

Топологическая интерпретация квантовой теории и структуря элементарных частиц

В.М. Журавлев

Ульяновский государственный университет,
Кафедра теоретической физики,
Russia, Ulyanovsk, L.Tolstoy str., 42
zhvictorm@gmail.com

В работе излагается новая концепция тополого-геометрической интерпретации квантовой механики. Специальный выбор геометрических маркеров позволяет связать квантовую механику с топологической интерпретацией электрического заряда и построить электродинамику с целочисленными точечными зарядами. Электрический заряд приобретает статус топологического заряда в форме геометрически выделенных областей физического пространства с отличной от нуля кривизной. Вводится топологическая интерпретация частиц и проводится ее сопоставление с элементарными частицами. Предлагается топологическая интерпретация барионного заряда.

1 Введение

Основные проблемы, которые стоят перед электродинамикой, как классической, так и квантовой, сводятся к следующим фундаментальным фактам. Первый факт состоит в том, что электроны и другие элементарные частицы в квантовой теории изначально определяются как точечные объекты. Достаточно вспомнить формулировку статистического постулата, в котором модуль квадрата волновой функции связывается с плотностью вероятности обнаружить частицу в заданной точке пространства в указанный момент времени. Таким образом, постулат однозначно трактует частицу как точечный объект. Наделенные электрическим зарядом, такие объекты создают вокруг

себя электрическое кулоновское поле, напряженность и потенциал которого стремятся к бесконечности в точке расположения заряда. Это, в свою очередь, приводит к бесконечной величине энергии поля таких зарядов. Рассматриваемое иногда простое решение этой проблемы, связанное с введением частиц конечных размеров, позволяет получить конечные значения напряженностей и энергий поля. Но это противоречит не только постулируемой точечности частиц, но и экспериментальному факту кратности заряда частиц заряду электрона. Для протяженных объектов отсутствуют неэкзотические модели, в которых протяженный заряд будет иметь всегда величину строго кратную величине заряда электрона.

Одна из замечательных идей “заряда без заряда”, с помощью которой можно избавиться от кулоновских расходимостей в энергии, была предложена Уилером и Мизнером [1, 2, 3]. Их идея состоит в использовании областей со сложной топологией (ручки Уилера), в которых отсутствуют точечные заряды, хотя для внешнего наблюдателя область пространства будет выглядеть как два объекта, заряженных противоположно. Области со сложной топологией типа ручек Уилера обладают значительной кривизной, что с точки зрения Общей теории относительности (ОТО) означает наличие большой плотности энергии, которая определяет массу таких объектов. Хотя эта идея имеет целый ряд недостатков, тем не менее она заложила основы именно топологического подхода к возможной формулировке проблем теории квантовых частиц (см. например, [4, 5, 6]). Благодаря этому топологические заряды являются одним из важных элементов квантовой теории поля [7].

Идея Уилера и Мизнера выросла на анализе возможных следствий ОТО для малых масштабов, на которых динамика управляется законами квантовой теории. Эта область масштабов изначально в рамках ОТО не рассматривалась как отдельная проблема. Однако с развитием квантовой теории стало ясно, что при плотностях энергии, характерных для структуры нуклонов, на малых масштабах должны проявляться эффекты кривизны пространства. Однако согласование точек зрения ОТО и квантовой теории на уровне структуры элементарных частиц сталкивается с существенными трудностями и до сих пор остается нерешенной задачей. Возможное объяснение этих трудностей ОТО может быть связано со сложной топологией пространства на малых масштабах и может рассматриваться как задача о согласовании ОТО с квантовыми законами на основе их интерпретации как проявлений этой сложной топологии. В таком подходе теория гравитации на больших масштабах, основанная на представлении ОТО о неевклидовости пространства-времени, должна являться продолжением кванто-

вых законов в новой топологической их интерпретации в форме “остаточной” кривизны пространства на больших масштабах.

Следуя общей идее привлечения топологии пространства для объяснения свойств элементарных частиц, в работах [8, 9, 10] был предложен новый подход к описанию структуры элементарных частиц, основанный на топологической интерпретации электрического заряда и других зарядовых чисел, в частности, барионного заряда. Основной смысл введенных в этих работах постулатов состоит в простой топологической интерпретации структуры элементарных частиц, как элементов геометрической структуры физического пространства, которое рассматривается в форме гиперповерхности в пространстве размерности равной 4. Частица определяется как область 3-х-мерного физического пространства, ограниченная замкнутой двумерной ориентируемой поверхностью. Все такие двумерные поверхности классифицируются с помощью известной топологической теоремы (см. например,[11, 12]), как сфера с g вклеенными в нее ручками. В результате, имеется возможность полностью описать топологически все типы элементарных частиц. Основной смысл использования такого подхода состоит в том, что в его рамках классификация частиц выглядит естественно и соответствует основным зарядовым свойствам частиц.

Еще одним важным элементом такого подхода является возможность получить новое тополого-геометрическое толкование квантовых законов. В этом отношении данная теория напоминает теорию со скрытыми параметрами. Однако появляющиеся в данной работе скрытые параметры имеют иную природу, чем параметры, которые регламентируются известной теоремой Неймана [13]. Смысл новых скрытых переменных в том, что они существенно не локальны, в то время, как в теореме Неймана скрытые параметры локальны. Существование теорий с нелокальными скрытыми параметрами было отмечено раньше (см. [14]). Проиллюстрировать действие вводимых нелокальных (топологических) параметров можно следующим образом. Топологическая перестройка может быть следствием локального изменения структуры пространства. Например, непрерывное сближение двух максимумов функции, которая в данной теории описывает свойства пространства, не меняет его топологических свойств до тех пор, пока они не сольются. При слиянии максимумов исчезает один из них и, возможно, седловая точка между ними. Однако такое локальное изменение структуры приводит мгновенно к глобальной топологической перестройке пространства, т.е. к изме-

нению глобальных топологических его свойств. На микроуровне это должно выглядеть как мгновенное изменение квантовых свойств системы. Поэтому коллапс волновой функции в данной теории связывается с топологическими перестройками структуры системы в момент измерения. В результате этот элемент предлагаемого подхода и дает возможность получить “рациональное” объяснение проекционного постулата - коллапса волновой функции в момент проведения измерения. Поскольку мы получаем всегда в квантовом эксперименте усредненные параметры систем, то топологические перестройки выглядят как мгновенные стягивания волновых функций к обнаруженному состоянию.

В настоящей работе этот подход развивается и уточняется. Выводятся уравнения электродинамики с целочисленными точечными зарядами. Одной из основных задач данной работы являлось построение топологической интерпретации электрического заряда в сочетании с обоснованием ее в рамках квантовой теории. В первых разделах данной работы проведен вывод уравнения Шредингера, позволяющий в дальнейшем рассматривать получаемые топологические структуры как объекты квантовой теории. Следует отметить, что привлечение геометрических соображений к обоснованию квантовых законов рассматривалось и раньше (см. например, [15] и библиографию там). В настоящей работе предлагается новый подход к интерпретации квантовой теории, основанный на геометрических лагранжевых маркеров. Это позволяет естественным образом ввести плотность лагранжевых маркеров и с ее помощью построить усредненное описание динамики частиц и связанное с ним уравнение Шредингера заряженных частиц.

2 Фоновая геометрия и физическое пространство

Для решения проблем, связанных со свойствами точенных зарядов, рассмотрим следующую конструкцию. Предположим, что на малых расстояниях вблизи точечного заряда пространство имеет некоторую кривизну и является неевклидовым. Вместе с тем, локальное увеличение кривизны пространства на малых масштабах воспринимается нами как увеличение плотности энергии материи вблизи этой точки, в то время как наши представления о метрических свойствах самого пространства остаются связанными с “фоновым” окружающим нас евклидовым пространством P^3 размерности $d = 3$. В результате у нас возникает представление о характере пространственных изменений фи-

зических величин вблизи точечного заряда, соответствующее фоновому пространству, а не реальному - физическому. Для наглядности мы можем обратиться к представлению такой ситуации с помощью терминов внешней геометрии. Положим, что наше физическое пространство V^3 представляет собой гиперповерхность трех измерений в объемлющем евклидовом пространстве W^4 , имеющем размерность $d = 4$. Такая гиперповерхность может быть задана с помощью функции высоты $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbf{x}, t)$, т.е. с помощью алгебраического уравнения:

$$u = \mathcal{F}(\mathbf{x}, t), \quad (1)$$

где u - дополнительная четвертая координата в объемлющем пространстве $W^4 = T_u \times P^3$, а $\mathbf{x} = (x, y, z)$ - декартовы координаты в ортогональной к направлению u гиперплоскости в объемлющем пространстве, которое и рассматривается как фоновое евклидово пространство. Будем пока полагать, что движения рассматриваемых объектов происходят с такими скоростями, что можно пренебречь релятивистскими эффектами. Поэтому время t является абсолютным.

Для уточнения физического смысла введенной конструкции отметим, что в обычном смысле пространством является именно “объемлющее” пространство размерности 4 (или пространство-время размерности 5). Слова “в обычном смысле” здесь подразумевают, что пространство рассматривается как арена, на которой разворачивается действие физических законов. Это пространство полагается евклидовым. Именно с этим пространством мы связываем свои инерциальные системы отсчета, т.е. системы отсчета, привязанные к удаленными объектам (звездам, галактикам и.т.д.). То пространство, которое мы наблюдаем в форме 3-х мерного физического пространства, является некоторой гиперповерхностью, имеющей кривизну, в этом объемлющем пространстве. Выделение такой гиперповерхности физически может быть связано только с некоторой ее “материальностью”. Смысл этой материальности (из чего она состоит) пока нет необходимости рассматривать или объяснять, поскольку на данном этапе важна лишь ее геометрическая и топологическая структуры.

Предположим, что на физической гиперповерхности V^3 имеется выделенная криволинейная система координат $\mathbf{e} = (e^1, e^2, e^3)$, которая некоторым образом связана с физически значимыми элементами внешней геометрии V^3 , как гиперповерхности в W^4 , смысл которых будет уточнен в процессе построения теории. Поскольку система ко-

ординат \mathbf{e} является физически выделенной, то должно быть определено отображение: $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{e}$ с помощью функций:

$$e^a = e^a(\mathbf{x}, t).$$

Это означает, что перемещение элементов внешней геометрии (и, соответственно, внутренней) по отношению к фоновому пространству P^3 будет восприниматься нами как изменение функций $e^a(\mathbf{x}, t)$ в пространстве и времени. Возникает вопрос - каким образом можно связать общие изменения координат e^a с физическими характеристиками наблюдаемых геометрических характеристик физического пространства, т.е можно ли придать физический смысл функциям $e^a(\mathbf{x}, t)$ или величинам, с ними связанными?

