Министерство образования Российской Федерации

Ульяновский Государственный Университет

В.М.Журавлев

Нелинейные волны в многокомпонентных системах с дисперсией и диффузией.

Точно решаемые модели

Ульяновск, 2001

ББК ???
Ж 80
УДК 53:51

Печатается по решению Ученого совета физико-технического факультета Ульяновского государственного университета

В.М.Журавлев
Ж 80 **Нелинейные волны в многокомпонентных системах с дисперсией и диффузией. Точно решаемые модели** Ульяновск: УлГУ, 2001. 200 с.
ISBN 5-88866-083-3

Монография посвящена проблемам теоретического исследования и математического моделирования нелинейных волновых процессов в различных многокомпонентных системах и предназначена для студентов старших курсов, аспирантов и научных работников, специализирующихся в области нелинейных волновых процессов.

Рецензенты:

профессор, зав. кафедры теоретической и математической физики Ульяновского Государственного университета, доктор физ.-мат. наук В.В.Учайкин, профессор, зав. кафедры теоретической физики Российского Университета Дружбы Народов, Москва, доктор физ.-мат. наук Ю.П.Рубаков

Монография написана в рамках работ по проекту РФФИ N 0001-00260

Заказное - 2001
ISBN 5-88866-083-3

- Господи, они синтезировали
еще один трансурановый элемент.
Как будем реагировать?
- Добавим еще один нелинейный член
в Истинное Уравнение Единого Поля.
("Физики продолжают шутить")

Предисловие

Одним из наиболее важных и общих свойств большинства физических теорий, осознанным в полной степени лишь в последние десятилетия, является нелинейность. Именно нелинейность определяет многообразие свойств реальных физических, биологических и т.д. систем и их сложное поведение. Собственно понятие нелинейности, присущее большинству дифференциальных уравнений, описывающих реальные или близкие к реальным физические процессы, известно было давно. Однако только недавно стали относиться к свойству нелинейности в полной степени серьезно, в том смысле, что стали пытаться выявлять общие свойства нелинейных систем, не прибегая к их упрощению до линейных систем с помощью тех или иных вариантов теории возмущений. По-видимому, наиболее успешной теорией такого рода, описывающей достаточно общий класс нелинейных явлений, стала теория солитонов и связанный с ней метод обратной задачи рассеяния. Еще одной сравнительно успешной теорией нелинейных волн явилась теория автоволновых процессов, которая однако не имеет в настоящее время достаточно развитого аппарата построения именно точных решений уравнений своих моделей, что отличает, например, торию солитонов. Настоящая монография посвящена изложению некоторых общих методов указанных двух теорий нелинейных волн в различных типах сред, динамика которых описывается многокомпонентными нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных. Основное содержание монографии построено на результатах полученных в последние несколько лет, в основном в работах автора. Основное внимание в монографии уделено методам построения точно-решаемых моделей нелинейных волн и исследованию их свойств. Изложение не претендует на полноту представления всех имеющихся на сегодняшний день в теории нелинейных волн результатов и будет касаться лишь некоторых наиболее продуктивных, на взгляд автора, методов теории нелинейных волновых процессов в средах с дисперсией (теория солитонов и МОЗР) и с диффузией (теория автоволн). В качестве примеров использования развитых в монографии методов приведены модели конкретных физических систем из гидродинамики, нелинейной оптики и теории гравитации, исследованные в работах автора и его коллег.

Монография состоит из двух частей. Часть I посвящена теории нелинейных волн в средах с дисперсией. Вторая глава содержит общие сведения из теории солитонов и метода тождеств Лагранжа. Этот метод был развит в работах автора [20, 21] для задач связанных с построением представлений Лакса-Захарова-Шабата нелинейных уравнений в частных производных, встречающихся в различных разделах теоретической и математической физики.

В третьей главе метод тождеств Лагранжа применяется к различным уравнениям с произвольной конечной векторной размерностью и строится метод выделения среди них уравнений, допускающих солитонные решения. В заключении излагается общая теория метода в применении к уравнениям с произвольной конечной размерностью координатного пространства.

Четвертая глава содержит изложение результатов применения метода преобразований Дарбу в теории солитонных уравнений, который дополняет возможности метода тождеств Лагранжа в плане более эффективного для некоторых случаев построения солитонных уравнений, в особенности в многомерном случае. Сам метод преобразований Дарбу имеет богатую историю, однако использование его в целях построения солитонных уравнений впервые было предложено в работе автора [22].

Пятая глава посвящена специальной формулировке метода квадратичных форм в теории двумеризованных цепочек Тоды, предложенной автором [111, 112, 25], и редукции общей схемы к одномерным цепочкам Тоды. В этой же главе эта теория используется для построения решений диффузионных цепочек Тоды в двумерном координатном пространстве.

В шестой главе излагается развитый автором [18] метод n-форм для решения многомерных уравнений типа Лиувилля, Лапласа, Д'Аламбера и связанных с ними систем уравнений, которые принято называть цепочками Тоды, в данном случае многомеризованными цепочками Тоды. В этой главе вводится понятие внедиагонального представления операторов Д'Аламбера и Лапласа, предложенное автором для построения решений многомерных уравнени типа Лиувилля. На основе этого представления строятся новые точные решения многомерных уравнений Д'Аламбера, Лапласа, Лиувилля и многомеризованных цепочек Тоды в классе n-форм, где n - размерность координатного пространства.

В седьмой главе содержатся решения некоторых практически важных задач, полученных с помощью метода квадратичных форм в работах автора (с соавторами) [23, 18]. Это задачи из гидродинамики, нелинейной оптики и теории гравитации.

Часть II содержит изложение теории диффузионных цепочек Тоды и ее обобщений с приложением к гидродинамическим системам и системам биологической эволюции.

В восьмой главе сформулировано определение диффузионных цепочек Тоды (ДфЦТ), которые были введены в работах автора [111, 112, 18] , и рассматриваются методы построения моделей нелинейных диффузионных процессов типа ДфЦТ и их точных решений в классе квадратичных форм. В данной главе строится классификация таких моделей и дано описание основных их свойств. Также проанализированы ДфЦТ с двухмодовым возбуждением.

Девятая глава посвящена рассмотрению решений уравнений ДфЦТ с трехмодовым возбуждением.

Глава десять посвящена решениям нелинейного уравнения диффузии в двумерном координатном пространстве, построенных автором в работе [18]. Это уравнение встречается в ряде задач гидродинамики и биологии.

Данная монография написана в рамках работ по проекту РФФИ N 0001-00260.

Автор выражает глубокую признательность профессору Учайкину В.В. за конструктивную критику и полезное обсуждение тем, затронутых в монографии при ее подготовке к печати.

Глава 1

Введение

Научный метод, лежащий в основе современного естествознания, предполагает неразрывную связь двух форм научного познания - экспериментального исследования явлений и теоретического обобщения экспериментальных фактов на основе построения математической модели этих явлений. Эксперимент - теория - эксперимент ... - является основной формулой, по которой развивается любая естественно-научная дисциплина и которая известна любому, даже начинающему физику. В этой схеме имеется ряд общих для любой дисциплины связующих звеньев между теорией и экспериментом, которые должны быть установлены совместной работой и теоретиков, и экспериментаторов. Для теоретика одним из основных моментов в процессе установления того, что теория правильно описывает полученные экспериментальные факты или предсказывает новые, является построение решений уравнений математических моделей явлений, предлагаемых данной теорией, и сравнение их с экспериментальными данными. При этом, как правило, центральным элементом таких исследований является построение точных решений уравнений теории, возможно относящихся к предельно упрощенным условиям возникновения описываемых явлений, но сохраняющих все основные их черты, предсказываемые теорий.

В качестве примеров из истории физики, которые сыграли важную роль в становлении тех или иных теорий, можно привести ньютоновскую теорию кеплеровских орбит в центральном поле тяготения, волновые решения уравнений Максвелла электромагнитного поля в пустом пространстве, решение Шварцшильда для гравитационного поля точечной массы и космологическое решение Фридмана в Общей теории относительности, теория Эмдена-Лейна в теории строения звезд и многие более частные примеры точно-решаемых моделей, например, различные автомодельные решения в теории горения и переноса тепла, решение Кортевега-де-Фриза для уединенной волны на поверхности жидкости или квантовая теория атома водорода. Этот список несколько расширен по сравнению с тем, о котором шла речь, например, в известном обзоре по теории солитонов [60], однако и он не является полным. Число таких примеров заметно увеличилось именно в XX веке и особенно в последней его половине, во многом благодаря развитию новых математических методов анализа нелинейных систем уравнений в частных производных, и, в частности, такому важному и замечательному открытию математической физики как теория солитонов и метод обратной задачи рассеяния. С теорией солитонов связаны замечательные решения таких проблем теоретической физики как объяснение самофокусировки пучков света в нелинейной диспергирующей среде и описание явления самоиндуцированной прозрачности в нелинейной оптике, объяснение существования вихрей Россби в атмосфере планет, в том числе Красного пятна на Юпитере и т.д. (см. [16, 51]). С момента создания теории солитонов она рассматривается как один из возможных вариантов теории элементарных частиц, восходящей к работам Г. Ми [?], А.Эйнштейна [73] и Л. Де-Бройля [74] (см. также [53, 89] и библиографию там). Полезный и достаточно полный экскурс в историю возникновения понятия солитона можно найти в статье Э.Скотт "Рождение парадигмы опубликованной на русском языке [50]. Приведенный перечень, который можно продолжать, указывает на то, что физики и математики, занимающиеся решением задач, тесно связанных с физическими проблемами, все больше погружаются в исследование именно нелинейных уравнений. Шутка, взятая автором в качестве эпиграфа к настоящей монографии из известного всем физикам сборника "Физики продолжают шутить"[67], как нельзя лучше отражает современное отношение физики и математики к нелинейным задачам. “Нелинейность” рассматриваемых сегодня теоретической и математической физикой задач и их число нарастает год от года. В зарубежных изданиях появился даже термин "Nonlinear science что отражает общую тенденцию в современном естествознании.

Основная суть этой тенденции состоит в том, что при исследовании прикладных задач во всех областях естествознания, все больше находят применение методы, основанные на иных принципах, нежели принципы теории возмущений, характерные еще для начала и середины XX века. Методы теории возмущений предполагают, что при формулировке задачи необходимо найти такой параметр, который при заданных условиях задачи можно считать малым в том смысле, что искомое решение можно представить в виде ряда возмущений по этому параметру. При этом для каждого члена ряда необходимо решать уже линейные уравнения, что существенно упрощает задачу, но вместе с тем и лишает ее, как правило, именно нелинейного "шарма специфического только для существенно нелинейных систем поведения. Одной из причин интенсивных поисков новых методов, альтернативных стандартной теории возмущений, является использование вычислительной техники для математического моделирования физических, биологических, технических и любых других задач.

