2}(1 + \cos(4\varphi)) + \left(\frac{3}{4}\cos(2\varphi) + \frac{1}{4}\cos(6\varphi)\right)\right) d\varphi =$$

$=5\frac{1}{8}\pi C^2 = 1$

Здесь использовалось правило – интеграл по периоду от функции $\cos(k\varphi)$ равен нулю и тригонометрическое тождество :

$$(\cos(\alpha))^3 = \frac{3}{4}\cos(\alpha) + \frac{1}{4}\cos(3\,\alpha)$$

Отсюда :

$$C = 2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5\,\pi}}$$

Проверяем :

```
> int(cos(phi)^6,phi=0..2*Pi);
```

$$\frac{5}{8}\pi \tag{5}$$

```
> combine[trig](cos(phi)^3);
```

$$\frac{1}{4}\cos(3\,\phi) + \frac{3}{4}\cos(\phi) \tag{6}$$

Вычисляем вероятности обнаружить ротатор с различными значениями магнитного числа m. Для этого вспоминаем тригонометрическое тождество:

$$(\cos(\varphi))^3 = \frac{3}{4}\cos(\varphi) + \frac{1}{4}\cos(3\,\varphi) = \frac{3}{8}(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}) + \frac{1}{8}(e^{3\,i\varphi}+e^{-3\,i\varphi}) =$$

$$= \frac{3\sqrt{2\,\pi}}{8}\left(\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}e^{i\varphi} + \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}e^{-i\varphi}\right) + \frac{\sqrt{2\,\pi}}{8}\left(\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}e^{3\,i\varphi} + \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}e^{-3\,i\varphi}\right) =$$

$$= \frac{3\sqrt{2\,\pi}}{8}(\psi_1+\psi_{-1}) + \frac{\sqrt{2\,\pi}}{8}(\psi_3+\psi_{-3})$$

Таким образом, исходное состояние ψ можно представить в виде следующей суперпозиции ортонормированных состояний с фиксированной проекцией орбитального момента на ось z:

$$\psi = \frac{3\sqrt{2\,\pi}}{8}2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5\,\pi}}(\psi_1+\psi_{-1}) + \frac{\sqrt{2\,\pi}}{8}2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5\,\pi}}(\psi_3+\psi_{-3}) =$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{5}}(\psi_1+\psi_{-1}) + \frac{1}{2\sqrt{5}}(\psi_3+\psi_{-3}).$$

Теперь находим вероятности обнаружить ротатор в состояниях с различными m.

Вероятности равны квадратам коэффициентов, стоящих при отдельных волновых функциях.

Поэтому :

$$P\{m=1\} = \frac{9}{20},\ P\{m=-1\} = \frac{9}{20},\ P\{m=3\} = \frac{1}{20},\ P\{m=1\} = \frac{1}{20}.$$

$$P\{m=1\} + P\{m=-1\} + P\{m=3\} + P\{m=-3\} = 1$$

Вероятность остальных значений магнитного числа равна нулю.

Задача 4.4 ГКК

Задача 4.4 а

4.4. Состояние пространственного ротатора описывается волновой функцией вида:

а) $\Psi = C\cos^2\theta$; б) $\Psi = Ce^{2i\varphi}$.

В указанных состояниях найти функции распределения ротатора по энергии, квадрату момента и его проекции на ось z, а также средние значения этих величин.

Найти вероятность обнаружить сферический ротатор в состоянии с волновой функцией:

$$\psi(\varphi,\theta) = C(\cos(\theta))^2$$

Решение задачи

Найдем условие нормировки. В случае сферического ротатора интегрирование производится по всем сферическим углам, т.е. по поверхности единичной сферы:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(\psi)^*\psi\sin(\theta)d\theta\,d\varphi = C^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(\cos(\theta))^4\sin(\theta)d\theta\,d\varphi = 2\,\pi\,C^2\int_0^{\pi}(\cos(\theta))^4\sin(\theta)d\theta = 1$$

Сделаем замену переменных :

$x = \cos(\theta)$, $dx = -\sin(\theta)d\theta$.

В результате получаем следующий интеграл :

$$-2\pi C^2 \int_1^{-1} x^4\, dx = 1$$

Следовательно :

$$\frac{2\pi C^2 x^5}{5}\Big|_{-1}^{+1} = \frac{4\pi C^2}{5} = 1$$

Отсюда :

$$C = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}$$

Исходную волновую функцию можно представить в виде следующей суперпозиции :

$$\psi = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\,(\cos(\theta))^2 = A\Psi_{00}(\varphi,\theta) + B\Psi_{20}(\varphi,\theta) = \frac{A}{\sqrt{4\pi}} + B\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\,\frac{1}{2}\left(3(\cos(\theta))^2 - 1\right)$$

Приравнивая коэффициенты при линейно независимых функциях, приходим к двум алгебраическим уравнениям :

$$\frac{A}{\sqrt{4\pi}} - B\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\,\frac{1}{2} = 0,$$

$$B\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\,\frac{3}{2} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}$$

Отсюда :

$$B = \frac{2}{3},\quad A = \frac{1}{3}\sqrt{5}.$$

Таким образом :

$$\psi = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\,(\cos(\theta))^2 = \frac{1}{3}\sqrt{5}\,\Psi_{00}(\varphi,\theta) + \frac{2}{3}\Psi_{20}(\varphi,\theta)$$

Квадраты коэффициентов при функциях равны вероятностям найти ротатор в соответствующих состояниях. Поэтому :

$$P\{l=0,\ m=0\} = \frac{5}{9},\quad P\{l=2,\ m=0\} = \frac{4}{9}.$$

$$P\{l=0,\ m=0\} + P\{l=2,\ m=0\} = 1$$

Все остальные состояния не наблюдаются. Их вероятности равны нулю.

Проверка нормировки :

```
> C^2*int(int(cos(theta)^4*sin(theta),theta=0..Pi),phi=0..2*Pi);
```

$$\frac{4}{5}\pi C^2 \qquad (7)$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задачи 3.15 и 4.2 ГКК

4.2. Состояние плоского ротатора описывается волновой функцией вида $\Psi = C\cos^n\varphi$ (n — целое). Найти функции распределения ротатора по энергиям и проекциям момента, а также средние значения этих величин в указанном состоянии.

3.15. В состоянии частицы, характеризующемся угловой зависимостью волновой функции вида $\Psi = A\cos^n\varphi$ (φ — угол поворота относительно некоторой оси z, n — целое), найти вероятности различных значений m проекции момента на ось z.

Решение необходимо искать с помощью разложения $(\cos(\varphi))^n$ в бином Ньютона :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k},\quad C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Поэтому :

$$(\cos(\varphi))^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{ik\varphi} e^{-i(n-k)\varphi} = \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{-in\varphi} \sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{2ik\varphi}$$

Задача 3.16 и 4.4б ГКК

4.4. Состояние пространственного ротатора описывается волновой функцией вида:

а) $\Psi = C\cos^2\theta$; *б)* $\Psi = Ce^{2i\varphi}$.

В указанных состояниях найти функции распределения ротатора по энергии, квадрату момента и его проекции на ось z, а также средние значения этих величин.

3.16. В состоянии частицы, волновая функция которого имеет угловую зависимость вида $\Psi = A\exp(2i\varphi)$ (φ — азимутальный угол сферической системы координат), найти вероятности различных значений l момента частицы.