3 Изменение криволинейных координат со временем

Для выяснения физического смысла, которым можно наделить функции $e^a(\mathbf{x}, t)$, рассмотрим векторное поле $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$ с компонентами $V^\alpha = V^\alpha(\mathbf{x}, t)$, $\alpha = 1, 2, 3$ в проекции на фоновое пространство P^3 , удовлетворяющее следующей совокупности уравнений:

$$\frac{\partial e^a}{\partial t} + V^\beta \frac{\partial e^a}{\partial x^\beta} = 0, \quad a = 1, 2, 3. \quad (2)$$

Поле \mathbf{V} представляет собой поле переноса криволинейных координат относительно декартовой системы координат (системы отсчета) \mathbf{x} фонового пространства. Уравнение (2) во всех точках, где преобразование координат $\mathfrak{S} : \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{e}(\mathbf{x}, t)$ не вырождено, позволяет однозначно вычислить поле \mathbf{V} через функции $e^a(\mathbf{x}, t)$:

$$V^\alpha = -\frac{\partial x^\beta}{\partial e^a} \frac{\partial e^a}{\partial t}.$$

Условие не вырожденности отображения \mathfrak{S} эквивалентно неравенству нулю якобиана этого преобразования J :

$$J = \det \left(\frac{\partial e^a}{\partial x^\alpha} \right). \quad (3)$$

Заметим, что поле \mathbf{V} аналогично по своему смыслу гидродинамическому полю эйлеровых скоростей переноса лагранжевых маркеров, связанных с координатами e^a . Фактически можно утверждать, что в нашем подходе координаты e^a есть лагранжевы маркеры некоторых геометрических характеристик физического пространства в проекции на фоновое евклидово пространство.

Из (2) можно получить уравнение для якобиана J . Дифференцируя (2) по координатам \mathbf{x} , приходим к следующим соотношениям:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial e^a}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(V^\beta \frac{\partial e^a}{\partial x^\beta} \right) = 0.$$

Отсюда следует:

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial e^a}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(V^\beta \frac{\partial e^a}{\partial x^\beta} \right) = 0.$$

Поскольку матрицы $J_a^\alpha = \partial x^\alpha / \partial e^a$ и $J_\alpha^a = \partial e^a / \partial x^\alpha$ взаимно обратны, то имеем следующие тождества:

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial e^a}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{|J|} \frac{\partial |J|}{\partial t}, \quad \frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(V^\beta \frac{\partial e^a}{\partial x^\beta} \right) = V^\beta \frac{1}{|J|} \frac{\partial |J|}{\partial x^\beta} + \frac{\partial}{\partial x^\beta} V^\beta.$$

Отсюда следует соотношение на якобиан J :

$$\frac{\partial}{\partial t} |J| + \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(V^\beta |J| \right) = 0. \quad (4)$$

Это соотношение описывает изменение J со временем. Геометрический и физический смысл этого уравнения состоит в том, что для любой области V_0 физического пространства, граница которой задана с помощью фиксированных во времени уравнений в координатах \mathbf{e} , образом которой является область \mathcal{V}_0 в фоновом пространстве, выполняется закон сохранения:

$$\int_{\mathcal{V}_0} |J| dx dy dz = \int_{\mathcal{D}_0} de^1 de^2 de^3 = |\mathcal{V}_0| = \text{const}. \quad (5)$$

Здесь \mathcal{D}_0 - образ области \mathcal{V}_0 в декартовой карте координат \mathbf{e} , а $|\mathcal{V}_0|$ - величина объема области \mathcal{D}_0 , соответствующей \mathcal{V}_0 .

Рассмотрим области пространства V^3 , для которых выполнено условие (5). Это условие будем называть далее условием нормировки. На P^3 образы границ таких областей в терминах гидродинамики связаны жестко с лагранжевыми маркерами e^a . На этих областях функция $|J|$ представляет собой сохраняющуюся в силу (4) и (5) плотность маркеров. Поскольку мы предполагаем, что маркерами являются некоторые геометрические свойства физического пространства V^3 , то $|J|$ можно интерпретировать как плотность физического пространства по отношению к плоскому фоновому пространству. Это позволяет рассмотреть набор интегральных характеристик областей V_0 , которые можно интерпретировать как динамические свойства частиц. На каждой такой области с якобианом J можно связать инвариантную операцию усреднения физических

величин $Q(\mathbf{x}, t)$, связанных с фоновым пространством и определенных на этих областях с помощью соотношений:

$$\bar{Q} = \int_{\mathcal{V}_0} Q(\mathbf{x}, t) \tilde{J} d\mathcal{V}, \quad (6)$$

где

$$\tilde{J} = \frac{1}{|V_0|} |J|, \quad \int_{\mathcal{V}_0} \tilde{J} d\mathcal{V} = 1. \quad (7)$$

В частности, имеем:

$$X^\alpha = \bar{x}^\alpha = \int_{\mathcal{V}_i} x^\alpha \tilde{J} dV. \quad (8)$$

Величины $\mathbf{X} = \bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)$ можно рассматривать как средние координаты “частицы”, движущейся в области \mathcal{V}_0 и вместе с ней. Динамика такого движения может быть описана в терминах усредненных уравнений движения. По определению скорость движения частицы имеет следующий вид:

$$U^\alpha(t) = \frac{dX^\alpha}{dt} = \frac{d}{dt} \bar{x}^\alpha = \int_{\mathcal{V}_0} x^\alpha \frac{\partial \tilde{J}}{\partial t} d\mathcal{V} = - \int_{\mathcal{V}_0} x^\alpha \operatorname{div}(\tilde{J} \mathbf{V}) d\mathcal{V} + \int_{\partial \mathcal{V}_0} x^\alpha v^\beta d\sigma_\beta.$$

Здесь использовано уравнение (4) для J и условие, что точки края области \mathcal{V}_0 перемещаются как образы точек фиксированной области V_0 в V^3 . Поэтому поле \mathbf{v} с компонентами v_β совпадает со скоростью \mathbf{V} на крае области. Вычисляя по частям последний интеграл, находим:

$$\bar{V}^\alpha = \frac{d}{dt} \bar{x}^\alpha = \int_{\mathcal{V}_0} V^\alpha d\mathcal{V} + \int_{\partial \mathcal{V}_0} x^\alpha (v^\beta - V^\beta) d\sigma_\beta.$$

Полагая $v^\beta = V^\beta$, что означает, что скорость изменения границ области описывается полем V^β , приходим к окончательному равенству:

$$U^\alpha = \frac{d}{dt} \bar{x}^\alpha = \frac{dX^\alpha}{dt} = \int_{\mathcal{V}_0} V^\alpha \tilde{J} d\mathcal{V}. \quad (9)$$

Следовательно, средняя скорость движения “частицы” равна усредненной скорости переноса криволинейных координат, т.е. геометрических свойств, выделяющих частицу как область пространства. Аналогично вычисляем ускорение частицы:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} U^\alpha &= \int_{\mathcal{V}_0} \left(\frac{\partial V^\alpha}{\partial t} \tilde{J} + V^\alpha \frac{\partial \tilde{J}}{\partial t} \right) d\mathcal{V} + \int_{\partial \mathcal{V}_0} V^\alpha v^\beta d\sigma_\beta = \\ &= \int_{\mathcal{V}_0} \left(\frac{\partial V^\alpha}{\partial t} \tilde{J} - V^\alpha \operatorname{div}(\tilde{J} \mathbf{V}) \right) dV + \int_{\partial \mathcal{V}_0} V^\alpha v^\beta d\sigma_\beta = \\ &= \int_{\mathcal{V}_0} \left(\frac{\partial V^\alpha}{\partial t} + V^\beta \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} \right) \tilde{J} d\mathcal{V} + \int_{\partial \mathcal{V}_0} V^\alpha (v^\beta - V^\beta) d\sigma_\beta. \end{aligned}$$

Окончательно находим:

$$\frac{dU^\alpha}{dt} = \frac{d^2X^\alpha}{dt^2} = \int_{\mathcal{V}_i} \left(\frac{\partial V^\alpha}{\partial t} + V^\beta \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} \right) \tilde{J} dV. \quad (10)$$

Таким образом, среднее ускорение “частицы”, как области пространства, равно усредненному эйлерову ускорению потока, связанного с \mathbf{V} .

4 Классические уравнения усредненной динамики

Соотношение (10) можно рассматривать как уравнения Ньютона “частицы”, связанной с областью \mathcal{V}_0 , динамика которой определяется усредненными аналитическими свойствами гидродинамического потока \mathbf{V} . Такая интерпретация будет обоснованной, если удастся показать, что аналитические свойства потока \mathbf{V} можно интерпретировать в терминах известных силовых полей - электромагнитного и, возможно, гравитационного. Для этого рассмотрим следующее известное в гидродинамике тождество для эйлерова ускорения:

$$\frac{dV^\alpha}{dt} \equiv \frac{\partial V^\alpha}{\partial t} + V^\beta \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} = \frac{1}{2} \frac{\partial |\mathbf{V}|^2}{\partial x^\alpha} - [\mathbf{V} \times \text{rot} \mathbf{V}] + \frac{\partial V^\alpha}{\partial t}. \quad (11)$$

Представим поле \mathbf{V} формально в виде двух слагаемых:

$$\mathbf{V} = -\gamma_0 \mathbf{A} + \nabla \chi. \quad (12)$$

Множитель γ_0 введен для удобства дальнейшей интерпретации. Подставляя (12) в тождество (11), приходим к следующему его представлению:

$$\frac{dV^\alpha}{dt} \equiv \frac{\partial V^\alpha}{\partial t} + V^\beta \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\frac{1}{2} |\mathbf{V}|^2 + \frac{\partial \chi}{\partial t} + \gamma_0 \Phi \right) + \gamma_0 [\mathbf{V} \times \text{rot} \mathbf{A}]^\alpha - \gamma_0 \left(\frac{\partial A^\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x^\alpha} \right). \quad (13)$$

Здесь введена дополнительная функция Φ , которая позволяет теперь формально идентифицировать элементы этого представления, как параметры некоторого электромагнитного поля следующим образом:

$$E^\alpha = -\frac{\partial A^\alpha}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial x^\alpha}, \quad B^\alpha = \text{rot} \mathbf{A}.$$

В этом случае тождество (13) можно интерпретировать, опять же формально, как уравнения Эйлера динамики заряженной жидкости в магнитном поле с индукцией \mathbf{B} и электрическим напряженностью \mathbf{E} . С помощью процедуры усреднения мы можем теперь

ввести усредненное (макроскопическое) электромагнитное поле с параметрами

$$\bar{\mathbf{A}} = \int_{\mathcal{V}_i} \mathbf{A} \tilde{J} dV, \quad \bar{\mathbf{B}} = \int_{\mathcal{V}_i} \mathbf{B} \tilde{J} dV, \quad \bar{\mathbf{E}} = \int_{\mathcal{V}_i} \mathbf{E} \tilde{J} dV.$$

Это позволяет “микроскопические” поля \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{E} представить следующим образом:

$$\mathbf{A} = \bar{\mathbf{A}} + \mathbf{A}', \quad \mathbf{B} = \bar{\mathbf{B}} + \mathbf{B}', \quad \mathbf{E} = \bar{\mathbf{E}} + \mathbf{E}'.$$

Здесь \mathbf{A}' , \mathbf{B}' , \mathbf{E}' - поля с нулевым средним. В результате, формула для среднего ускорения примет следующий вид:

$$\frac{d}{dt} \bar{\mathbf{V}} = \gamma_0 \bar{\mathbf{E}} - \gamma_0 [\bar{\mathbf{V}} \times \bar{\mathbf{B}}] - \nabla_X \bar{U} + \mathbf{F}_q. \quad (14)$$

Это соотношение выглядит как уравнение Ньютона заряженной частицы, находящейся в электромагнитном поле $\{\bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{E}}\}$ и дополнительном консервативном поле с потенциалом \bar{U} :

$$\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{X}, t) = \sum_{|\mathbf{k}|=0} \frac{1}{|\mathbf{k}|!} \frac{\partial^{|\mathbf{k}|} U(\mathbf{X})}{\partial X_1^{k_1} \partial X_2^{k_2} \partial X_3^{k_3}} M_{\mathbf{k}}(t).$$

Здесь

$$U(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} |\mathbf{V}|^2 + \chi_t + \gamma_0 \Phi, \quad (15)$$

$\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$ - мультииндекс, $|\mathbf{k}| = k_1 + k_2 + k_3$, $|\mathbf{k}|! = k_1! k_2! k_3!$,

$$M_{\mathbf{k}} = M_{k_1 k_2 k_3}(t) = \int_{\mathcal{V}_i} (x^1 - X^1)^{k_1} (x^2 - X^2)^{k_2} (x^3 - X^3)^{k_3} \tilde{J} dV$$

Дополнительная сила \mathbf{F}_q , имеющая вид:

$$F_q^\alpha = \int_{\mathcal{V}_i} \gamma_0 [\mathbf{V}' \times \mathbf{B}']^\alpha \tilde{J} dV,$$

может рассматриваться как флуктуационная добавка, аналогичная добавкам, возникающим в квантовой теории при выводе усредненных уравнений из операторных уравнений.