Математическое моделирование выделилось в свою собственную область науки со своим взглядом на мир. Достижения в этой области подчас просто ошеломляют, но часто скрывают и довольно сложные проблемы использования этих методов во многих научных исследованиях. С одной стороны, численные модели построены, как правило, на базе теории возмущений в той или иной форме и фактически ускоряют расчеты, которые могут быть проведены с помощью теории возмущений, но, с другой стороны, имеют ряд недостатков, которых лишены более трудоемкие, но и более информативные аналитические методы. Тем, кто занимался решением задач на основе методов численного решения дифференциальных уравнений, хорошо знакомы проблемы, возникающие при интерпретации полученных результатов. Не всегда ясно, что порождает тот или иной наблюдаемый в численной модели эффект: то ли это физический эффект, то ли эффект дискретизации уравнений. Многим исследователям, занимающимся численным моделированием, известны проблемы так называемых “двухшаговых волн” или еще более сложные “подсеточные” эффекты. Поэтому применение численного моделирования требует всегда дополнительной и подчас очень кропотливой работы по доказательству того, что результаты моделирования описывают именно то явление, которое предполагалось исследовать с его помощью. Отметим, что одним из наиболее эффективных и простых эвристических способов такой проверки состоит в моделировании заранее известного точного решения уравнений исходной модели. Если исследуемая система нелинейна, то вновь может возникнуть проблема построения точных решений уравнений модели, чтобы на примере этого решения изучить свойства численного (дискретного) ее аналога.

Общий вывод, который можно извлечь из этого анализа: все, что можно вычислить с помощью теории возмущений, как правило, поддается численному анализу при подходящей интерпретации, поэтому все больший интерес и вес приобретают аналитические методы, не сводящиеся к какой-либо форме теории возмущений.

Однако и кроме чисто утилитарных проблем численного анализа задачи разработки конструктивных методов построения точных решений именно нелинейных уравнений имеют огромное значение в связи с тем, что выявляемые в современных экспериментах явления уже относятся, как говорят, к "тонким" эффектам, для описания которых весьма грубые методы теории возмущений часто непригодны. К таким задачам, например, относятся задачи нелинейной оптики, связанные с оптическими каналами связи, теории плазмы, современной теории гравитации и т.д. Еще одним поставщиком чисто нелинейных задач в последние десятилетия стали химия и биология, процессы в которых принципиально описываются нелинейными уравнениями. Жизнь - вообще существенно нелинейное явление и связанные с ней химико-биологические процессы также существенно нелинейны. В первую очередь это обусловлено тем, что линейные монохроматические волны не переносят ни энергию, ни информацию. Но именно эти процессы является основными в функционировании живых организмов. Таким образом, в этой области задачи исследования нелинейных уравнений и разработки конструктивных методов отыскания точных решений этих уравнений имеют большую практическую ценность и значимость.

1.1 Понятие базовой модели и базовых элементов

Совокупность нелинейных уравнений, с которыми работают современная физика, химия, биология и т.д., представляется чрезвычайно обширной для того, чтобы можно было бы надеяться найти общие методы для построения решений этих уравнений и исследования их свойств. Поэтому важным элементом современного подхода к классификации нелинейных задач является подход, основанный на формулировке понятия базовой модели процесса или системы. По-видимому, впервые понятие базовой модели было достаточно четко сформулировано в работах по теории автоволновых процессов (см. [102] и библиографию там). Смысл введения этого понятия отражает такую процедуру описания динамики той или иной системы, которая позволяет выбрать такую ее модель, которая бы имела максимально простую структуру, но при этом сохраняла бы способность описывать все основные черты моделируемых явлений. Возникновение этого понятия в теории автоволн (см. ниже) связано с некоторой неопределенностью в выборе нелинейных источников в материальных уравнениях эволюции многокомпонентных сред. В результате можно предложить много различных вариантов описания одного и того же явления, но с различной степенью детализации. Отсюда и возникает задача выбора базовой модели. В других разделах физики имеется, как правило, меньше свободы выбора модели, однако и здесь, используя различные подходы для редукции исходной задачи, можно получить модели с различной степенью сложности. Поэтому понятие базовой модели может рассматриваться как некоторое общее понятие для различных разделов физики, химии, биологии и т.д., полезное для установки некоторых ориентиров в многообразии нелинейных моделей.

Для того, чтобы понятие базовой модели в действительности было полезным, необходимо добиваться того, чтобы базовая модель могла быть проанализирована с максимальной степенью детальности. Простоту модели следует понимать именно в этом смысле. Поэтому наибольший интерес с практической точки зрения должны представлять точно-интегрируемые уравнения или уравнения, допускающие богатые классы точных решений. Для некоторых разделов физики, связанных с волновыми процессами в нелинейных диспергирующих средах, удалось найти достаточно общий метод выделения базовых моделей, имеющих солитонные решения. Это метод обратной задачи рассеяния. В других разделах, например, в теории автоволн для самых разных систем, к сожалению, не удается пока найти общий, подходящий для описания всех типов явлений способ выделения базовых моделей, допускающих достаточно богатые классы точных решений.

Вместе с понятием базовой модели часто бывает полезно ввести понятие базового элемента теории. Ярким примером базовых элементов, отвечающих за определенные физические свойства моделей, могут служить современные теории конденсированного состояния вещества, оперирующие различного рода элементами типа фононов, экситонов, магнонов, поляритонов и т.п. Чем большей универсальностью обладает такая теория, тем более развитым оказывается ее аппарат, описывающий эти базовые структуры или элементы теории.

Наиболее универсальной в этом смысле теорией является теория колебаний и волн в целом, выделенная к настоящему времени в отдельный раздел физики [44]. Базовым элементом теории линейных колебаний могут служить гармонические колебания. Каждый такой базовый элемент описывается строго определенной гармонической функцией времени (например, синусом), отражающей характерный временный процесс с тремя основными параметрами - частотой, амплитудой и начальной фазой. Теория колебаний указывает не только способ описания таких базовых элементов (уравнения гармонических колебаний), но и содержит правила, согласно которым можно сконструировать сложный процесс, состоящий из множества базовых элементов или, наоборот, разложить заданный процесс в совокупность базовых элементов. Такие манипуляции осуществляются с помощью прямой и обратной теоремы Фурье. Таким образом, теория колебаний становится похожей на игру в кубики, из которых можно построить множество полезных для практики моделей, лежащих далеко за рамками собственно теории линейных гармонических колебаний.

Классическая теория волн содержит аналогичный аппарат гармонических волн с соответствующими, хорошо определенными с помощью гармонических функций базовыми элементами. Однако в силу большей разнообразности волновых процессов (по сравнению с колебательными) она содержит существенное расширение класса базовых элементов, дополняя их ортогональными модами, описывающими распределение амплитуд гармонических мод в неоднородных средах и системах с пониженной пространственной симметрией.

Одна из трудностей линейной теории, указанная, например, в [14] как наиболее существенная с точки зрения прикладных исследований, состоит в том, что монохроматические линейные волны, являющиеся базовыми элементами теории линейных автволн, не переносят энергию и информацию. Поэтому для описания волнового перераспределения энергии и информации в пространстве необходимо рассматривать волновые пакеты, локализующие энергию в некоторой области пространства. Любые пакеты в диспергирующих линейных средах являются неустойчивыми образованиями. Их стабилизация возможна лишь при наличии в среде определенного сорта нелинейности. Это свойство нелинейных сред привлекат исследователей с целью его использования в системах передачи информации, например, оптических каналах связи.

Среди современных теорий, претендующих на достаточно высокую степень универсальности, выделяются теория солитонов для нелинейных волн в диспергирующих средах и теория автоволновых процессов в активных средах с диффузией. Обе указанных теории содержат наборы базовых элементов. Для теории солитонов - это собственно солитоны и квазисолитоны, а для теории автоволн - это, например, структуры типа ведущий центр, спиральные волны и, наконец, автосолитоны (которые, надо отметить, к собственно солитонам отношения не имеют). Однако, в обоих указанных теориях существует ряд трудностей, которые не позволяют считать их столь же "удачными" теориями, как классические теории колебаний и волн. В основном эти проблемы касаются выработки достаточно простых и универсальных правил, согласно которым можно собрать или, наоборот, разложить произвольный или почти произвольный процесс в совокупность базовых элементов для некоторого набора базовых моделей. Именно таким образом можно сформулировать общую задачу, полное или частичное решение которой автор рассматривал как одну из главных перспектив всей совокупности предпринимаемых исследований. Эта общая задача слишком обширна. Это заставляет ограничить область исследования какими-либо рамками. Такими рамками автор избрал теорию солитонов и частично теорию автоволновых процессов в средах с диффузией. Кроме этого эта задача распадается на ряд подзадач, специфических для каждой из рассматриваемых областей. Чтобы более четко представить круг выбранных для решения в данной многорафии проблем из совокупности задач в рамках указанной перспективы, рассмотрим с общих позиций некоторые основные проблемы теории солитонов и автоволн.

1.2 Теория солитонов

Линейный принцип суперпозиции в теории линейных колебаний и волн, опирающийся на теорему Фурье, подразумевает, что отдельные базовые элементы не взаимодействуют между собой. Вместе с тем, реальные системы редко описываются строго линейными волновыми уравнениями (исключение составляет квантовая механика), поэтому использование теории линейных волн в прикладных задачах обычно сопровождается применением теории возмущений, в каждом порядке которой решаются линейные волновые уравнения. Однако использование теории возмущений в теории нелинейных волновых систем имеет существенные недостатки, когда протекающие в них процессы обладают значительной энергией.

Основная трудность линейного подхода в приложении к нелинейным волнам состоит в том, что каждый порядок теории возмущений можно рассматривать как набор подсистем одной общей системы, в которой существует влияние базовых элементов низших порядков на более высокие. При этом в нелинейной среде почти всегда существуют условия для возникновения резонансного взаимодействия подсистем, что приводит к потере устойчивости этих подсистем и решений в целом (см. например, [28] и библиографию там). Поэтому, если не принимать специальных мер, то ряды возмущений невозможно использовать на достаточно больших интервалах времени. Устранить этот недостаток теории возмущений удается за счет специальной процедуры исключения резонансов, которая является одним из важных принципов в современных приближенных теориях нелинейных волн. Однако эта процедура приводит к необходимости вновь решать нелинейные уравнения, что возвращает проблему в исходную точку. Таким образом, для описания явлений, имеющих существенно нелинейную природу, необходимо научиться решать именно нелинейные уравнения, не пытаясь заменить их слишком упрощенными приближенными линейными уравнениями.

Одним из таких направлений, которое сыграло важную роль в формировании современных представлений о свойствах нелинейных волновых процессов, является теория солитонов, основанная на методе обратной задачи рассеяния (МОЗР). Теория солитонов описывает волновые локализованные в пространстве образования в диспергирующих средах без диссипации. Эта теория предлагает в качестве базовых элементов солитоны - уединенные волны, взаимодействующие между собой упруго. В рамках МОЗР из отдельных таких элементов с помощью специального нелинейного принципа суперпозиции “собираются” более сложные многосолитонные решения. В отношении наличия в теории конструктивно определенных базовых элементов и принципа суперпозиции теория солитонов подобна теории линейных волн. Однако в отношении возможности гибко использовать эти понятия на практике теория солитонов существенно отстает от теории линейных колебаний и волн. Например, в теории солитонов отсутствуют простые рецепты того, как редуцировать исходное “сложное” не солитонное уравнение к уравнению, допускающему решения с помощью МОЗР. Напротив, формально перейти от нелинейного уравнения к линейному в большинстве случаев можно простым пренебрежением нелинейными членами. При этом обычно достаточно ясен и физический смысл такой редукции, эквивалентный переходу к малым по амплитуде колебаниям или волнам. Эту проблему приведения несолитонных уравнений к солитонным мы в дальнейшем будем называть проблемой редукции.

С точки зрения экспериментатора у солитонов имеется еще одно важное и полезное свойство - простота его визуальной идентификации в эксперименте. Солитон - это уединенная волна, но обладающая особым свойством упругого взаимодействия с подобными же волнами. Если не обращать внимание на требование упругости взаимодействия, которое на практике бывает трудно проверить, а остановиться на свойстве уединенности солитона, то экспериментатор может легко идентифицировать такой процесс, даже в достаточно сложных условиях присутствия других составляющих волнового процесса. В результате, понятие солитона, удобное с точки зрения интерпретации визуальных наблюдений тех или иных процессов, утратило первоначальный смысл. В большинстве работ в настоящее время под солитоном понимают просто уединенную волну, не подразумевая упругого взаимодействия их между собой. Этот факт следует отнести к некоторой неудовлетворенности экспериментаторов теорией солитонов, поскольку в ней не содержатся рецепты выделения солитонов как таковых по экспериментальным данным, наподобие спектрального анализа в теории линейных колебаний и волн. В настоящей работе мы не будем заниматься непосредственно решением этой проблемы. Достаточно пока помнить о ее существовании. Решение ее зависит от возможности разрешения других, по видимому, более простых задач.

Остановимся более подробно на попытках разработать достаточно универсальный метод решения проблемы редукции. Частью этой общей проблемы являются две подзадачи. Первая из них состоит в разработке однозначной процедуры ответа на вопрос: является данное конкретное уравнение солитонным или нет? Вторая в некотором смысле обратна первой и состоит в решении проблемы перечисления всех солитонных уравнений, удовлетворяющих некоторым физическим условиям, например, порядку дисперсии иди типу нелинейности. От решения этой задачи во многом зависит решение и общей проблемы редукции, которая должна включать в себя и собственно метод выделения из не солитонного уравнения уравнений, которые находятся в результате решения первых двух подзадач.

Смысл проблемы перечисления можно прокомментировать следующим образом. Как сейчас хорошо известно, набор солитонных моделей весьма узок и содержит не более двух десятков важных для практики солитонных уравнений, например, уравнение Кортевега-де-Вриза (KdV), Нелинейное уравнение Шредингера (НУШ), Кадомцева-Петвиашвилли (КП), Sin-Gorgon (SG) и т.д. Само по себе это не является существенной проблемой, если имеется простой способ сводить достаточно широкий класс уравнений к солитонным уравнениям указанного типа. Однако, как уже указывалось, в теории солитонов отсутствуют простые рецепты, позволяющие редуцировать несолитонные уравнения к солитонным. Одним из основных способов получения солитонных уравнений в прикладных задачах является специальный метод теории возмущений, который называется обычно методом многомасштабных разложений с исключением резонансов, также упоминавшийся выше (см. [9, **?**, 16]). Этот метод, хотя и не очень сложен в применении, однако, не гарантирует получения в результате его применения уравнений солитонного типа. Поэтому большинство попыток решить проблему редукции сводились к максимально возможному расширению списка солитонных уравнений. Если имеется богатый список солитонных уравнений, то среди них можно надеяться подобрать уравнение в чем то схожее с исследуемым. Для этого предлагалось достаточно много различных способов, см. например, обзоры [60, 29, 51, 16] и библиографию там. В последнее время центр тяжести таких исследований переносится на случай многокомпонентных систем и систем с большой размерностью координатного пространства, поскольку в однокомпонентных системах и малых размерностях, практически все солитонные уравнения, повидимому, уже полностью перечислены (см., например, [57]). В связи с этим интерес представляют так называемые деформации известных систем [2, 90, 8, 85] и методы их построения, обладающие максимальной универсальностью.

Ответ на первый, из поставленных выше вопросов, о проверке интегрируемости уравнения с помощью МОЗР обычно соотносят с гамильтоновским подходом к теории интегрируемости бесконечно-мерных динамических систем [29]. В связи с этим в теории солитонов играют важную роль дифференциальные законы сохранения. Для проверки интегрируемости уравнения, представленного в гамильтоновской форме, необходимо наличие у него достаточно богатой системы законов сохранения. В конечномерном случае их число должно быть равно числу степеней свободы, в бесконечномерном случае должно быть бесконечным. Если скобки Пуассона всех сохраняющихся величин (плотностей), при достаточном их количестве, обращаются в ноль, то согласно теореме Арнольда-Мозера-Лиувилля (см. [28]) такое уравнение, по крайней мере частично, интегрируемо. Последнее означает, что уравнение содержит солитонные или квазисолитонные решения. Такая схема проверки интегрируемости уравнений на практике оказывается трудно выполнимой из-за технических трудностей. Поэтому ее, как правило, модифицируют. В работах [48, 47] эта проблема решалась с помощью доказательства существования решений операторных уравнений определенного вида, связанных с исходным. В результате можно составить списки интегрируемых уравнений (см. также [**?**, 58, **?**]). Однако данный метод не позволяет в общем случае для каждого уравнения списка вычислить операторы Лакса, что затрудняет использование его на практике.

Для решения задачи о проверке на интегрируемость предлагались и другие методы, не связанные непосредственно с гамильтоновостью исследуемых уравнений. Характерным примером такого метода может служить тест Пенлеве (см. например, [51] и библиографию там).

Вообще, для выявления и перечисления солитонных уравнений было предложено множество других, более простых частных способов. Каждый из таких способов опирается на то или иное свойство солитонных уравнений, которое непосредственно не связано с законами сохранения, но является достаточно общим для них. Нет возможности перечислить все попытки построить достаточно простую и универсальную схему проверки интегрируемости (см. например, [29, 60, 51, 16] и библиографию там). Поэтому, укажем наиболее важные на наш взгляд работы в этом направлении, которые могут быть сопоставлены с методом тождеств Лагранжа, предложенным в работах автора данной монографии [20, 21] и составляющим основу изложения первой части данной работы.

С физической точки зрения одним из основных свойств солитонных уравнений является тип и порядок дисперсионной кривой. Поэтому много работ было посвящено перечислению солитонных уравнений с заданными свойствами дисперсии. Эта задача исследовалась разными способами и в этом направлении был получен целый ряд важных результатов.

В работах [60, 29, 93, ?, 32] был предложен метод вычисления интегрируемых с помощью МОЗР уравнений, опирающийся на процедуру “одевания” операторов представления Лакса. Эти исследования сыграли важную роль в формировании современных представлений о многомерных солитонных уравнениях. В ряде работ (например, [2, 41, 56]) предлагались методы вычисления формы солитонных уравнений, связанных с алгебрами симметрий дифференциальных уравнений. К работам этого типа можно отнести и подход Уолквиста-Эстабрука [2, 90]. Основная трудность использования этих методов на практике состоит в том, что форма уравнений, получающихся с их помощью, заранее не связана с формой исходного уравнения, а определяется самой процедурой построения или типом симметрии. Однако эти методы, как правило, сразу дают возможность применять к получающимся уравнениям МОЗР, поскольку для каждого из них предъявляют пару операторов представления Лакса.

Еще один подход к решению поставленной задачи основан на процедурах “деформации” представлений Лакса, связанных с подстановками общего вида координатных переменных и спектрального параметра в операторах этого представления (см. например [8, 85]). Этот подход требует в качестве исходного материала уравнение с известной парой Лакса и позволяет находить новые классы уравнений, интегрируемых с помощью МОЗР, получающиеся в результате таких деформаций.

Проведенный анализ показывает, что основную проблему развития теории солитонов в направлении создания на ее основе достаточно универсальной процедуры представления нелинейных волновых процессов в форме суперпозиции волн типа солитонов можно сформулировать следующим образом. *Необходимо разработать универсальный способ построения представления типа Лакса-Захарова-Шабата для уравнений досточно произвольного типа и научится выделять среди них те, которые действительно обладают солитонными решениями.*

Решение этой задачи в простой и подходящий для произвольных полиномиальных по производным от неизвестной функции уравнений форме, было дано в работах автора данной монографии [20, 21]. Способ решения поставленной проблемы, предложенный в этих работах, опирается на методы теории сопряженных уравнений и связан с возникающими в этой теории дифференциальными законами сохранения, которые, в свою очередь, являются следствием обобщенных тождеств Лагранжа.

Поэтому в дальнейшем он называется методом обобщенных тождеств Лагранжа. Этот способ построения интегрируемых с помощью МОЗР уравнений применим, как в размерности 1+1, так и в случае большей размерности. Следует отметить, что методы сопряженных уравнений широко используются в различных прикладных областях теоретической и математической физики. В этом отношении можно упомянуть работы по применению концепции сопряженных уравнений в такой практически важной области как теория переноса с приложеними к атомным реакторам (см. например, [43, 70]) и теории методов прогноза погоды [45]. Использовались они и в теории метода обратной задачи рассеяния [29]. *Однако основным достижением работ [20, 21] явилось: 1) создание на базе теории сопряженных уравнений универсальной базы вычисления общих дифференциальных законов сохранения для уравнений полиномиального типа в произвольной размерности; 2) одновременного вычисления для них представлений типа Лакса-Захарова-Шабата, и 3) в разработке способа выделения среди них уравнений, имеющих истинное представление Лакса-Захарова-Шабата, к которому применима стандартная процедура МОЗР.*

Единственной сложностью, с которой приходится сталкиваться при построении солитонных уравнений методом тождеств Лагранжа, является огромный объем вычислений для случая многомерных нелинейных уравнений. По-видимому, именно это является скрытой причиной отсутствия в практике теории солитонов достаточно богатого набора многомерных нелинейных уравнений. Основная проблема возникновения большого объема вычислений в методе тождеств Лагранжа для многомерных уравнений состоит в том, что тип нелинейности солитонного уравнения определяется не общей формой дисперсионного соотношения для линейной его части, а локальной структурой каждой отдельной одномерной (возможно комплексной) дисперсионной кривой, лежащей на дисперсонной гиперповерхности, и имеющей рацональную парметризацию. Для каждой такой дисперсионной кривой тип нелинейности и солитонов различен. Метод же тождеств Лагранжа дает общее решение задачи для всех дисперсионных кривых вместе взятых, лежащих на одной и той же дисперсионной гиперповерхности и, поэтому, в его рамках требуюся дополнительные усилия, чтобы разделить различные типы представлений Лакса-Захарова-Шабата для различных типов дисперсионных кривых. Вследствие этого для некоторых типов нелинейных уравнений в работах [22, 24] были предложены некоторые другие способы построения и исследования солитонных уравнений. Эти методы строятся на базе метода преобразований Дарбу, ранее использовавшегося в теории солитонов для построения солитонных решений [81, 66]; по поводу истории этого метода смотрите библиографию к этим работам. В работе [22] этот метод был применен для построения самих солитонных уравнений, что явилось новым элементом в использовании метода преобразований Дарбу в рамках МОЗР.