Следуя этой общей идеологии, мы можем указать и общий вид интегралов движения системы уравнений Ньютона. Согласно (6) для сохраняющейся величины \bar{Q} имеем

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \int_{\mathcal{V}_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial t} + V^\alpha \frac{\partial Q}{\partial x^\alpha} \right) \tilde{J} dV = 0.$$

Отсюда следует, что сохраняются все величины \bar{Q} , которые имеют “микроскопический” образ $Q(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющий уравнению:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + V^\alpha \frac{\partial Q}{\partial x^\alpha} = 0.$$

В силу (2) все такие функции должны иметь следующий вид:

$$Q(\mathbf{x}, t) = \mathcal{Q}(e^1(\mathbf{x}, t), e^2(\mathbf{x}, t), e^3(\mathbf{x}, t)),$$

т.е. являются функциями только координат \mathbf{e} .

Проведенные построения демонстрируют, что в рамках предложенного подхода, классическая механика заряженных частиц, движущихся в электрическом и магнитном полях, воспроизводится в полном объеме. Однако для его обоснования с точки зрения теории элементарных частиц необходимо показать, что в рамках этого же подхода можно воспроизвести и основные положения квантовой теории.

5 Уравнение Шредингера

Рассмотрим соотношение (15) не как определение функции U , а как уравнение для функции χ :

$$\chi_t + \frac{1}{2}(|\nabla \chi|^2 + 2\gamma_0(\mathbf{A}, \nabla \chi) + \gamma_0^2|\mathbf{A}|^2) + \gamma_0\Phi - U = 0. \quad (16)$$

Это соотношение эквивалентно по форме уравнению Гамильтона-Якоби заряженной частицы в электромагнитном поле с векторным потенциалом \mathbf{A} , электрическим потенциалом Φ и некоторым дополнительным потенциалом U , при этом необходимо параметр γ_0 выбрать следующим образом: $\gamma_0 = e/mc$, где e - заряд электрона, m - его масса, а c - скорость света. Как хорошо известно, уравнение Гамильтона-Якоби связано с уравнением Шредингера. Чтобы установить эту связь, функцию U представим в виде суммы двух слагаемых:

$$U = \frac{\hbar^2}{2} \frac{\Delta|J|}{|J|} + U_G.$$

В результате соотношение (16) приобретает следующую форму:

$$\chi_t + \frac{1}{2}(|\nabla \chi|^2 + 2\gamma_0(\mathbf{A}, \nabla \chi) + \gamma_0^2|\mathbf{A}|^2) + \gamma_0\Phi - \frac{\hbar^2}{2} \frac{\Delta|J|}{|J|} + U_G = 0.$$

Объединяя последнее уравнение с уравнением (4), прямой проверкой (см., например, [?]) убеждаемся, что функция

$$\psi = \sqrt{|J|} e^{i\chi/\hbar} \quad (17)$$

удовлетворяет уравнению Шредингера заряженной частицы в электромагнитном поле:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(-i\hbar \nabla - \gamma_0 \mathbf{A} \right)^2 \psi + (\gamma_0 \Phi - U_G) \psi = 0. \quad (18)$$

В этом уравнении единственным элементом, который вызывает некоторые затруднения с интерпретацией, является потенциал U_G . Поскольку в данном уравнении нет пока элементов, которые можно было бы связать с ядерными силами (сильными и слабыми), то единственной разумной интерпретацией этого потенциала является его связывание с силами тяготения. Однако этот вопрос требует дальнейшего исследования.

Поскольку интерпретация всех слагаемых уравнения (18) не составляет труда (после сделанных комментариев в отношении потенциала U_G), это уравнение в действительности можно рассматривать как уравнение одной квантовой частицы, движущейся в области \mathcal{V}_0 , которая на самом деле отражает изменения локальных геометрических характеристик физического пространства в сопряженной области физического пространства V_0 . Действительно, квадрат модуля волновой функции равен якобиану отображения \mathfrak{S} , что можно рассматривать как геометрический эквивалент статистического постулата. При этом установленная связь между усредненной динамикой таких частиц в форме обычных уравнений Ньютона и уравнением Шредингера, обеспечивает выполнение принципа соответствия и теоремы Эренфеста. Линейность уравнения Шредингера обеспечивает выполнение принципа суперпозиции, которому необходимо дать в рамках данного подхода геометрическую интерпретацию.

6 Геометрический маркер и закон Кулона в криволинейных координатах

Для того, чтобы полученная модель квантовой механики стала действительно полной, необходимо ввести в рассмотрение системы частиц и указать явно те геометрические характеристики физического пространства, маркерами которых являются координаты e^a в реальной физической ситуации, с которой мы имеем дело в квантовых экспериментах.

Пусть на фоновой гиперплоскости P^3 в окрестности задана функция высоты \mathcal{F} физической гиперповерхности V^3 . Будем предполагать, что \mathcal{F} является функцией Морса [16], т.е. она является гладкой и все ее критические точки являются изолированными. В дальнейшем мы будем называть эту функцию фундаментальным потенциалом. Связем

с функцией \mathcal{F} выделенную систему координат с помощью следующих уравнений:

$$\frac{\partial x^\beta}{\partial e^a} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^\beta} = \varepsilon e^a, \quad a = 1, 2, 3. \quad (19)$$

Здесь $\varepsilon = \pm 1$ в зависимости от того, достигает ли \mathcal{F} максимума или минимума в точке $P_0(\mathbf{x}_0, t)$ с координатами \mathbf{x}_0 , являющейся образом начала координат e^a , т.е точки, в которой $e^a(\mathbf{x}_0, t) = 0$. Это означает:

$$\varepsilon = \text{sign} \det \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right) \Big|_{P_0}. \quad (20)$$

То, что \mathcal{F} достигает в точке P_0 максимума или минимума, следует из (19). Действительно, следствием (19) является соотношение:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^\beta} = \varepsilon \frac{\partial e^a}{\partial x^\beta} e^a = \varepsilon \frac{\partial |\mathbf{e}|^2}{\partial x^\beta}.$$

Отсюда находим, что в окрестности точки P_0 функция \mathcal{F} имеет следующий вид:

$$\mathcal{F} = \varepsilon |\mathbf{e}(\mathbf{x})|^2 / 2 + \mathcal{F}_0, \quad (21)$$

где \mathcal{F}_0 - постоянная интегрирования. Учитывая, что в точке $P_0(\mathbf{x}_0)$: $\mathbf{e}(\mathbf{x}_0) = 0$, находим, что $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}(\mathbf{x}_0)$, и функция $\mathcal{F}(\mathbf{x})$ в точке \mathbf{x}_0 достигает локального экстремума, минимума или максимума, в зависимости от знака ε , откуда следует соотношение (20).

Для того, чтобы прояснить физический смысл выбора в качестве связи между функцией \mathcal{F} и $e^a(\mathbf{x}, t)$ системы уравнений (19) или ее эквивалента (21), покажем, следуя [8, 9, 10], что при таком выборе с функцией \mathcal{F} естественным образом связывается полевая структура, эквивалентная системе точечных целочисленных зарядов, динамика которых описывается с помощью уравнений Максвелла.

Рассмотрим на декартовой карте системы координат \mathbf{e} следующее тождество:

$$\frac{\partial}{\partial e^a} \left(\frac{e^a}{|\mathbf{e}|^3} \right) = 4\pi\delta(\mathbf{e}). \quad (22)$$

При преобразовании от координат \mathbf{e} к “фоновым” декартовым координатам \mathbf{x} это тождество приобретает следующий вид:

$$\frac{1}{|J|} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(|J| \frac{\mathcal{E}^\alpha}{|\mathbf{e}(\mathbf{x})|^3} \right) = 4\pi\delta(\mathbf{e}(\mathbf{x})). \quad (23)$$

Здесь $|\mathbf{e}|^2 = e^a e^a = (e^1)^2 + (e^2)^2 + (e^3)^2$ - квадрат длины радиус-вектора \mathbf{e} на декартовой карте,

$$\mathcal{E}^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a} e^a,$$

J - якобиан преобразования координат $\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{x}$:

$$J = \det \left(\frac{\partial e^a}{\partial x^\alpha} \right).$$

Поле с компонентами \mathcal{E}^α может быть представлено следующим образом:

$$\mathcal{E}^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a} \frac{\partial x^\beta}{\partial e^a} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^\beta},$$

Для e^a имеется тождество:

$$e^a = \frac{1}{2} \frac{\partial |\mathbf{e}|^2}{\partial e^a},$$

Исходя из этого тождества и условия (19), находим:

$$E_\alpha = \frac{\partial e^a}{\partial x^\alpha} e^a = \frac{1}{2} \frac{\partial e^a}{\partial x^\alpha} \frac{\partial |\mathbf{e}|^2}{\partial e^a} = \frac{1}{2} \frac{\partial |\mathbf{e}|^2}{\partial x^\alpha} = \varepsilon \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^\alpha}. \quad (24)$$

Таким образом, поле с компонентами E_α является потенциальным, с потенциалом равным $\mathcal{F} = \varepsilon |\mathbf{e}(\mathbf{x})|^2 / 2 + \mathcal{F}_0$, и обращается в ноль в точке расположения точечного заряда. При этом поле \mathbf{D} из (23) с компонентами:

$$D^\alpha = \frac{|J|}{|\mathbf{e}|^3} \gamma^{\alpha\beta} E_\beta, \quad (25)$$

где

$$\gamma^{\alpha\beta} = \frac{dx^\alpha}{de^a} \frac{dx^\beta}{de^a}$$

имеет кулоновскую особенность, знак заряда которой определяется параметром ε . Тензор $\gamma^{\alpha\beta}$ - описывает анизотропию в форме поля вблизи кулоновской особенности, связанную с функциональной формой фундаментального потенциала. Это легко проверяется при сделанном выше требовании, что $\mathbf{e} = \mathbf{e}(\mathbf{x})$ в окрестности точки $\mathbf{e} = 0$ являются гладкими. В силу (21):

$$|\mathbf{e}|^2 = 2|\mathcal{F} - \mathcal{F}_0|. \quad (26)$$

Это соотношение указывает геометрический смысл отображения $\mathfrak{S} : \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{e}$. Из него следует, что каждая изоповерхность функции \mathcal{F} , соответствующая значению этой функции \mathcal{F}_1 , в некоторой окрестности точки P_0 отображается в двумерную сферу радиуса $R = \sqrt{2|\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_0|}$ на декартовой карте системы координат e^a .