Изложению этих результатов и некоторых их обобщений посвящена первая часть данной монографии.

1.3 Теория автоволн в средах с диффузией

Бездиссипативные диспергирующие среды, в которых для описания волн применима теория солитонов и МОЗР, не исчерпывают всех важных с прикладной точки зрения систем, в которых существенную роль играют нелинейные процессы. Примером такого класса систем являются многокомпонентные нелинейные системы с диффузией, которые являются основным объектом в области исследований самоорганизации систем, возникновения когерентных структур в них, возбуждения и распространения автоволн. К настоящему времени в этой области достигнут значительный прогресс [110, 102, 121, 130, 124, 108, 116]. Теории такого типа имеют к настоящему времени достаточно развитую классификацию моделей и явлений, наблюдающихся в них [102, 116]. Наиболее ярким и впечатляющим примером могут служить спиральные волны и волны типа "ведущий центр", наблюдаемые в многокомпонентных химических реакциях и биологических системах. Имеются модели, ориентированные на явления другого типа. Например, модели процессов с "обострением" [55, 105], модели циклических процессов типа Лотке-Вольтерра [126, 119, 130] и т.д.

Как уже указывалось, именно в теории автоволн впервые было введено понятие базовых моделей. Это понятие позволило внести некоторую упорядоченность в список моделей, используемых в различных прикладных задачах теории автоволн, и стандартизировать их классификацию. В качестве примера достаточно упомянуть такие модели как модели "брюсселятора" [132, 124] и "орегонатора" [133, 124, 119], модели Фитц Хью-Нагумо [134] и т.д [102, 119]. Существенным недостатком этих моделей является их неинтегрируемость. К сожалению, даже такие просто регистрируемые явления, обладающие высокого класса симметрией в пространстве и времени, как спиральные волны или волны типа "ведущий центр", исследуются в рамках этих моделей лишь численно или на качественном уровне и не имеют аналогов в форме точных решений, хотя бы для одной из рассматривавшихся ранее базовых моделей [102, 109]. В результате теория автоволн лишена базовых элементов, аналогичных гармоническим волнам или хотя бы солитонам, из которых можно было бы строить или "собирать" сложные решения. Понятие автосолитона, фигурирующее во многих современных работах по автоволнам (см. например [116]) не имеет статуса базового элемента, аналогичного статусу солитона в теории волн в средах с дисперсией, и отражает лишь внешнее сходство между уединенными волнами в активных средах с диффузией и солитонами. Вместе с тем, наблюдение в экспериментах хорошо выделенных пространственных структур (ведущий центр, автосолитон, когерентная структура и т.п.) указывают на возможность построения теории автоволн и когерентных структур в форме теории с некоторыми базовыми элементами, которые еще предстоит найти.

Таким образом, ситуация в области автоволновых процессов оказывается более сложной по сравнению с теорией нелинейных волн в диспергирующих средах. Поэтому одну из главных текущих задач, стоящих перед теорией автоволн, можно сформулировать следующим образом. *Необходимо максимально расширить списки уравнений, описывающих автоволновые процессы, и одновременно допускающие богатые классы точных решений.* Повидимому, нет оснований надеяться, что теория интегрируемости, применимая к гамильтоновским системам, и тесно связанная с теорией солитонов, может быть использована широко в этом разделе теории нелинейных волн. Поэтому необходимо, по возможности, максимально раширять область поиска моделей автоволн, допускающих точные решения. Можно ожидать, что это позволит выделить наиболее универсальные элементы таких моделей и возможно построить теорию с достаточно унивесральными базовыми элементами.

Существенного прогресса в направлении разработки моделей автоволн, допускающих не одиночные точные решения, а богатые классы точных решений, удалось достичь в работах автора данной монографии [23, 111, 112]. Эти новые модели, найденные и изученные в указанных работах, выделяются в особый класс моделей, который имеет смысл условно назвать диффузионными цепочками Тоды (ДфЦТ). Они являются обобщением хорошо известных в МОЗР, двумеризованных цепочек Тоды (ДЦТ) (см. например [41, 17, 117, 25] и библиографию там). Двумеризованные цепочки Тоды являются полностью интегрируемыми уравнениями, имеющими представления Лакса-Захарова-Шабата и допускают точные решения солтонного типа. Однако, как было показано сначала в работах [86, 41], а затем с иных позиций в работе [25], эти урвнения допускают и другой класс решений в форме квадратичных форм. Именно эта уникальная особенность двумеризованных цепочек Тоды позволяет для некоторых из них провести обобщение и построить решения диффузионных уравнений с нелинейностью типа цепочек Тды. Такие построения и явились основой для работ автора данной монографии [111, 112]. Повидимому диффузионные цепочки Тоды явились первым и пока единственным общим классом моделей автоволн, допускающим богатые классы точных решений, воспроизводящих достаточно большое число наблюдаемых в этих процессах явлений. Развитие и расширение этого подхода на некоторые новые классы моделей, в том числе многомерные, было проделано также в работах автора [19, 18]. Основная часть этих результатов и некотрые дополнения к ним излагаются во второй части данной монографии.

В общем случае классы точных решений, которые допускают диффузионные цепочки Тоды, не дают повода говорить об универсальности найденных новых базовых элементов, поскольку для большинства моделей не имеется хорошо очерченного принципа суперпозиции. Однако для некоторых моделей удается указать специфический новый по форме принцип суперпозиции [18]. К ним, например, относится нелинейное уравнение диффузии, имеющее приложения в ряде разделов физики и гидромеханики [97, 99, 104]. В связи с этим необходимо еще раз подчеркнуть, что решения ДфЦТ строятся не на солитонных решениях ДЦТ, а на классе решений, представимых в виде логарифма квадратичных форм специального вида.

Следующий шаг в развитии теории базовых моделей, допускающих точные решения, в приложении к теории нелинейных волновых процессов в средах с дисперсией и средах с диффузией состоит в распространении идеи представления решений в форме квадратичных форм, лежащих в основе теории двумерных моделей, на случай многомерных волновых уравнений типа Лиувилля и цепочек Тоды. В этом случае решения должны быть представлены уже не в виде квадратичных форм, но и форм порядка n, где n совпадает с координатной размерностью пространства, на котором определен оператор Лапласа или Д‘Аламбера. Такой подход впервые был развит в работе автора монографии [19]. В основе его лежит специальное представление операторов Лапласа и Д'Аламбера в так называемой внедиагональной форме. Базовыми элементами такой теории служат решения, которым наиболее близко подходит название “многомерные кинки”. Оказывается, что такой подход позволяет строить решения не только многомерных уравнений Лиувилля и цепочек Тоды, но и линейных уравнений Лапласа и Д'Аламбера. Для линейных уравнений новые базовые элементы дают столь же обширный класс решений, как и гармонические волны и ортогональные моды. Кроме этого, важным является то, что данный метод применим как к процессам с дисперсией, так и к процессам с диффузией. Поскольку уравнения Лапласа, Д'Аламбера и Лиувилля относятся к классу урвнений в диспергирующих средах, то изложение этих вопросов в монографии отнесено к первой части.

ЧАСТЬ I
Модели теории нелинейных волн в диспергирующих средах

Глава 2

Тождество Лагранжа и солитонные модели волновых процессов

2.1 Дифференциальные законы сохранения

Под дифференциальным законом сохранения обычно понимают дифференциальное соотношение между некоторыми количественными характеристиками физических процессов, имеющее следующий вид:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{I} = 0. \tag{2.1}$$

Такой закон подразумевает, что физическая величина $q = \int\limits_V Q dV$ внутри любого объема пространства V, на котором задается оператор div дивергенции векторного поля $\mathbf{I}$, называемого током, сохраняется в том смысле, что изменение величины

$$q = \int\limits_V Q dV$$

определяется только количеством этой величины переносимой "током" $\mathbf{I}$ через поверхность, ограничивающую этот объем. Примером могут служить законы сохранения массы, заряда и числа частиц в физике, которые могут быть представлены в аналогичной форме (2.1). Именно возможность извлечь из уравнения Котевега-де-Вриза (KdV) бесконечную последовательность дифференциальных законов сохранения вида (2.1) с плотностями Q и токами $\mathbf{I}$, зависящими полиномиально от неизвестной функции и производных, найденная Миурой [83], стала отправной точкой в создании МОЗР. Уравнение KdV

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \tag{2.2}$$

первое уравнение, исследованное с помощью МОЗР, само представляет закон сохранения вида (2.1). Оно эквивалентно следующему уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial t}u + \frac{\partial}{\partial x}\left(3u^2 + u_{xx}\right) = 0.$$

Это же уравнение можно представить в форме и таких законов сохранения [83]:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left(u^2\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(2u^3 + uu_{xx} - \frac{1}{2}u_x^2\right) = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial t}\left(u^3 - \frac{1}{2}(u_x)^2\right) +\\
&+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{9}{2}u^4 - uu_{xxx} + \frac{1}{2}(u_{xx})^2 + +3u^2u_{xx} - 3u_x\frac{\partial}{\partial x}u^2\right) = 0.
\end{aligned}$$

Здесь и в дальнейшем используются следующие обозначения:

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \text{и т.д.}$$

Миура [83] показал, что для уравнения KdV эту цепочку можно продолжать до бесконечности и нашел алгоритм рекурентного вычисления всех высших законов сохранения, который теперь обычно называют преобразованием Миуры [83, 60, 29]. В дальнейшем было показано, что все интегрируемые с помощью МОЗР уравнения имеют бесконечные наборы дифференциальных законов сохранения типа (2.1), которые являются дифференциальными следствиями самих уравнений. Приведем еще один практически важный пример. Для нелиненейного уравнения Шредингера (НУШ)

$$iu_t - u_{xx} + æ|u|^2u = 0 \tag{2.3}$$

первый дифференциальный закон получается комбинацией (2.3) и комплексно сопряженного с ним уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial t}|u|^2 + i\frac{\partial}{\partial x}\left(u^*u_x - uu_x^*\right) = 0.$$

Цепочку законов сохранения для НУШ также можно продолжать до бесконечности.