Отметим, что в соответствии с (26) соотношение (25) можно переписать в таком виде:

$$D^\alpha = \frac{|J|}{|2(\mathcal{F} - \mathcal{F}_0)|^{3/2}} \varepsilon \gamma^{\alpha\beta} \nabla_\beta \mathcal{F} = |J| \nabla_\beta \Phi_c, \quad (27)$$

которое будут использовано далее. Здесь

$$\Phi_c = \frac{\varepsilon}{|2(\mathcal{F} - \mathcal{F}_0)|^{1/2}}. \quad (28)$$

Покажем теперь, что в окрестности точки P_0 , являющейся образом начала координат e^a , уравнение (23) эквивалентно первому уравнению Максвелла для индукции точечного заряда, расположенного в этой точке. В силу сделанных предположений и, исходя из свойств δ -функции Дирака, в окрестности точки P_0 имеем:

$$\delta(\mathbf{e}(\mathbf{x})) = \frac{1}{|J|} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \quad (29)$$

В результате уравнение (23) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(|J| \gamma^{\alpha\beta} \frac{E_\beta}{|2(\mathcal{F} - \mathcal{F}_0)|^{3/2}} \right) = 4\pi\varepsilon \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \quad (30)$$

или

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\varepsilon \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \quad (31)$$

Это уравнение представляет собой первое уравнение Максвелла для поля электрической индукции точечного заряда в фоновом координатном пространстве. В силу этого векторное поле индукции \mathbf{D} в окрестности точки $\mathbf{e} = 0$ можно представить в следующем виде:

$$D^\alpha = |J| \gamma^{\alpha\beta} \frac{E_\beta}{|2(\mathcal{F} - \mathcal{F}_0)|^{3/2}} = \frac{\varepsilon r^\alpha}{|\mathbf{r}|^3} + [\operatorname{rot} \mathbf{h}]^\alpha, \quad (32)$$

где \mathbf{h} - некоторое гладкое векторное поле, $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$. Это означает, что вид поля индукции в окрестности точечного заряда в фоновом пространстве отличается от строго кулоновского закона на добавочное поле $\operatorname{rot} \mathbf{h}$, дивергенция которого строго равна нулю, что в классической электродинамике трактуется как наличие магнитного поля.

Проведенные построения показывают, что уравнения (19) и их интеграл (21) связывают элементы аналитической структуры функции \mathcal{F} - ее экстремумы, с точечными электрическими зарядами, поле индукции которых удовлетворяет первому уравнению теории Максвелла. Согласно (21), физическими маркерами, к которым привязана система координат e^a в таком подходе, являются экстремумы функции \mathcal{F} , воспринимаемые как точечные заряды, и ее изоповерхности, которые в соответствии с (21) отображаются в сферы конечного радиуса. Поскольку функция \mathcal{F} интерпретируется как элемент внешней геометрии физического пространства, именно, как функция высоты, то мы получаем желаемую конструкцию для построения модели квантовой механики,

описанной в первых разделах данной статьи. Отметим, что в принципе в рамках данной теории имеется возможность рассматривать неизолированные экстремумы функции \mathcal{F} . Такие структуры будут порождать неточечные сингулярные источники электрического поля, которые возникают, например, в алгебро-геометрических теориях (см., например,[17, 18]). Однако, в рамках данного подхода можно такие структурные элементы не рассматривать, поскольку неточечные экстремумы и седловые точки являются топологически неустойчивыми и устраняются бесконечно малыми шевелениями (бесконечно малыми возмущениями) функции \mathcal{F} [11, 16], поскольку функции Морса образуют всюду плотное множество функций в пространстве гладких функций.

7 Критические точки гладкой функции и точечные заряды

Конструкция связывания координат e^a с элементами аналитической структуры фундаментального потенциала \mathcal{F} определена, пока по отдельности, в каждой окрестности ее экстремумов. Для построения полного описания динамики “частиц” на всем физическом пространстве, необходимо построить продолжение этой конструкции на все физическое пространство V^3 и фоновое пространство \mathcal{V}^3 .

Пусть теперь функция \mathcal{F} , как функция Морса, имеет экстремумы в точках P_i с координатами \mathbf{x}_i , в которых обращаются в ноль все ее первые производные:

$$\left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^\alpha} \right|_{P_i} = 0, \quad (33)$$

Среди точек, в которых выполняются условия (33), имеются и седловые точки, которые мы будем обозначать S_i . В совокупности все точки, в которых выполняются условия (33), принято называть критическими. По определению, функция Морса, в том числе \mathcal{F} , обладает тем свойством, что все критические точки этой функции (в том числе и седловые ее точки) имеют окрестность, в которой отсутствуют другие ее критические точки [16, 19]. Седловые точки и экстремумы в теории Морса [16, 19] можно различать с помощью индекса Морса m . Индекс Морса по определению равен числу отрицательных собственных значений матрицы вторых производных этой функции в соответствующей критической точке, т.е. матрицы:

$$M_{\alpha\beta}^{(i)} = \left. \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right) \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i}.$$

Для минимума $m = 0$, для максимума $m = 3$, а для двух типов седловых точек, соответственно, $m = 1, 2$.

В соответствии с проведенными построениями в предыдущем разделе, в окрестности каждого экстремума функции \mathcal{F} , расположенного в точке P_i существует система координат $e^a(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющая уравнению (19):

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial e^a} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^\alpha} = \varepsilon_i e^a, \quad (34)$$

где ε_i вычисляется по правилу:

$$\varepsilon_i = \text{sign} \det \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right) \Big|_{P_i}. \quad (35)$$

аналогичному (20). При этом в этой окрестности каждой точки P_i будет выполняться соотношение:

$$\mathcal{F} = \varepsilon_i \frac{1}{2} |\mathbf{e}|^2 + \mathcal{F}_i, \quad (36)$$

где $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}(\mathbf{x}_i)$ - значение функции \mathcal{F} в экстремуме. В этой же окрестности для поля \mathbf{D} :

$$\mathbf{D} = \frac{|J|}{|\mathbf{e}|^3} \varepsilon \gamma^{\alpha\beta} \nabla_\beta \mathcal{F}, \quad (37)$$

будет выполняться соотношение (31). Если объединить данные соотношения для всех окрестностей точек P_i , можно записать:

$$\text{div} \mathbf{D} = 4\pi \sum_i \varepsilon_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i). \quad (38)$$

Для решения задачи о продолжении связи между \mathcal{F} и e^a на все пространство P^3 и, соответственно, V^3 , необходимо в первую очередь установить насколько далеко можно непрерывно продолжить окрестности каждого экстремума P_i , в которых эти соотношения связи заведомо выполняются без нарушения непрерывности $e^a(\mathbf{x}, t)$. Это можно сделать, анализируя соотношения (21) в окрестности каждого экстремума. Каждый экстремум функции \mathcal{F} со значением в экстремуме, равным \mathcal{F}_i , отображается в начало координат декартовой карты системы координат e^a так, что все изоповерхности функции \mathcal{F} , лежащие вблизи данного экстремума, отображаются в концентрические сферы с центром в начале координат (см. рис. 1). В силу этого, отображение $\mathfrak{S} : \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{e}$ является многолистным. Поскольку каждая изоповерхность функции \mathcal{F} отображается в концентрическую сферу радиуса $R_i(\mathcal{F}) = \sqrt{2|\mathcal{F} - \mathcal{F}_i|}$ на декартовой карте системы координат e^a , то остается решить вопрос о существовании для каждого экстремума

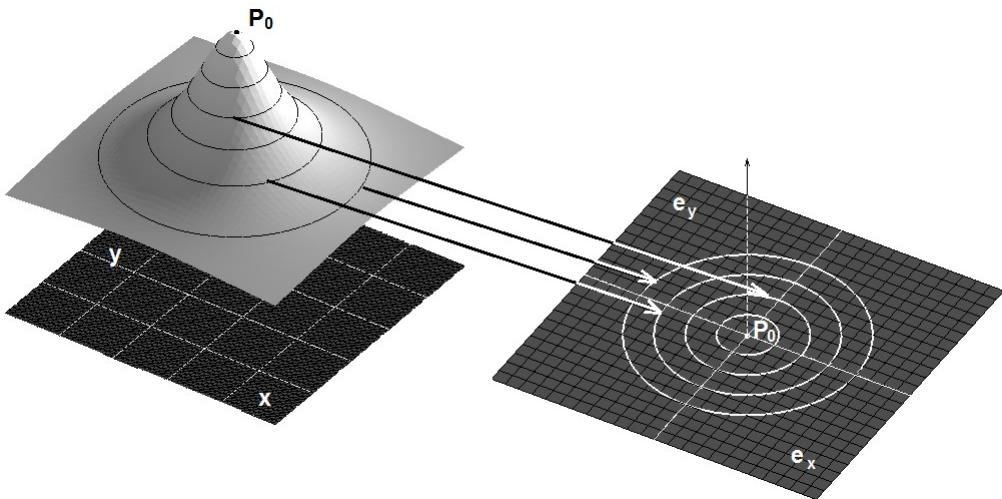


Рис. 1. Двумерный аналог отображения изоповерхностей функции \mathcal{F} в концентрические окружности на декартовой карте e . P_0 - экстремум и его образ на карте e

пределной изоповерхности, которая отображается в сферу. Такой особой изоповерхностью согласно теории Морса [16, 19], может быть только особая изоповерхность, на которой лежит хотя бы одна седловая точка (см. рис. 2), либо изоповерхность, содержащая бесконечно удаленную точку. Согласно теории Морса, особая изоповерхность ограничивает область, представляющую собой несвязное объединение клеток, т.е открытых множеств, топологически диффеоморфных шару конечного радиуса. В каждой такой клетке находится по одному экстремуму. Отсюда следует, что, если исключить из анализа особые изоповерхности, содержащие бесконечно удаленную точку, то все оставшееся пространство разбивается на клетки, ограниченные особыми изоповерхностями, при этом в каждой из клеток можно непрерывно задать систему координат e^a , для которой выполняются уравнения связи (19) и (21).

Отметим, что области, ограниченные особыми изоповерхностями, содержащими бесконечно удаленную точку, в силу свойств функции Морса можно включить в рассматриваемую общую схему. Такая ситуация возникает, например, когда функция \mathcal{F} имеет только два экстремума - максимум и минимум. Это можно сделать, если к пространству P^3 , которое мы рассматриваем как евклидово, и, соответственно, V^3 , добавить бесконечно удаленную точку. Такая процедура называется компактификацией [12]. В этом случае изоповерхность, содержащая бесконечно удаленную точку, превращается либо в двумерную сферу, как это имеет место в описанном случае с двумя экстремумами

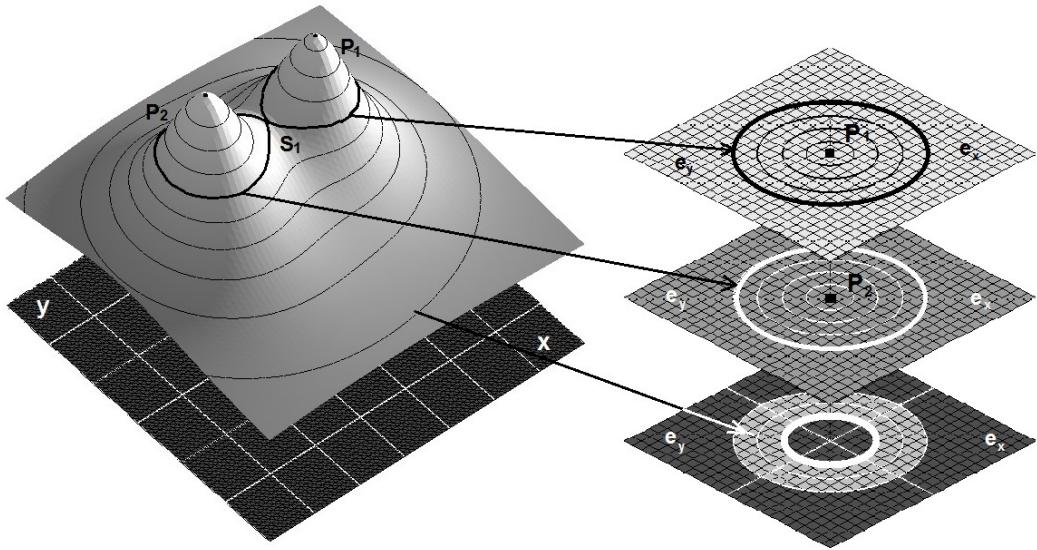


Рис. 2. Двумерный аналог функции \mathcal{F} с седловой точкой S_1 . P_1 и P_2 - экстремумы, лежащие внутри клеток, ограниченных особой изоповерхностью. Особая изоповерхность выделена жирной линией.

(Рис. 2)- максимумом и минимумом \mathcal{F} , либо в особую изоповерхность с хотя бы одной седловой точкой. Однако для большинства выводов в данной работе рассмотрение изоповерхностей с бесконечно удаленной точкой не является обязательным. Кроме этого, ниже будет дано еще одно простое решение проблемы с бесконечно удаленной точкой. Поэтому мы не будем его подробно разбирать в данной работе.

8 Особые изоповерхности и точечные заряды

Для завершения проблемы продолжения остается решить вопрос о том, как следует дополнить правую часть уравнения (38) на особых изоповерхностях, чтобы это уравнение имело смысл везде на P^3 и V^3 . Эта проблема может быть решена и другим путем - именно введением некоторых универсальных граничных условий на особых изоповерхностях, с помощью которых можно было бы сшивать отдельные координатные карты e^a , заданные в окрестности каждого экстремума соотношениями (19) и (21). Однако вопрос уточнения правой части (38) является чрезвычайно важным, поскольку указывает в действительности величину заряда в любой области, включающей особые изоповерхности и седловые точки.

Рассмотрим в качестве наглядного примера область \mathcal{V}_i , содержащую два экстремума

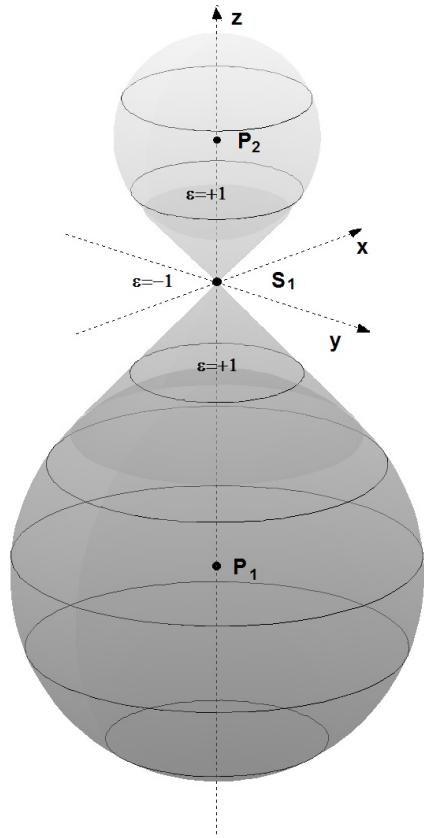


Рис. 3. Вид особой изоповерхности вблизи седловой точки.

в точках P_1 и P_2 и ограниченную особой изоповерхностью функции \mathcal{F} . На этой особой изоповерхности лежит седловая точка S_1 . Двумерный аналог такой структуры физического пространства приведен на Рис.2. Пусть на этой особой изоповерхности функция \mathcal{F} принимает значение $\mathcal{F}_i^{(s)}$. Типичный пример такой области представлен на Рис. 3.

В окрестности седловой точки рассмотрим уравнение (19). По определению в седловой точке все первые производные функции \mathcal{F} обращаются в ноль. Следовательно, если матрица Якоби отображения $\mathfrak{S} : \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{e}$ не вырождена, то в пределе к точке S_i имеем:

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}(S_i)} e^a = \varepsilon_i \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}(S_i)} \left(\frac{\partial x^\beta}{\partial e^a} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^\beta} \right) = 0.$$

Здесь $\mathbf{x}(S_i)$ - координаты точки S_i в \mathcal{V}_i . Отсюда вытекает, что продолжая уравнение (19) в седловую точку мы должны учесть, что в правой части части тождества (22) после его преобразования в координаты фонового пространства должен появиться дополнительный точечный источник в форме δ -функции, в силу того, что в этой точке $e^a(\mathbf{x}(S_i), t) = 0$. Действительно, в правой части (22) содержится δ -функция $\delta(\mathbf{e})$. Поэтому

му в окрестности седловой точки, не содержащей других критических точек, имеем:

$$\delta(\mathbf{e}(\mathbf{x}, t)) = \frac{1}{|J(\mathbf{x}_i(S_i))|} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}(S_i)).$$

Однако возникает вопрос - какой знак $\varepsilon(S_1)$ необходимо выбрать в уравнении (19) в окрестности этой седловой точки. Если приближаться к ней изнутри области \mathcal{V}_i от экстремума P_1 или P_2 , то, как изображено на рис. 3, этот знак будет равен $\varepsilon = +1$. Сам выбор знака определен условно и соответствует минимумам \mathcal{F} в точках P_1 и P_2 . Если же подходить к S_1 извне, то знак числа ε будет обратным $\varepsilon = -1$. Отсюда следует, что в окрестности седловой точки S_1 уравнение связи (19) необходимо записать в следующем виде:

$$\frac{\partial x^\beta}{\partial e^a} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^\beta} = \varepsilon_a e^a, \quad (39)$$

где выбор знака для каждого индекса свой и определяется тем, по какой координате, приближаясь к точке $e^a = 0$, функция \mathcal{F} в координатах e^a достигает максимума или минимума. В результате интеграл уравнения (39) можно представить в следующем виде:

$$\mathcal{F} = \varepsilon_i \frac{1}{2} \left((e^1)^2 - (e^2)^2 - (e^3)^2 \right) + \mathcal{F}_i^{(s)}. \quad (40)$$

Здесь $\varepsilon_i = \pm 1$ в зависимости от того, какого типа индекс Морса имеет седловая точка, именно $\varepsilon_i = (-1)^m$, где m - индекс Морса седловой точки. При этом

$$\varepsilon_j = \text{sign} \det \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right) \Big|_{S_j}. \quad (41)$$

Используя такие обозначения, убеждаемся, что соотношения (19) и (39), а так же (21) и (40), имеют общий вид.

Для того, чтобы решить вопрос об окончательном виде уравнения (38) на всем фоновом пространстве с учетом существования седловых точек, необходимо рассмотреть вопрос о граничных условиях поля \mathbf{D} особых изоповерхностей. Как было показано, в самой седловой точке структура отображения такова, что в фоновом пространстве этой точке, как и в экстремумах, отвечает точечный источник - точечный заряд. Знак и величина этого заряда определяется (41). Общий же заряд в теории будет определяться граничными условиями для поля \mathbf{D} на особых изоповерхностях, поскольку с физической точки зрения разрыв нормальной составляющей поля \mathbf{D} на особой изоповерхности эквивалентен появлению на них поверхностного заряда. Такие заряды являются лишь артефактом математического описания. В случае непрерывности поля \mathbf{D} на особых

изоповерхностях мы исключаем из теории нефизические поверхностные заряды и обеспечиваем выполнение наблюдаемой целочисленности электрических зарядов частиц. В силу определения (37), а также гладкости \mathcal{F} и ортогональности градиента $\nabla\mathcal{F}$ особой изоповерхности, условие непрерывности \mathbf{D} на ней сводится к выполнению условия:

$$\left(\frac{|J|}{|\mathbf{e}(\mathbf{x}, t)|^3}\right) \Big|_{\partial\mathcal{V}_i+0} = \left(\frac{|J|}{|\mathbf{e}(\mathbf{x}, t)|^3}\right) \Big|_{\partial\mathcal{V}_i-0}, \quad (42)$$

где $\partial\mathcal{V}_i + 0$ - означает предел снаружи к точкам особой изоповерхности, которая является границей области \mathcal{V}_i , а $\partial\mathcal{V}_i - 0$ - изнутри. Выполнение условия непрерывности (42), обеспечивающее отсутствие поверхностных зарядов на особых изоповерхностях позволяет в качестве уравнения для функции \mathbf{D} на всем фоновом пространстве записать уравнение:

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi \sum_i \varepsilon_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(P_i)) + \sum_j \varepsilon_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(S_j)), \quad (43)$$

содержащее в качестве источников исключительно точечные заряды, величина и знак которых определяется с помощью индекса Морса критических точек фундаментального потенциала \mathcal{F} :

$$\varepsilon_i = (-1)^{m_i}, \quad (44)$$

где m_i - индекс Морса i -той критической точки.

Анализ и физический смысл граничных условий (42) мы оставим на потом. Отметим лишь, что эти граничные условия должны рассматриваться в совокупности с условием непрерывности поля \mathbf{V} , определяющего перенос системы координат $e^a(\mathbf{x}, t)$ на фоновом пространстве. В силу (17) условия (42) сводятся к непрерывности отношения квадрата модуля волновой функции Ψ к функции $|\mathbf{e}(\mathbf{x}, t)|^3 = (2|\mathcal{F} - \mathcal{F}_i|)^{3/2}$, которая при различном выборе значений \mathcal{F}_i в различных областях \mathcal{V}_i испытывает разрыв на особой изоповерхности (непрерывной является функция \mathcal{F}). Это противоречит постулату непрерывности волновой функции в квантовой теории. Это означает, что для выполнения непрерывности квадрата модуля волновой функции выбор значения \mathcal{F}_i должен быть сделан универсально для всех областей \mathcal{V}_i .