Наличие достаточного числа высших законов сохранения у данной системы, а в бесконечномерном случае "достаточность" определяется индивидуально для каждого уравнения, является основным признаком интегрируемости. Поэтому поиск интегрируемых уравнений фактически эквивалентен поиску уравнений с богатым набором законов сохранения типа (2.1). Последняя задача является нетривиальной, и в общем виде ее решение, как было показано в работах [20, 21], сводится к исследованию тождеств Лагранжа.

2.2 Тождество Лагранжа и дифференциальные законы сохранения

Проиллюстрируем сначала метод тождеств Лагранжа на примере, являющемся простым обобщением уравнения НУШ. Физическая задача, отвечающая этому примеру, состоит в анализе модели распространения одной волны в одномерной нелинейной среде с квадратичной дисперсией. В реальных моделях такого типа волновой процесс представляется действительной функцией:

$$\mathcal{E}(x,t) = u(x,t)\mathrm{e}^{i(kx-\omega t)} + u^*(x,t)\mathrm{e}^{-i(kx-\omega t)},$$

описывающей отклонение среды (или поля в среде) от положения равновесия при прохождении волны через точку с координатой x в момент времени t. Здесь $u(x,t)$ - комплексная амплитуда волны, k и ω - волновое число и частота. Для большого круга физических задач уравнение, описывающее "медленные" изменения функции $u(x,t)$ в среде с квадратичной дисперсией имеет вид нелинейного параболического уравнения следующего общего вида:

$$\varepsilon u_t + r_2(x,t;u)u_{xx} + r_1(x,t;u)u_x + r_0(x,t;u)u = 0. \tag{2.4}$$

Здесь ε - постоянная, для недиссипативной среды ε - чисто мнимая величина. Коэффициенты $r_i(x,t;u), i = 0,1,2,$ как функции x,t описывают неоднородность среды, а выделенная зависимость их от функции $u(x,t)$ - ее нелинейные свойства. Примером могут служить задачи нелинейной оптики, задачи распространения гидродинамических волн и т.д. Частным случаем этого уравнения является уравнение НУШ (2.3).

Поставим следующую задачу: Каков должен быть функциональный вид коэффициентов $r_i(x,t;u)$ для того, чтобы уравнение (2.4) имело достаточно богатый набор законов сохранения вида (2.1). Начнем с того, что представим уравнение (2.4) в форме (2.1).

По аналогии с линейными дифференциальными уравнениями для уравнения (2.4) можно ввести понятие сопряженной функции и сопряженного уравнения. В общей теории линейных дифференциальных операторов для линейного оператора $\mathbf{L}$, действующего в пространстве функций $u(x,t)$, действие сопряженного ему оператора $\bar{\mathbf{L}}$, действующего в сопряженном пространстве функций $\phi(x,t)$, определяется таким образом, что для любых функций $\phi(x,t)$ и $u(x,t)$ в некоторой области $\Omega \subset R^2$ изменения аргументов x,t выполняется равенство:

$$\int\limits_{\Omega} \phi(\mathbf{L}u)dxdt = \int\limits_{\Omega} (\bar{\mathbf{L}}\phi)udxdt.$$

Тогда будет выполнятся и следующее равенство:

$$\int\limits_{\Omega} \phi(\mathbf{L}u)dxdt - \int\limits_{\Omega} (\bar{\mathbf{L}}\phi)udxdt = \int\limits_{\partial\Omega} J_1(x,t)dx + J_0(x,t)dt = 0.$$

где $\mathbf{J} = (J_0, J_1)$- векторное поле на Ω. Вид векторного поля $\mathbf{J}$ целиком определяется видом оператора $\mathbf{L}$ и может быть вычислен, исходя из обобщенного тождества Лагранжа:

$$\phi(\mathbf{L}u) - (\bar{\mathbf{L}}\phi)u \equiv \frac{\partial}{\partial t}J_0(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}J_1(x,t). \tag{2.5}$$

Полагая для уравнения (2.4)

$$\mathbf{L} = \varepsilon\frac{\partial}{\partial t} + r_2(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + r_1(x,t)\frac{\partial}{\partial x} + r_0(x,t), \tag{2.6}$$

находим сопряженный оператор

$$\bar{\mathbf{L}} = -\varepsilon\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}r_2(x,t) - \frac{\partial}{\partial x}r_1(x,t) + r_0(x,t). \tag{2.7}$$

В этих соотношениях явная зависимость r_0, r_1 и r_2 от неизвестной функции $u(x,t)$ на время опущена, т.е. предполагается, что зависимость от x,t учитывает возможную зависимость от $u(x,t)$. Явно вычисляя левую часть (2.5) находим явный вид компонент векторного поля $\mathbf{J}(x,t)$:

$$I = J_1(x,t) = r_1 u\phi + u_x\phi r_2 - u(\phi r_2)_x,\ Q = J_0(x,t) = \varepsilon u\phi.$$

Пусть $u(x,t)$ и $\phi(x,t)$ являются соответственно решениями уравнений

$$\mathbf{L}u(x,t) = 0, \quad \bar{\mathbf{L}}\phi(x,t) = 0. \tag{2.8}$$

Тогда согласно тождеству Лагранжа (2.5) выполняется обобщенный дифференциальный закон сохранения

$$\phi(\mathbf{L}u) - (\bar{\mathbf{L}}\phi)u \equiv \frac{\partial}{\partial t}J_0(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}J_1(x,t) = 0. \tag{2.9}$$

Следует указать на то, что данный закон сохранения широко используется в прикладных задачах, связанных с сопряженными уравнениями. Как уже упоминалось, дифференциальные законы сохранения типа (2.9) можно рассматривать в том числе и как законы сохранения числа частиц. Поскольку тождество Лагранжа приводит к таким законам сохранения независимо от природы исходного уравнения, то в работе [91] (смотрите также [43, 70]) было предложено называть такие фиктивные частицы “контрибутонами”. В теории атомных реактров такая терминология является устоявшейся.

Обратим внимание теперь на следующее обстоятельство. Среди трех соотношений (2.8) и (2.9) линейно независимы только любые два. Поэтому полезно из рассмотрения исключить само исходное уравнение (первое уравнение в (2.8)), сосредоточившись на следующей паре уравнений:

$$-\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\phi + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(r_2(x,t)\phi\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(r_1(x,t)\phi\right) + r_0(x,t)\phi = 0, \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon u\phi\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(r_1 u\phi + u_x\phi r_2 - u(\phi r_2)_x\right) = 0. \tag{2.11}$$

Относительно функции ϕ это линейные уравнения, а последнее из них представляет собой дифференциальный закон сохранения. В силу линейности по $\phi(x,t)$ при фиксированной функции $u(x,t)$ функция $\phi(x,t)$ формально является функцией одного спектрального параметра k: $\phi = \phi(k,x,t)$. Следовательно тождество (2.9) содержит не один закон сохранения, а целый набор таких законов, являющихся коэффициентами разложения компонент векторного поля $\mathbf{J}$ в ряд по степеням спектрального параметра k при $k \to \infty$. Продемонстрируем этот почти очевидный факт вычислениями для случая $r_2 = 1,\ \varepsilon = i$. Действительно, полагая

$$\phi = \phi(k,x,t) = e^{ikx+ik^2t}\xi(k,x,t) = e^{ikx+ik^2t}\sum_{n=0}^{\infty}\xi_n(x,t)k^{-n} \tag{2.12}$$

и подставляя этот ряд в первое уравнение (2.10), получаем следующую рекурентную систему уравнений для вычисления его коэффициентов

ξ_n:

$$
\begin{aligned}
&2\frac{\partial}{\partial x}\xi_0 - r_1\xi_0 = 0,\\
&i(2\frac{\partial}{\partial x}\xi_1 - r_1\xi_1) =\\
&\qquad = \left(i\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\xi_0 + r_1\frac{\partial}{\partial x}\xi_0 + (r_{1,x} - r_0)\xi_0 = -\bar{\mathbf{L}}\xi_0,\\
&\qquad \dots\\
&i(2\frac{\partial}{\partial x}\xi_n - r_1\xi_n) =\\
&\qquad = \left(i\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\xi_{n-1} + r_1\frac{\partial}{\partial x}\xi_{n-1} + (r_{1,x} - r_0)\xi_{n-1} = -\bar{\mathbf{L}}\xi_{k-1},\\
&\qquad \dots
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

Отсюда получаем:

$$
\begin{aligned}
&\xi_0 = C_0 \exp\left\{\frac{1}{2}\int r_1 dx\right\},\\
&\xi_1 = i\xi_0 \int \frac{1}{2\xi_0}\bar{\mathbf{L}}\xi_0 dx + \xi_0 C_1,\\
&\dots,\\
&\xi_k = i\xi_0 \int \frac{1}{2\xi_0}\bar{\mathbf{L}}\xi_{k-1} dx + \xi_0 C_k,\\
&\dots,
\end{aligned}
$$

где C_k - произвольные постоянные и $\bar{\mathbf{L}}$ - оператор, определенный соотношением (2.7) при условиях: $\varepsilon = i,\ r_2 = 1$.

Рассмотрим теперь уравнение (2.11). Это уравнение эквивалентно следующей паре уравнений:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\psi(k,x,t) = -\varepsilon u\phi = -J_0, \qquad (2.14)\\
&\frac{\partial}{\partial t}\psi(k,x,t) = r_1 u\phi + u_x\phi r_2 - u(\phi r_2)_x = J_1(x,t),
\end{aligned}
$$

для некоторой вспомогательной функции $\psi(k,x,t)$, также зависящей от спектрального параметра k. Разложение для ψ будем искать в той же форме, что и ϕ (2.12):

$$
\psi = \psi(k,x,t) = e^{ikx+ik^2t}\chi(k,x,t) = e^{ikx+ik^2t}\sum_{n=0}^{\infty}\chi_n(x,t)k^{-n}. \tag{2.15}
$$

Подставляя (2.15) в (2.14), получаем:

$$\frac{\partial}{\partial x}\chi = -\varepsilon u\xi - ik\chi, \tag{2.16}$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\chi = r_1 u\xi + u_x\xi - u\xi_x - iku\xi - ik^2\chi.$$

Первые коэффициенты разложения χ в ряд по параметру k при этом будут такими:

$$\begin{aligned}
&\chi_0 = 0, \quad \chi_1 = -u\xi_0,\\
&\chi_2 = i\frac{\partial}{\partial x}\chi_1 - u\xi_1,\\
&\qquad\ldots,\\
&\chi_k = i\frac{\partial}{\partial x}\chi_{k-1} - u\xi_{k-1} = \sum_{m=0}^{k-1} i^{k+1-m}\frac{\partial^{k-1-m}}{\partial x^{k-1-m}}\left(u\xi_m\right),\\
&\qquad\ldots.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Ряды, получающиеся из первого и второго уравнений (2.16), совпадают при условии, что $u(x,t)$ - решение исходного уравнения. Функции ξ и χ представляют собой степенные ряды по k^{-1}. Следовательно, все законы сохранения, соответствующие исходному уравнению, являются разложением в степенной ряд по k уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(iu\xi + ik\chi\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(r_1 u\xi + u_x\xi - u\xi_x - iku\xi - ik^2\chi\right) = 0. \tag{2.18}$$