9 Электрический заряд, частицы и топология

Рассмотрим теперь более глубоко следствия, которые вытекают из выведенного в предыдущем разделе уравнения (43). Наиболее важным из них является топологический характер величины электрического заряда, который соответствует этому уравнению.

нию. Интегрируя (43) по некоторой области \mathcal{V} фонового пространства, получаем следующее соотношение:

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \mathbf{D} d\mathcal{V} = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\mathcal{V}} (\mathbf{D}, \mathbf{n}) d\sigma = \sum_{i=1}^N (-1)^{m_i}, \quad (45)$$

где сумма в правой части берется по всем критическим точкам функции \mathcal{F} . Величина Q в силу этого определения является величиной суммарного заряда, сосредоточенного в области \mathcal{V} . Используя (35) и (41), получаем для электрического заряда Q следующее соотношение:

$$Q = \sum_{i=1}^N \operatorname{sign} \det \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right) \Big|_{P_i}, \quad (46)$$

где сумма берется по всем критическим точкам функции \mathcal{F} . Сумма в правой части является топологическим инвариантом [20] векторного поля $\mathbf{E} = \nabla \mathcal{F}$, равным половине индекса этого поля на поверхности $\partial\mathcal{V}$, ограничивающей область \mathcal{V} . Если векторное поле \mathbf{E} трансверсально поверхности $\partial\mathcal{V}$ (см. [20]), т.е. всюду на этой поверхности направлено либо наружу либо внутрь области \mathcal{V} , то в этом случае согласно теореме Пуанкаре-Хопфа об индексе число Q равно с точностью до знака эйлеровой характеристики $\chi(\mathcal{V})$ области \mathcal{V} [11, 20, 21]. Этот же результат можно получить и с помощью теоремы Пуанкаре-Хопфа об индексе векторного поля (в данном случае для \mathbf{E}) на области \mathcal{V} . Частным случаем выбора области \mathcal{V} , на границе которой поле \mathbf{E} трансверсально $\partial\mathcal{V}$, точнее ортогонально ей, является область, ограниченная изоповерхностью функции \mathcal{F} и, в частности, ограниченная особой изоповерхностью. Учитывая, что особые изоповерхности играют роль выделенных поверхностей в фоновом пространстве, которые разделяют его на отдельные клетки, динамика в которых обоснована с точки зрения уравнения Шредингера (18), то можно предположить, что именно эти поверхности являются тем элементом геометрии, которые позволяют однозначно выделять в пространстве отдельные области, которые в эксперименте ведут себя как элементарные частицы. Следуя этой гипотезе, будем понимать под **отдельной частицей геометрически выделенную область пространства, ограниченную односвязной особой изоповерхностью фундаментального потенциала \mathcal{F}** . Поскольку границы особых изоповерхностей выделены на V^3 уравнениями вида:

$$e^2 = R^2 = const,$$

то для них выполнено основное требование, которое предъявлялось при выводе уравнения Шредингера (18) для областей, интерпретируемых как отдельные квантовые части-

цы. Поэтому сформулированное понятие частицы автоматически приобретает свойства квантовых объектов, состояние которых описывается уравнением Шредингера.

Основываясь на этом предположении, построим классификацию возможных топологических структур этих областей и свяжем ее с величиной электрического заряда, который такие частицы будут иметь. Это позволит сопоставить эту топологическую классификацию реальным частицам и установить способность данного подхода объяснять закономерности, которые наблюдаются в экспериментах с реальными элементарными частицами.

Основой классификации является фундаментальная в данной теории формула, являющаяся следствием (46), как объяснялось выше, связывающая заряд частицы с эйлеровой характеристикой областей, ограниченных особыми изоповерхностями:

$$Q = \varepsilon \chi(\mathcal{V}), \quad (47)$$

где $\varepsilon = \pm 1$ - знак, определяющийся тем, как направлено поле \mathbf{E} на границе $\partial\mathcal{V}$ области \mathcal{V} : $\varepsilon = +1$ в случае, если \mathbf{E} на $\partial\mathcal{V}$ направлено везде наружу, и $\varepsilon = -1$, если внутрь. Геометрический смысл знака заряда в рамках трактовки фундаментального потенциала \mathcal{F} как функции высоты физической гиперповерхности в W^4 , состоит в направлении "выгнутости" физического пространства в W^4 (см. Рис. 5) по отношению к фоновой гиперповерхности. Эйлерова характеристика n -мерных многообразий M^n определяется формулой:

$$\chi(M^n) = \sum_{i=1}^n (-1)^i p_i, \quad (48)$$

где p_i - размерности групп гомологий многообразия M^n i -той размерности (или числа Бетти) [20, 12]. Эта целочисленная величина является топологическим инвариантом, т.е. не зависит от гладких деформаций многообразия M^3 . Нас будут интересовать двумерные многообразия - изоповерхности фундаментального потенциала, и трехмерные области, ограниченные этими изоповерхностями.

Изоповерхности функции Морса (возможно, после компактификации) представляют собой [16, 19] замкнутые (не имеют границ) двумерные ориентируемые (двусторонние) многообразия. Все такие изоповерхности с точностью до гладких деформаций эквивалентны двумерной сфере с g ручками [11, 12]. В соответствии с этой классификацией Эйлерова характеристика всех двумерных замкнутых ориентируемых компактных поверхностей может быть вычислена по формуле:

$$\chi(\sigma_g^2) = 2(1 - g). \quad (49)$$

При этом $p_0 = 1$, $p_1 = 2g$, $p_2 = 1$ [11]. Так для двумерной сферы $\sigma_0^2 = \mathcal{S}^2$, число g которой равно 0, $\chi(\sigma_0^2) = 2$, для тора, эквивалентного по определению сфере с числом ручек $g = 1$ $\chi(\sigma_1^2) = 0$, и для “кренделя” с $g = 2$: $\chi(\sigma_2^2) = -2$ и т.д.

Существует общая формула [11, 20], связывающая Эйлеровы характеристики двумерных замкнутых ориентируемых поверхностей σ с эйлеровыми характеристиками областей \mathcal{V} , границами которых являются поверхности $\sigma = \partial\mathcal{V}$:

$$\chi(\mathcal{V}) = \frac{1}{2}\chi(\partial\mathcal{V}). \quad (50)$$

Поэтому величина заряда, соответствующая (47) в области ограниченной изоповерхностью функции \mathcal{F} , определяется исключительно структурой границы области, т.е. числом g ее ручек, и может быть вычислена по формуле:

$$Q = \frac{\varepsilon}{2}\chi(\partial\mathcal{V}) = \varepsilon(1 - g). \quad (51)$$

Для области, ограниченной сферой, заряд может быть равен ± 1 : $Q = \pm 1$, для области, ограниченной тором, заряд может быть нулевым: $Q = 0$, для кренделя $Q = \mp 1$, и т.д. Таким образом, заряд любой частицы определяется исключительно структурой ее особой изоповерхности.

10 Классификация частиц

Структура частиц в соответствии с их определением может быть описана как структура областей, ограниченных на фоновом пространстве особыми изоповерхностями фундаментального потенциала. Особая изоповерхность не является гладкой, поскольку на ней лежат седловые точки (по крайней мере одна), в которой изоповерхность имеет конусную особенность (см. Рис 3). Поэтому для классификации структуры областей \mathcal{V}_i удобнее использовать не саму границу этой области, а бесконечно близкую изоповерхность фундаментального потенциала, которая уже является гладкой ориентированной и всегда может быть выбрана компактной (возможно, с применением процедуры компактификации).

Пусть значение \mathcal{F}_s фундаментального потенциала соответствует особой изоповерхности $\partial\mathcal{V}_i$, являющейся границей некоторой области \mathcal{V}_i . Обозначим через $\mathcal{W}_i^+(\delta\mathcal{F})$ и $\mathcal{W}_i^-(\delta\mathcal{F})$ области с границами $\partial\mathcal{W}_i^+(\delta\mathcal{F})$ и $\partial\mathcal{W}_i^-(\delta\mathcal{F})$, которые являются изоповерхностями фундаментального потенциала с его значениями $\mathcal{F}_s + \delta\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}_s - \delta\mathcal{F}$ соответственно,

где $\delta\mathcal{F} > 0$ - любое неотрицательное бесконечно малое число. В силу того, что \mathcal{F} - функция Морса, все критические точки этой функции изолированы. Это означает, что для любой особой изоповерхности всегда найдется такое неотрицательное достаточно малое число $\delta\mathcal{F}$, что поверхности $\partial\mathcal{W}_i^+(\delta\mathcal{F})$ и $\partial\mathcal{W}_i^-(\delta\mathcal{F})$ будут существовать и будут гладкими ориентируемыми. Поскольку, только небольшое число изоповерхностей функции Морса может содержать бесконечно удаленную точку, то всегда можно выбрать величину $\delta\mathcal{F}$ таким образом, что изоповерхности $\partial\mathcal{W}_i^\pm(\delta\mathcal{F})$ будут компактными и не содержать бесконечно удаленную точку. Таким образом, мы всегда можем избавиться от областей с бесконечно удаленной точкой. Поэтому, говоря дальше о классификации частиц по структуре областей \mathcal{V}_i , мы будем подразумевать не саму эту область, а область \mathcal{W}_i^\pm , которая целиком содержит область \mathcal{V}_i . Одна из областей, либо \mathcal{W}_i^+ , либо \mathcal{W}_i^- , всегда будет удовлетворять этому требованию. Для удобства индекс в виде знака в обозначении этой области мы будем опускать.

Как уже отмечалось, для вычисления заряда частиц достаточно знать структуру границы области \mathcal{W}_i . Однако для описания внутренней структуры областей \mathcal{W}_i этого не достаточно. Топологическая структура трехмерных многообразий не имеет столь же простой классификации, как структура двумерных многообразий. Однако для целей данной работы достаточно будет ограничиться только такими областями, которые могут быть получены из трехмерного шара или любой другой односвязной области \mathcal{W}_i , ограниченной изоповерхностью функции \mathcal{F} , с помощью простой топологической перестройки вклеивания трехмерной ручки. Такая перестройка по аналогии с двумерным случаем (см. [11]) состоит в том, что из трехмерной области \mathcal{W}_i вырезаются два шара, и по краям этих шаров к ним приклеивается трехмерный цилиндр. Получившаяся конструкция называется трехмерной ручкой или ручкой Уилера. Такие области являются неодносвязными. Повторяя такую процедуру b раз, мы получаем область \mathcal{W}_i , имеющую b ручек Уилера. Идея рассмотрения таких областей для описания структуры частиц была предложена в работах [8, 9, 10]. Следуя этой идее, для описания частицы необходимо указать два основных числа: число g - число ручек границы области \mathcal{W}_i и число ручек Уилера b , "вклеенных" в эту область. Знак барионного заряда, равный по модулю числу ручек Уилера b , определяется тем, с какой стороны по отношению к фоновому пространству такая ручка вклеена (см. Рис. 5). Для полноты описания всех возможных ситуаций, кроме указанных типов структуры областей, следует указать на возможность того, что область \mathcal{W}_i , может сама включать некоторое число аналогичных областей $\mathcal{W}_{i,m}$: $\mathcal{W}_{i,m} \subset \mathcal{W}_i$.