При вычислении этих дифференциальных законов сохранения следует учитывать соотношения, которым должны удовлетворять коэффициенты рядов ξ и χ в силу (2.13) и (2.16). Например, первые нетривиальные законы сохранения выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}
k^{-1}:\quad & \frac{\partial}{\partial t}(-iu\xi_1 - i\chi_2) +\\
&+\frac{\partial}{\partial x}\left(r_1 u\xi_1 + u_x\xi_1 - u\xi_{1,x} - iu\xi_2 - i\chi_3\right) = 0,\\
k^{-k+1}:& \ldots,\\
k^{-k}:\quad & \frac{\partial}{\partial t}(-iu\xi_k - i\chi_{k+1}) +\\
&+\frac{\partial}{\partial x}\left(r_1 u\xi_k + u_x\xi_k - u\xi_{k,x} - iu\xi_{k+1} - i\chi_{k+2}\right) = 0,\\
\ldots.&
\end{aligned}$$

Сохраняющиеся плотности этих законов сохранения, согласно (2.17), имеют вид:

$$
\begin{aligned}
Q_1 &= \frac{\partial}{\partial x}\chi_1 = -\frac{\partial}{\partial x}\left(u\xi_0\right),\\
&\ldots,\\
Q_k &= \frac{\partial}{\partial x}\chi_k = i\sum_{m=0}^{k-1} i^{k-m}\frac{\partial^{k-m}}{\partial^{k-m}x}\left(u\xi_m\right),\\
&\ldots .
\end{aligned}
$$

Нетривиальные законы сохранения начинаются со степени k^{-1} и выше. Заметим, что вспомогательная функция $\chi(x,t)$ представляет собой не что иное как псевдопотенциал Уолквиста-Эстабрука [90, 2]. Фактически с помощью тождества Лагранжа мы получили способ построения псевдопотенциалов Уолквиста-Эстабрука для уравнений (2.4), которые играют важную роль в теории продолженных структур [90, 2].

Заметим далее, что функции ξ_n и χ_n выражаются исключительно через функции u, r_0, r_1 (в общем случае и через r_2), их производные и, возможно, интегралы от комбинаций этих функций. Таким образом, мы явно указали бесконечный набор законов сохранения, соответствующий любому из исходных уравнений общего вида (2.4). Однако, для полной интегрируемости в смысле теоремы Лиувилля-Арнольда-Мозера (см. [49, 117]) этого еще недостаточно. Требуется, во-первых, чтобы уравнение (2.4) имело гамильтоновское представление, т.е. необходимо явно указать вид скобок Пуассона для этого уравнения, как для бесконечномерной гамильтоновской системы, и, во-вторых, чтобы полученные сохраняющиеся плотности находились в инволюции относительно этих скобок Пуассона, т.е. скобки Пуассона всех пар сохраняющихся плотностей обращались в ноль. Прямой путь, связанный с проверками всех этих требований, представляется слишком громоздкими. Он может быть существенно облегчен, если заметить, что при выполнении этих требований сохраняющиеся плотности имеют вид дифференциальных полиномов от неизвестной функции и не содержат интегралов. Но даже после решения этих проблем и доказательства того, что данное уравнение полностью интегрируемо, остается в конце концов проблема построения точных решений этих уравнений. Процедура доказательства полной интегрируемости не представляет способа вычисления самих точных решений.

2.3 Тождество Лагранжа и представление Лакса-Захарова-Шабата

Существует, однако, другой более простой и конструктивный путь выяснения условий, по крайней мере частичной интегрируемости (2.4), т.е. условий, при которых уравнение (2.4) допускает многосолитонные решения, это построение для него представления Лакса [60, 29]. Представление Лакса, в более общем случае Лакса-Захарова-Шабата (ЛЗШ), является отправной точкой для применения к данному уравнению МОЗР, который дает явный способ построения точных солитонных и периодических решений этого уравнения. Рассмотрим, каким образом этот путь может быть реализован на практике.

Представление Лакса-Захарова-Шабата состоит в том, что исходное уравнение представляется в форме условий совместности системы конечного числа линейных дифференциальных уравнений, содержащих явным и нетривиальным образом некоторый спектральный параметр, обозначим его k. Число этих вспомогательных уравнений в общем случае равно координатной размерности пространства, на котором задано уравнение, но может быть и меньшим. Сами эти уравнения могут иметь матричные коэффициенты. В математической форме это означает, что исходное уравнение должно быть единственным условием коммутативности некоторой совокупности матричных операторов $\mathbf{L}_i, \quad i = 1, \ldots, n$, представляющих систему уравнений

$$\mathbf{L}_i \Psi = \Lambda(k)\Psi, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Иными словами, исходное уравнение (2.4) должно быть единственным условием выполнения совокупности операторных соотношений

$$[\mathbf{L}_i, \mathbf{L}_j] = 0, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Покажем, как можно построить представление Лакса-Захарова-Шабата для (2.4), используя тождество Лагранжа. Для этого в соотношениях (2.10)-(2.11) введем вспомогательную вектор-функцию

$$\mathbf{\Psi}(x,t) = \begin{pmatrix} \psi(x,t) \\ \phi(x,t) \end{pmatrix}.$$

Совокупность второго уравнения (2.8) и уравнения (2.9) можно записать в виде системы из двух векторных уравнений относительно этой вектор-функции $\mathbf{\Psi}(x,t)$ с некоторыми матрицами $\mathbf{U}(x,t)$ и $\mathbf{V}(x,t)$ размерности 2×2:

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{\Psi}(x,t)=\mathbf{U}(x,t)\mathbf{\Psi}(x,t),\quad \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{\Psi}(x,t)=\mathbf{V}(x,t)\mathbf{\Psi}(x,t),\tag{2.19}$$

Для этого необходимо дополнить их одним соотношением вида:

$$\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,t)=a(x,t)\psi(x,t)+b(x,t)\phi(x,t),\tag{2.20}$$

где $a(x,t)$ и $b(x,t)$ - некоторые вспомогательные (произвольные пока) функции. Соотношение (2.20) не накладывает никаких дополнительных условий на функции ψ и ϕ, и оправдывается тем, что в результате условием совместности пары уравнений (2.19) оказывается исходное уравнение (2.4) и два дополнительных уравнения для вспомогательных функций a и b, получить которые - наша дальнейшая задача.

Вычислим для этого матрицы $\mathbf{U}(x,t)$ и $\mathbf{V}(x,t)$. Эти вычисления производятся прямой подстановкой (2.14) и (2.20) в (2.10) и (2.11). После несложных вычислений получаем:

$$\mathbf{U}(x,t)=\begin{pmatrix}0 & \varepsilon u\\ a & b\end{pmatrix},\quad \mathbf{V}(x,t)=\begin{pmatrix}r_2ua & u(b+r_{2x}-r_1)-u_xr_2\\ A/\varepsilon & B/\varepsilon\end{pmatrix},\tag{2.21}$$

где

$$A(x,t)=a(br_2-r_1+2r_2)+a_xr_2,$$
$$B(x,t)=\varepsilon aur_2+b_xr_2+b(br_2-r_1+2r_{2x})+r_{2xx}-r_{1x}+r_0.$$

Условие совместности пары уравнений (2.19) может быть записано в виде условия нулевой кривизны Захарова-Шабата [29]

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{U}(x,t)-\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{V}(x,t)+[\mathbf{U}(x,t),\mathbf{V}(x,t)]=0,\tag{2.22}$$

где квадратные скобки $[,]$ означают обычный матричный коммутатор. Подставляя в (2.22) $\mathbf{U}(x,t)$ и $\mathbf{V}(x,t)$ из (2.21), непосредственной проверкой убеждаемся, что уравнения (2.22) эквивалентны исходному уравнению (2.4) и двум дополнительным уравнениям:

$$\begin{aligned}&\varepsilon a_t-r_2a_{xx}+(r_1-3r_{2x})a_x+\\&\qquad+a\left(2r_{1x}-2b_xr_2-r_0-3r_{2xx}-br_{2x}\right)=0,\\&\varepsilon b_t-\\&\quad-\frac{\partial}{\partial x}\left(b_xr_2+r_2b^2-(r_1-2r_{2x})b+2\varepsilon aur_2+r_0-r_x+r_{2xx}\right)=0.\end{aligned}\tag{2.23}$$

Таким образом, показано, что первая часть задачи решена. Этот результат можно сформулировать в форме следующего утверждения.

Утверждение 2.1 *Любое уравнение (2.4)*

$$\varepsilon u_t + r_2(x,t;u)u_{xx} + r_1(x,t;u)u_x + r_0(x,t;u)u = 0 \tag{2.24}$$

с произвольными дважды дифференцируемыми коэффициентами, зависящими от координатных переменных и самой неизвестной функции имеет представление в форме условия коммутативности двух матричных операторов первого порядка, явный вид которых определяется соотношениями (2.21). При этом вспомогательные функции удовлетворяют уравнениям (2.23).

Однако это представление еще не является, строго говоря, представлением Лакса-Захарова-Шабата и в дальнейшем для этого представления будем использовать далее термин "псевдопредставление" Лакса-Захарова-Шабата (ЛЗШ). Ниже это определение будет уточнено.

2.4 Построение уравнений, допускающих солитонные решения

Псевдопредставление Лакса-Захарова-Шабата непосредственно не может быть использовано в МОЗР для построения солитонных решений, поскольку не содержит в явном виде спектральный параметр. Необходимость в таком параметре может быть обоснована, например, в рамках подхода Гельфанда-Дикого [12, 15]. Согласно теории Гельфанда-Дикого, гамильтоновость и интегрируемость уравнений, имеющих представление Лакса и, следовательно, возможность применить МОЗР к ним, связана с существованием специального разложения резольвенты одного из операторов представления по спектральному параметру. Поэтому первым необходимым условием использования МОЗР для решения уравнений (2.4) является явная зависимость матриц $\mathbf{U}(\mathbf{x},\mathbf{t})$ и $\mathbf{V}(\mathbf{x},\mathbf{t})$ в представлении (2.19) от некоторого комплексного параметра λ, который бы превращал систему линейных уравнений (2.19) в нетривиальную систему спектральных задач. Предполагается, что сама неизвестная функция $u(x,t)$ от λ не зависит. Этот спектральный параметр, очевидно, должен совпадать с параметром k, по которому производится разложение ξ и χ в законе сохранения (2.9). Исходя из этих соображений, можно сделать вывод, что единственным нетривиальным способом ввести в систему уравнений (2.19) спектральный параметр (при независимости $u(x,t)$ от λ) - это предположить некоторую явную зависимость от λ функций a, b, т.е., положить $a = a(x,t,\lambda)$, $b = b(x,t,\lambda)$. Без этого введение спектрального параметра с помощью подстановок (2.12) и (2.15), в которых в явном виде имеется параметр k, играющий роль спектрального параметра, является тривиальным преобразованием.

В работах [12, 15] было показано, что для того, чтобы связать с данным матричным оператором первого порядка коммутирующий с ним новый оператор или целый набор операторов и, как следствие, набор нетривиальных нелинейных уравнений, имеющих представление ЛЗШ, необходимо, чтобы его матрица $\mathbf{U}$ имела вид:

$$\mathbf{U} = \lambda \mathbf{D}(\mathbf{t}) + \mathbf{U}_0(x,t) \tag{2.25}$$

при выполнении двух условий: 1) $\mathbf{D} = diag(d_1(t), d_2(t))$ - диагональная матрица и $d_1(t) \neq d_2(t)$; 2) диагональные элементы матрицы $\mathbf{U}_0$ равны нулю. В работах [12, 15] предполагалось, что $d_1 \neq d_2 = const$. Однако появление зависимости от t в d_1, d_2 не нарушает основных выводов этих работ.

Для удобства представление типа (2.19), снабженное спектральным параметром, будем называть в дальнейшем истинным представлением ЛЗШ или просто представлением ЛЗШ, если хотя бы одна из матриц представления имеет вид (2.25). Представления, не удовлетворяющие этому условию, будут называться псевдопредставлениями или представлениями типа ЛЗШ.

Рассмотрим вначале случай $r_2 \equiv 1$, что соответствует отсутствию неоднородности и нелинейности в квадратичном члене дисперсии среды. Следуя (2.25), положим

$$a(x,t,\lambda) = \lambda a_1(x,t) + a_0(x,t),\ b(x,t,\lambda) = \lambda b_1(x,t) + b_0(x,t). \tag{2.26}$$

Покажем, что в этом случае с помощью калибровочных преобразований матричных уравнений представления ЛЗШ (2.19) с матрицами (2.21) и условиями (2.26) одно из этих уравнений преобразуется к виду (2.25).

Подстановка соотношений (2.26) в (2.22),(2.23) и преобразование $\Psi \to \Psi' = \exp\{\lambda\theta(x,t)\}\Psi$ позволяет представить матрицу $\mathbf{U}$ в виде

$$\mathbf{U} = \lambda \mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_0,$$

где

$$\mathbf{U}_1(x,t) = \begin{pmatrix} \theta_x & 0 \\ a_1 & b_1 + \theta_x \end{pmatrix}. \tag{2.27}$$

Матрица $\mathbf{U}_1$ - невырожденная нижнетреугольная и, поэтому, может быть приведена к диагональному виду с помощью преобразования подобия, не зависящего от λ, которое индуцирует калибровочное преобразование операторов $\mathbf{L}_1 = \partial_x - \mathbf{U}$ и $\mathbf{L}_2 = \partial_t - \mathbf{V}$ представления типа Лакса (2.19-2.21). При этом матрицы $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ преобразуются по правилу (калибровочное преобразование):

$$\mathbf{U} \to \mathbf{g}^{-1}\mathbf{U}\mathbf{g} - \mathbf{g}^{-1}\partial_x\mathbf{g},\ \mathbf{V} \to \mathbf{g}^{-1}\mathbf{V}\mathbf{g} - \mathbf{g}^{-1}\partial_t\mathbf{g},$$

где

$$\mathbf{g}(x,t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -a_1/(b_1+\theta_x) & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.28}$$

В результате матрица $\mathbf{U}_1$ принимает вид диагональной матрицы с элементами $\mathbf{U}_1 = \mathrm{diag}\{d_1 = \theta_x, d_2 = b_1(x,t) + \theta_x\}$. При этом матрица $\mathbf{U}_0$ будет иметь следующий вид

$$\mathbf{U}_0(x,t) = \begin{pmatrix} -\varepsilon u a_1/b_1 & \varepsilon u \\ A_0 & B_0 \end{pmatrix} \tag{2.29}$$

где

$$A_0 = a_0 + \frac{\partial}{\partial x}\frac{a_1}{b_1} - \frac{a_1}{b_1}\left(\frac{a_1}{b_1}u + b_0\right),\ B_0 = \varepsilon\frac{ua_1}{b_1} + b_0.$$

Поэтому, если положить $\theta_x = \sigma = const$ и при этом уравнения (2.23) допускают решение $b_1 = b_1(t)$, то калибровочное преобразование с матрицей (2.28) приводит представление (2.19-2.21) к виду, в котором выполнено условие 1).

Сделаем теперь подстановку

$$u(x,t) = \tilde{u}(x,t)e^{\nu},\ a_1(x,t) = \tilde{a_1}(x,t)e^{-\nu},\ a_0(x,t) = \tilde{a_0}(x,t)e^{-\nu}, \tag{2.30}$$

и одновременно положим

$$\psi = \tilde{\psi}\exp\{-\xi(x,t)\},\ \phi = \tilde{\phi}\exp\{-\xi(x,t) - \nu\}.$$

Здесь

$$\xi(x,t) = \int^x \frac{ua_1}{b_1}dx,\ \nu(x,t) = -\int\left(\frac{2a_1u}{b_1} + b_0\right)dx$$

В результате этого матрица $\mathbf{U}_0$ будет иметь нулевую диагональ, а матрица $\mathbf{U}$ примет вид:

$$\mathbf{U} = \lambda\begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma + b_1(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon\tilde{u} \\ \tilde{A}_0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.31}$$

где $\tilde{A}_0 = A_0(x,t)e^{\nu}$. Отсюда следует, что для этого оператора выполнены условия применимости метода Гельфанда-Дикого. Калибровочные преобразования не нарушают интегрируемости уравнений. Поэтому представление типа Лакса (2.19-2.21) будет соответствовать, согласно [15], представлению интегрируемого уравнения в частных производных общего вида (2.4), к которым можно применять МОЗР.

Еще одним важным элементом проделанных построений является то, что они наглядно демонстрируют то, как устроено представление Лакса по отношению к структуре исходного уравнения. Важную роль в структуре этих представлений играет сопряженное к решениям исходного уравнения пространство функций. Операторы представления действуют в пространстве двухкомпонентных функций $\Psi = \mathrm{colon}\{\psi, \phi\}$, одной из компонент которых является функция ϕ - решение сопряженного к исходному уравнения, а вторая ψ - псевдопотенциал Уолквиста-Эстабрука, соответствующий тождеству Лагранжа. Существование солитонных решений наблюдается в том случае, если нелинейность исходного уравнения и сопряженного такова, что после сопряжения нелинейные слагаемые исходного уравнения переходят в нелинейные слагаемые сопряженного возможно после дополнительного явного преобразования координат и неизвестных функций.

2.5 Уравнения одной квазимонохроматической волны в средах с квадратичной дисперсией

Изложенная в предыдущем разделе процедура выделения уравнений, имеющих представления ЛЗШ, теперь может быть применена к отысканию конкретных уравнений, допускающих солитонные решения и имеющих общий вид уравнения (2.4). Более общие примеры построения уравнений такого типа мы отложим до следующей главы. Здесь же ограничимся несколькими частными примерами, чтобы продемонстрировать основные характеристики получающихся в результате этой процедуры уравнений.

Основной принцип вычисления уравнений, обладающих ЛЗШ, сводится к непосредственной подстановке условий (2.26) в уравнения (2.23) и почленному приравниванию коэффициентов этих уравнений, стоящих при степенях параметра λ. Чтобы придать получающимся в результате этой процедуры уравнениям более компактный вид, сделаем по аналогии с (2.30) следующую подстановку:

$$u(x,t)=\tilde{u}(x,t)e^{\mu},\quad a_1(x,t)=\tilde{a_1}(x,t)e^{-\mu},\quad a_0(x,t)=\tilde{a_0}(x,t)e^{-\mu},\quad (2.32)$$

где $\mu(x,t) = -\int b_0(x,t)dx$. В результате для функций $\tilde{u}(x,t), \tilde{a_0}(x,t)$ и $\tilde{a_1}(x,t)$, у которых для сокращения записи опущен знак ~, получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon u_t + u_{xx} + [r_1(t) - \varepsilon q(t)x]\, u_x + \\
&\qquad +2\varepsilon p(t)\frac{\partial}{\partial x}(a_1 u^2) - 2\varepsilon a_0 u^2 + [r_2(t) - \varepsilon q_1(t)]\, u = 0, \\
&-\varepsilon a_{0,t} + a_{0,xx} - [r_1(t) - \varepsilon q(t)x]\, a_{0,x} - \\
&\qquad -2\varepsilon p(t)\frac{\partial}{\partial x}(a_0 a_1 u) - 2\varepsilon a_0^2 u + [r_2(t) + \varepsilon q(t)]\, a_0 = 0, \quad (2.33) \\
&-\varepsilon a_{1,t} + a_{1,xx} - [r_1(t) - \varepsilon q(t)x]\, a_{1,x} - \\
&\qquad -2\varepsilon p(t)\frac{\partial}{\partial x}(a_1^2 u) - 2\varepsilon a_0 a_1 u + r_2(t) a_1 = 0.
\end{aligned}$$

Здесь $r_1(t), r_2(t)$ и $p(t)$ - произвольные функции t, $q(t) = \frac{d}{dt}\ln p(t)$. Смысл подстановки (2.32) заключается в том, что функция $b_0(x,t)$ исключается из уравнений, что можно интерпретировать как деформацию уравнений (2.33) к стандартному виду, особенно в том случае, если функция $b_0(x,t)$ выражается через неизвестные функции u, a_0, a_1.

Вообще, анализ калибровочных преобразований, сводящих исходное представление Лакса к "стандартному", очевидно, можно рассматривать как деформацию в смысле работы [8]. При этом функция $b(x,t,\lambda) = b_1(t)\lambda + b_0(x,t;u)$ есть не что иное как спектральный параметр общего вида, зависящий от координаты и времени и, возможно, от самой неизвестной функции $u(x,t)$. С этой точки зрения предлагаемый метод дает почти все возможные деформации стандартного представления. В этом легко убедиться, если искать решение уравнений (2.23) относительно функций $a(x,t,\lambda)$ и $b(x,t,\lambda)$ в виде полиномов произвольной конечной степени по λ, коэффициенты которых зависят от x,t. В этом случае все решения сводятся к уже найденным уравнениям (2.33). Отличные от найденных решения возможны лишь в пределе, когда степень полиномов устремляется к бесконечности. Уравнения такого типа, если они существуют, по всей видимости, представляют особый класс уравнений.