Введя в рассмотрение области, содержащие ручки Уилера, мы теперь можем уточнить формулу для заряда частицы. Как уже отмечалось, величина заряда определяется числом g ручек границы области \mathcal{W}_i , однако в определение эйлеровой характеристики входят согласно (48) числа Бетти p_i , $i = 0, 1, 2, 3$, значения которых определяются кроме этого еще и числом b ручек Уилера. Для рассматриваемого случая трехмерных компактных ориентируемых областей с границей $\partial\mathcal{W}_i$ для чисел Бетти имеем [12]:

$$p_0 = p_3 = 1, \quad p_1 = b + g, \quad p_2 = 1 + b. \quad (52)$$

Подставляя эти значения в общую формулу (48), находим:

$$\chi(\mathcal{W}_i) = p_0 - p_1 + p_2 - p_3 = 1 - g. \quad (53)$$

или

$$Q = \varepsilon(p_0 - p_1 + p_2 - p_3) = \varepsilon(p_2 - p_1) = \varepsilon(1 - g). \quad (54)$$

В связи с введением в рассмотрение неодносвязных областей типа ручек Уилера мы кратко восполним пробел в обосновании функции \mathcal{F} как функции высоты физической гиперповерхности, вложенной в объемлющее пространство W^4 . В начале работы мы отослали к работам [8, 9, 10], где этот вопрос обсуждался. Теперь мы можем и здесь сформулировать необходимость именно такой интерпретации \mathcal{F} с физической точки зрения. Дело в том, что при наличии многосвязных областей, которые проектируются на одно связное евклидово пространство, возникает проблема интерпретации одновременного существования нескольких независимых “экземпляров” одной и той же физической величины, например, напряженности электрического поля. Единственным непротиворечивым объяснением такой ситуации может быть только объяснение, состоящее в том, что сложной топологией обладает реальное физическое пространство, а не полевая функция.

10.1 Лептоны

Лептоны - наиболее простые и легкие частицы, две из которых - электрон и нейтрино, являются стабильными. Последнее обстоятельство можно рассматривать как указание на максимальную элементарность таких частиц - им просто уже не на что распадаться. В силу этого для их классификации можно использовать самые простейшие структуры, соответствующие $b = 0$. В этом случае классификация лептонов определяется на основе классификации структуры границ $\partial\mathcal{W}_i^\pm$ и должна выглядеть следующим образом:

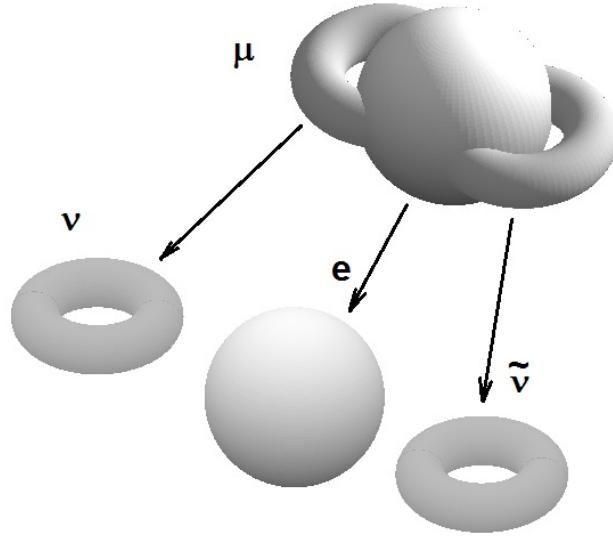


Рис. 4. Топологическая реконструкция распада μ -она.

Таб. 1. Топологическая классификация лептонов.

| Частица | Число ручек границы | Заряд |
|--------------------|---------------------|--------------|
| электрон e^\pm : | $g = 0,$ | $Q = \pm 1,$ |
| нейтрино ν : | $g = 1,$ | $Q = 0,$ |
| мюон μ^\mp : | $g = 2,$ | $Q = \mp 1.$ |

Соответствующие структуры приведены на рис. 4. Данная интерпретация позволяет предположить, что в природе могут существовать лептоны с зарядом больше 1. Таким частицам будут соответствовать структуры с $g > 2$. Эти частицы должны быть нестабильными и распадаться за время гораздо меньшее, чем время распада μ -она. Основной канал распада μ -она имеет вид: $\mu \rightarrow e + \nu + \tilde{\nu}$, топологическая реконструкция которого приведена на рис. 4.

Рис. 4 демонстрирует, что в рамках предложенной классификации частиц, распад μ -она выглядит как процесс перестройки границы области и формирование нескольких отдельных особых изоповерхностей, структура которых в точности соответствует исходной структуре μ -она. Каждая ручка исходной поверхности формирует свое нейтрино. Распады лептонов с зарядом больше 1 должны проходить по аналогичному сценарию с топологической перестройкой границы области с появлением новых особых изоповерхностей в структуре нейтрино. Число нейтрино при распаде лептона с зарядом $|Q| = |1 - g| > 1$ должно при этом быть равным g , а число электронов (позитронов)

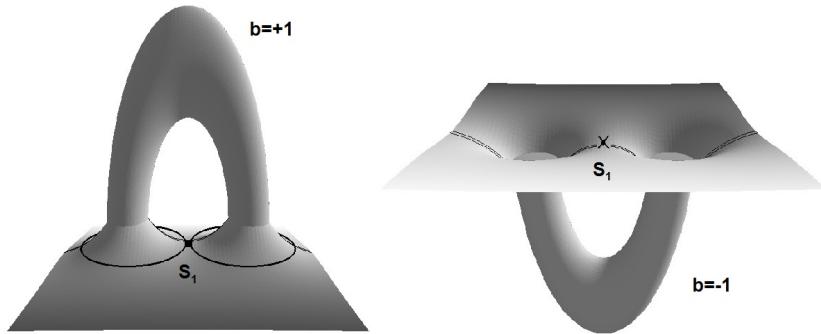


Рис. 5. Двумерный аналог геометрических структур ручек Уилера, соответствующих протону и антипротону. S_1 - седловая точка. Сплошной кривой выделена внешняя особая изоповерхность.

равным $|Q|$.

10.2 Барионы

Еще одним классом частиц, часть из которых стабильны, являются барионы. Среди стабильных барионов наиболее простой частицей является протон-ядро атома водорода. Другие стабильные барионы - это ядра более тяжелых атомов. Отличие барионов от лептонов состоит в том, что их масса на три порядка больше и они участвуют в очень “интенсивном” и короткодействующем взаимодействии - сильном или ядерном. Среди оставшихся для сопоставления наблюдаемым частицам топологических структур имеются структуры с заданным числом ручек Уилера. Ручки Уилера по своему смыслу представляют собой локализованные геометрические неодносвязные объекты, обладающие очень большой локальной кривизной. Если считать, следуя за ОТО Эйнштейна, что кривизна определяет энергию взаимодействия, то можно предположить, что наличие ручек Уилера в структуре барионов как раз и может служить ключевым моментом в объяснении сил ядерного взаимодействия. Поэтому в рамках предлагаемой концепции естественно связать число ручек Уилера с величиной барионного заряда этих частиц. В этом случае среди всех областей с ручками Уилера в структуре наиболее простой является структура с одной ручкой Уилера, т.е. с $b = 1$ и внешней границей в виде сферы ($g = 0$) (см. Рис. 5).

Следуя тому, что нейтрон практически не отличается по внутренней структуре от протона, но обладает зарядом равным нулю, нетрудно предположить, что нейтрону

должна соответствовать область с $b = 1$ и $g = 1$, т.е. такая область имеет в своей структуре ручку Уилера, а границей области является тор. Нейтрон является квазистабильной частицей, распад которой в свободном состоянии происходит по основному каналу $n \rightarrow p + e + \nu$. Топологическая реконструкция такого канала соответствует опять перестройке границы области с “отделением” от нее одной ручки - нейтрино и преобразованием границы в наиболее простую конфигурацию - сферу S^2 . Представить графически эту реконструкцию трудно в связи с четырехмерностью процесса такой перестройки. Распад нейтрона связывают со слабым взаимодействием. С этим же взаимодействием связывают распад μ -она. Это дает возможность предполагать, что слабое взаимодействие в рамках рассматриваемого подхода связано с перестройкой границы областей, т.е. с увеличением или уменьшением числа g в структуре границы первоначальной частицы в случае ее нестабильности.

Введенная интерпретация частиц позволяет дать простую интерпретацию формулы Нишиджимы-Гелл-Мана [22]:

$$'Q = \frac{b + S}{2} + J_3.$$

Здесь S - странность, J_3 - проекция изоспина, b - барионный заряд. Сравнивая эту формулу с формулой (54), находим:

$$J_3 = \varepsilon(p_2 - p_1) - (b + S)/2 = \varepsilon(1 - g) - (b + S)/2. \quad (55)$$

Полагая странность для нуклонного дуплета равной 0, получаем стандартные значения изоспина протона и нейтрона: $J_3(p) = 1/2$, $J_3(n) = -1/2$. Таким образом, формула Нишиджимы-Гелл-Мана связана не с какими-то алгебраическими симметриями, которые в принципе можно изобрести в рамках теории гомологий-когомологий областей \mathcal{W}_i частиц, а представляет собой некую специальную трактовку чисел Бетти.

Представленная классификация частиц является достаточно поверхностной. Однако полученные с ее помощью результаты показывают на ее пригодность объяснять ряд известных фактов теории частиц. Это позволяет продолжить развитие данной теории в направлении построения более общей теории топологической теории структуры частиц.

11 Уравнения электродинамики с целочисленным рядом

Рассмотрим теперь вопрос о том, как в рассматриваемом подходе устроены оставшиеся уравнения электродинамики Максвелла. Начнем с вычисления поля \mathbf{D} , как решения уравнения (43). Общее решение уравнения (43) можно представить в следующем виде:

$$D^\alpha = J \frac{\gamma^{\alpha\beta} E_\beta}{|\mathbf{e}|^3} = 4\pi \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \frac{r_i^\alpha}{|\mathbf{r}_i|^3} + [\text{roth}]^\alpha, \quad (56)$$

где \mathbf{h} - некоторое гладкое векторное поле, $\varepsilon_i = (-1)^{m_i}$, $\mathbf{r}_i = \mathbf{x} - \mathbf{x}_i$, а \mathbf{x}_i - радиус-вектора положения критических точек фундаментального потенциала. Это представление вытекает из вида правой части (43), содержащей сумму δ -функций в критических точках с координатами \mathbf{x}_i . Правая часть (56) представляет сумму классической напряженности электрического поля точечных зарядов \mathbf{E}_c :

$$\mathbf{E}_c = 4\pi \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \frac{\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_i|^3} \quad (57)$$

и бездивергентного поля roth . Это позволяет отождествить поле \mathbf{D} с полем напряженности \mathbf{E} классического электрического поля, если поле roth представить производной по времени от векторного потенциала:

$$\text{roth} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (58)$$

Здесь c - некоторая постоянная, имеющая смысл скорости света в классической электродинамике. В этом случае имеем соотношение

$$\mathbf{E} = \mathbf{D} = \mathbf{E}_c + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

Это соотношение означает, что диэлектрическая проницаемость вакуума выбрана равной 1. Поле \mathbf{E}_p является потенциальным:

$$\mathbf{E}_c = -\nabla \Phi,$$

где

$$\Phi = -4\pi \sum_{i=1}^N \frac{\varepsilon_i}{|\mathbf{r}_i|}.$$

Результат дифференцирования (56) по времени можно интерпретировать как еще одно уравнение Максвелла:

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -4\pi \mathbf{j} + c \text{rot} \mathbf{H}, \quad (59)$$

если принять в качестве плотности тока \mathbf{j} поле:

$$\mathbf{j} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{i=1}^N \varepsilon_i \frac{\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_i|^3} \right) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \Phi, \quad (60)$$

а в качестве напряженности магнитного поля величину

$$\mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}. \quad (61)$$

Взяв ротор от правой и левой части (56), приходим к следующему уравнению:

$$\text{rot} \mathbf{D} = \text{rot} \mathbf{E} = \text{rot} \text{rot} \mathbf{h} = \frac{1}{c} \frac{\partial \text{rot} \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (62)$$

Введем индукцию магнитного поля по формуле $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$. Это автоматически дает третье уравнение Максвелла:

$$\text{div} \mathbf{B} = 0. \quad (63)$$

Последнее - четвертое уравнение Максвелла получается из (62) соответствующей подстановкой:

$$\text{rot} \mathbf{D} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (64)$$

При этом напряженность магнитного поля \mathbf{H} и индукции \mathbf{B} связаны общим уравнением:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \text{rot} \text{rot} \mathbf{H}. \quad (65)$$

Это уравнение на самом деле является тождеством, порожденным наличием в теории поля \mathbf{h} . Проверка тождества осуществляется прямой подстановкой в это уравнение соотношений (58) и (61) вместе с определением $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$. В силу этого уравнение не накладывает никаких ограничений на вид поля \mathbf{h} и выражает лишь общий тип связи между введенными в теорию полями для сопоставления их классической электродинамике. Поэтому это соотношение не противоречит в данной теории материальному уравнению классической электродинамике $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, где μ_0 - магнитная проницаемость вакуума. Можно убедиться, что материальное уравнение в данной теории эквивалентно уравнению для поля \mathbf{h} следующего вида:

$$\text{rot} \text{rot} \mathbf{h} = \frac{\mu_0}{c^2} \mathbf{h}_{tt}. \quad (66)$$

Это есть по сути волновое уравнение классической электродинамики с постоянной скоростью света в вакууме равной c , если $\mu_0 = 1$.

Совокупность тождеств, полученных из исходного соотношения (43), полностью воспроизводит по форме все основные уравнения Максвелла и содержит вместо стандартного материального уравнения, связывающего \mathbf{B} и \mathbf{H} , более общее уравнение (65), эквивалентное введению поля \mathbf{h} в соответствии с (58) и (61). При этом постоянная c была введена формально и приобретает смысл скорости света, если положить $\mu_0 = 1$, что вполне согласуется с классической электродинамикой и соответствует специальному выбору единиц измерения.

Последней важной проверкой возможности сопоставить построенную вакуумную “микроскопическую” электродинамику классической состоит в наличии в теории дифференциального закона сохранения заряда. Как нетрудно убедиться, дифференциальный закон сохранения заряда в данной теории получается непосредственно из определения плотности тока (60) и уравнения (43):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (67)$$

где плотность заряда ρ определена правой частью уравнения (43).

Таким образом, данная теория сохраняет все основные атрибуты классической электродинамики в предположении, что для вакуума выполняется материальное уравнение $\mathbf{H} = \mathbf{B}$. В классической электродинамике это соотношение является постулом, отражающим экспериментальный факт волновой природы электромагнитных волн и отсутствия дисперсионных свойств у вакуума. В данной теории мы можем также использовать этот постулат на макромасштабах. Однако на малых расстояниях, соответствующих размерам элементарных частиц, это требование может и не выполняться. Поводом для такого вывода является следующее важное отличие данной теории от классической электродинамики.

Появление соотношения (65) в теории обусловлено тем, что поле индукции \mathbf{D} электрического поля с самого начала содержит бездивергентное слагаемое $\rho \mathbf{oth}$, которое, вообще говоря, не обращается в ноль и в статическом случае. Последнее означает, что в силу (61) точечные заряды обладают статическим магнитным полем. С точки зрения современных представлений статическое магнитное поле точечных частиц как квантовых объектов связывается с наличием у них собственного момента импульса - спина. Поэтому появление статической компоненты магнитного поля на микромасштабах может рассматриваться как объяснение спина в данной теории. Однако статическая компонента магнитного поля не может появиться в рамках классической электродинамики, что требует видоизменения на малых масштабах материального уравнения $\mathbf{B} = \mathbf{H}$,

эквивалентного (66).

12 Заключение

Полученная топологическая интерпретация электрического заряда позволяет по-новому подойти к обоснованию квантовых законов. Основным элементом квантовой механики является статистический постулат, отражающий специфическое поведение квантовых объектов, которое интерпретируется обычно как случайное. Построенная в данной работе концепция изначально лишена такого статистического характера. Тем не менее, данная концепция позволяет ввести совокупность таких способов описания динамики частиц в представленной выше интерпретации, которые воспроизводят все основные атрибуты статистической интерпретации квантовой теории. Это было изложено в первых разделах данной работы, посвященных выводу уравнения Шредингера. Как было показано, якобиан преобразования, связывающий координаты фонового пространства с координатами геометрических маркеров, практически полностью воспроизводит основные элементы статистического описания квантовой механики, которое приобретает геометрический смысл. Такой подход в целом позволяет рациональным образом трактовать ряд законов квантовой механики. Как уже указывалось в данной работе, квантово-механические законы в обычном их стандартном виде работают в каждой отдельной клетке, ограниченной особой изоповерхностью. Усредненные же уравнения описывают динамику самих клеток. Стандартный подход к анализу квантовых систем опирается на совокупность граничных условий, которые необходимы для получения однозначных решений уравнения Шредингера. Такими условиями являются условия на бесконечности. Однако в данном подходе граничные условия для уравнения Шредингера ставятся на особых изоповерхностях фундаментального потенциала. Поэтому можно констатировать, что стандартная квантовая механика будет воспроизводиться в рамках данной теории, если особая изоповерхность, в которой рассматривается квантовая динамика, имеет макроскопические размеры, что в обычной квантовой механике соответствует бесконечно удаленными границам. Для полного обоснования квантового статуса данной теории требуется еще решить несколько общих проблем. Однако часть из них видно как решать, исходя их общей идеологии данной теории. Например, проекционный постулат, приводящий к наиболее радикальному отклонению квантовой физики от рациональности классической, означающий мгновенное стягивание волновых функций в конечные состояния, в данной теории связывается с топологическими перестройками

областей, ограниченных особыми изоповерхностями функции \mathcal{F} . Топологические перестройки происходят мгновенно, поскольку для изменения топологии достаточно изменения структуры функции в одной седловой точке. При этом топологические свойства всей системы мгновенно изменяются.

Топологический характер данной теории, как было показано, позволяет построить достаточно развитую классификацию частиц, которая вполне согласуется с имеющимися данными о структуре элементарных частиц. Конечно, проведенный в данной работе анализ структуры частиц является недостаточно полным. Здесь не рассматривались вопросы, касающиеся теории спина, релятивистских эффектов и, самое главное, вопросов, связанных с расчетом масс частиц. Эти вопросы требуют отдельного рассмотрения, что выходит за рамки данной работы, в которой была построена лишь общая схема подхода к тополого-геометрическому обоснованию квантовой механики в ее нерелятивистском виде и связанной с ней электродинамики с целочисленными зарядами. Однако заранее можно констатировать, что в данном подходе не будет возникать трудностей с получением конечных значений массы частиц, поскольку здесь изначально электромагнитные сингулярности являются артефактом математического описания гладкой аналитической структуры, связанной с фундаментальным потенциалом \mathcal{F} . Некоторые предварительные соображения о способах вычисления массы в данном подходе можно найти в работе [10].

Список литературы

- [1] C.W. Misner, J.A. Wheeler, Ann. Phys. USA **2**, 527 (1957).
- [2] Дж. Уилер. Гравитация, нейтрино и Вселенная. М.: И.Л. (1962) 352 с.
- [3] Ч.Мизнер, Дж.Уилер, в сб. *Альберт Эйнштейн и теория гравитации*, Мир, Москва (1979), с.542.
- [4] А.Д.Сахаров. В сб. *Проблемы теоретической физики*, Наука, Москва (1972), с.242.
- [5] R.Sorkin, J.Phys. A **10**, 717 (1977).
- [6] Ю.С. Владимиров. Реляционная теория пространства-времени и взаимодействий. Часть 1,2. Изд. МГУ, 1998.
- [7] А.С. Шварц, *Квантовая теория поля и топология*, Наука, Москва (1989), 400с.

- [8] Журавлев В.М. Электродинамика с целочисленными зарядами и топология. Тр. межд. конф. "Гравитация и электромагнетизм Минск, БГУ, 1998, с. 42-50.
- [9] Журавлев В.М. Электродинамика с целочисленными зарядами и топология. Изв. вузов, Физика, N2, (2000)
- [10] Журавлев В.М. Электродинамика с целочисленными зарядами, топология и структура элементарных частиц. Сб. Критич. технол. и фундамент. пробл. физики конденсир. сред, Ульяновск, УлГУ, 2001, с.42-72
- [11] Дж. Милнор, А. Уоллес. Дифференциальная топология. Начальный курс. М.: Мир, 1972
- [12] И.С.Шапиро, М.А.Ольшанецкий, в сб. *Элементарные частицы* (Шестая школа ИТЭФ (1979)), в.4. с.5.]
- [13] И. Нейман. Математические основы квантовой механики. Наука, 1964 г.
- [14] А. Садбери. Квантовая механика и физика элементарных частиц. М.: Мир, 1989, 481 с.
- [15] Ю.П.Рыбаков, В.И.Санюк. Многомерные солитоны. Изд. РУДН, 2001, 481 с.
- [16] М.М. Постников, *Введение в теорию Морса*, Наука, Москва (1971) 561 с.
- [17] V.V. Kassandrov, in: Space-Time Structure: Algebra and Geometry, eds. D.G. Pavlov et al. – Lilia Print, Moscow, 2007, p. 422; www.arxiv.org, hep-th/0312278; Physics of Atomic Nuclei, 2009, Vol. 72, No. 5, pages 813-827; arXiv:0907.5425v1 [physics.gen-ph]
- [18] A.Ya. Burinskii // Phys. Rev. D, 67, 124024 (2003); www.arxiv.org, gr-qc/0212048.
- [19] М. Хирш. Дифференциальная топология. М.: Мир (1979), 280 с.
- [20] Б.А.Дубровин, С.П.Новиков, А.Т.Фоменко, *Современная геометрия. Методы теории гомологий*, Наука, Москва (1984), 343с.
- [21] Б.А.Дубровин, С.П.Новиков, А.Т.Фоменко, *Современная геометрия. Методы и приложения*, Наука, Москва (1979), 760с.
- [22] Я. Коккедэ. Теория夸克ов, Мир, Москва (1971), 341с.