Для того, чтобы уравнениям (2.33) придать более узнаваемый вид, проведем дополнительную редукцию:

$$a_0(x,t) = i\alpha u^*(x,t),\ a_1(x,t) = i\beta u^*(x,t),\ \varepsilon = i, \alpha, \beta = const,$$
$$q(t) = iQ(t),\ r_1(t) = iR_1(t),\ r_2(t) = R_2(t),\ P(t) = \exp\{i \textstyle\int Q(t)dt\}. \tag{2.34}$$

После этого уравнения для комплексной функций $u(x,t)$ приобретают форму уравнения с переменными коэффициентами при произвольной зависимости действительных функций $R_1(t), R_2(t)$ и $Q(t)$ от t:

$$iu_t + u_{xx} + i\left[R_1(t) - Q(t)x\right]u_x - \tag{2.35}$$
$$-2i\beta P(t)\frac{\partial}{\partial x}(|u|^2 u) - 2\alpha|u|^2 u + \left[R_2(t) - iQ(t)\right]u = 0$$

Это уравнение встречается в нелинейной оптике в задачах с комбинационным рассеянием (см. например [76, 11, 4]) в среде с квадратичной дисперсией и кубической нелинейностью. При постоянных $R_1, R_2 Q$ это уравнение было проинтегрировано МОЗР в работе [76].

Окончательно полученный результат сформулируем в форме утверждения.

Утверждение 2.2 *Достаточным условием того, что уравнение (2.4)*

$$\varepsilon u_t + r_2(x,t;u)u_{xx} + r_1(x,t;u)u_x + r_0(x,t;u)u = 0 \tag{2.36}$$

с произвольными дважды дифференцируемыми коэффициентами, зависящими от координатных переменных и самой неизвестной функции имело бы представление ЛЗШ, т.е. представление в форме условия коммутативности двух матричных операторов первого порядка, имеющих вид (2.21), и, содержащих в явном виде спектральный параметр λ, является линейная зависимость вспомогательных функций a и b от параметра λ. При этом все такие уравнения эквивалентны системе из трех уравнений (2.33), интегрируемой с помощью МОЗР, и допускают солитонные решения.

2.6 Неоднородные нелинейные уравнения

Схема построения псевдопредставлений Лакса легко обобщается на случай неоднородных уравнений типа (2.4). Это обобщение с формальной точки зрения представляется тривиальным. Поскольку в методе тождеств Лагранжа функциональный вид коэффициентов не фиксирован и, следовательно, неоднородный член всегда можно преобразовать без ограничения общности к одному из коэффициентов при любой степени неизвестной функции. Однако, для общности приведем способ учета неоднородного члена в уравнении с помощью некоторой модификации метода тождеств Лагранжа.

Для этого рассмотрим неоднородное уравнение (2.4):

$$\varepsilon u_t + r_2(x,t;u)u_{xx} + r_1(x,t;u)u_x + r_0(x,t;u)u = f(x,t). \tag{2.37}$$

Повторим вкратце вывод представления ЛЗШ для этого уравнения, останавливаясь лишь на особых отличиях вычислительной процедуры от предыдущей.

Для однородной части этого уравнения существует сопряженное уравнение. Для его вывода достаточно воспользоваться результатами предыдущих разделов. Однако для неоднородного уравнения теперь и сопряженное уравнение, вообще говоря, должно быть неоднородным. Поэтому второе уравнение в (2.8) формально заменим на уравнение

$$\left(-\varepsilon\frac{\partial}{\partial t} + r_2(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x^2} - r_1(x,t)\frac{\partial}{\partial x} + r_0(x,t)\right)\phi = s(x,t), \tag{2.38}$$

где функция $s(x,t)$ играет пока роль неизвестной правой части неоднородного сопряженного уравнения. Комбинируя по аналогии с процедурой вывода тождества Лагранжа это уравнение с исходным уравнением (2.37), получаем соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t}Q_0(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}Q_1(x,t) = f\phi - us, \tag{2.39}$$

в котором компоненты векторного поля $\mathbf{J}$ совпадают по форме с компонентами поля в тождестве Лагранжа (2.9), а правая часть этого тождества соответствует распределенному источнику, возникающему в силу неоднородности исходного и сопряженного ему уравнения. Теперь для того, чтобы соотношение (2.39) выполнялось, достаточно существования трех таких функций ψ, P_0, P_1, что

$$J_0(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x}\psi(x,t) - P_0(x,t), J_1(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) + P_1(x,t). \tag{2.40}$$

При этом функции P_0 и P_1 должны удовлетворять тому же уравнению (2.39)

$$\frac{\partial}{\partial t}P_0(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}P_1(x,t) = f\phi - u\Delta s. \tag{2.41}$$

Основная задача состоит теперь в том, чтобы придать соотношениям (2.38) и (2.41) вид линейных матричных уравнений. Для этого рассмотрим следующее представление функций, входящих в (2.41):

$$\begin{aligned} &s(x,t) = \xi(x,t)\psi + \eta(x,t)\phi, \\ &P_1 = g(x,t)\psi + h(x,t)\phi, \\ &P_0 = c(x,t)\psi + d(x,t)\phi, \end{aligned} \tag{2.42}$$

Подставляя эти соотношения в (2.41), получаем совокупность уравнений:

$$\begin{aligned} &c_t + g_x + ha + cau + dA_1 = -u\xi, \\ &d_t + h_x + \varepsilon uc + db + g[u(b - r_1) - u] + h\Delta B_1 = f - u\eta, \end{aligned} \tag{2.43}$$

которые связывают введенные вспомогательные функции с коэффициентами исходного уравнения. Здесь $A_1 = A - \xi$ и $B_1 = B - \eta$, где A и B те же, что и в (2.21). При выполнении (2.43), пользуясь (2.42) легко построить матрицы $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ псевдопредставления ЛЗШ исходного неоднородного уравнения. Эти вычисления матриц $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ проводятся аналогично предыдущим разделам, но с учетом соотношений (2.42). В результате этих вычислений приходим к следующему виду матриц $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$:

$$\mathbf{U} = \mathbf{U_0} - \mathbf{U_f}, \mathbf{V} = \mathbf{V_0} - \mathbf{V_f}, \tag{2.44}$$

где $\mathbf{U_0}$ и $\mathbf{V_0}$ - матрицы, определенные в (2.21),

$$\mathbf{U_f} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{V_f} = \begin{pmatrix} g & h \\ (\xi + ac)/\varepsilon & (\eta + ad)/\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Непосредственное вычисление условий коммутативности (2.22) для матриц $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ (2.44), приводит к уравнениям (2.43), исходному уравнению (2.37) и двум модифицированным уравнениям для a и b:

$$\begin{aligned} &\varepsilon a_t - r_2 a_{xx} + (r_1 - 3r_{2x})a_x + \\ &\qquad + a\left(2r_{1x} - 2b_x r_2 - r_0 - 3r_{2xx} - br_{2x}\right) = S_{12}, \\ &\varepsilon b_t - \frac{\partial}{\partial x}\left(b_x r_2 + r_2 b^2 - (r_1 - 2r_{2x})b + 2\varepsilon aur_2\right) + \\ &\qquad + r_{0x} - r_{xx} + r_{2xxx} = S_{22}. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Левые части этих двух уравнений в точности совпадают с левыми частями (2.23) (при условии $r_2 \equiv 1$), а правые принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} &S_{21} = -\varepsilon ag + (b + c)\Delta(x + ac) - a(\eta + ad) - Ac - (\xi + ac)_x, \\ &S_{22} = -\varepsilon ah + (-\varepsilon u + d)(x + ac) - Ad - (\eta + ad)_x. \end{aligned}$$

Содержательность данного подхода демонстрируется следующим частным случаем. Полагая $c \equiv d \equiv 0$, $a = \lambda a_1(x,t) + a_0(x,t)$, $b = \lambda \Delta \beta$, $g = g(x,t)$, $h = h(x,t)$, $\xi = \lambda \xi_1(x,t) + \xi_0(x,t)$, $\eta = \lambda \eta_1(x,t) + \eta_0(x,t)$, $\varepsilon = i$, $a_1 = \kappa u$, $a_0 = i\sigma u$,$\sigma, \kappa = const$, приходим к уравнению типа уравнения Хироты (2.35):

$$iu_t + u_{xx} + i\delta(t)u_x + 2\sigma|u|^2 u + 2i\kappa(|u|^2 u)_x = 2igu, \tag{2.46}$$

где

$$g(x,t) = \frac{\sigma^2}{\kappa} \int u(z,t) \int \bar{u}(y,t)\eta_1(y,t)dydz + \mu(t)x + \nu(t),$$

и $\delta(t)$-произвольная действительная, а $\mu(t), \nu(t)$-произвольные комплексные функции переменной t. При этом функция $\eta(x,t)$ должна вычисляться из условия

$$2i\bar{g}(x,t) = -2ig(x,t) + i\frac{\sigma}{\kappa}\eta_1(x,t).$$

В случае $\sigma = 0$ последнее условие эквивалентно требованию, что реальная часть функции g равна нулю. Это означает, что в представлении комплексной функции $\eta_1(x,t) = \eta_R(x,t) + i\eta_I(x,t)$ одна из функций $\eta_R(x,t)$ или $\eta_I(x,t)$ при этом оказывается произвольной. Трудно было бы ожидать, что интегрируемость уравнений сохраняется для любого типа правой части. Но поскольку в выборе функции g имеется произвол, это указывает на то, что член в правой части (2.46) имеет смысл рассматривать как внешнее воздействие на интегрируемую систему, оставляющее ее интегрируемой.

2.7 Уравнения в пространствах конечной размерности

Теперь, когда все основные элементы метода тождеств Лагранжа нами сформулированы и продемонстрированы на достаточно простых примерах из теории диспергирующих волн в одномерном пространстве, можно перейти к общей формулировке этого метода в применении к уравнениям, описывающим волны в пространствах произвольной конечной размерности.

Рассмотрим дифференциальные операторы вида:

$$\mathbf{L} = \sum_{|\alpha| \leq N} \mathbf{R}_\alpha(\mathbf{x}) \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}, \tag{2.47}$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega \subset R^n$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ - мультииндекс, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$-неотрицательные целые числа, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$, N-порядок дифференциального оператора $\mathbf{L}$,

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Коэффициенты оператора $\mathbf{L}$ в общем случае могут быть матричнозначными функциями со значениями в алгебре линейных матриц некоторого конечного порядка m. Таким образом, предполагается, что оператор $\mathbf{L}$ действует в линейном пространстве V^m вектор-функций $\psi(x) = (\psi_1(\mathbf{x}), \ldots, \psi_m(\mathbf{x}))$. Каждому такому линейному дифференциальному оператору $\mathbf{L}$ может быть поставлен в соответствие сопряженный оператор $\bar{\mathbf{L}}$, действующий на сопряженные вектор-функции $\bar{\psi} = \bar{\psi}(\mathbf{x})$. По определению $\bar{\mathbf{L}}$ действует на $\bar{\psi}$ таким образом, что для любых ψ и $\bar{\psi}$ справедливо следующее соотношение:

$$\int\limits_\Omega < \bar{\psi}, \mathbf{L}\psi > d\mathbf{x^n} = \int\limits_\Omega < \bar{\mathbf{L}}\bar{\psi}, \psi > d\mathbf{x^n} + \int\limits_{\partial\Omega} (\mathbf{Q}_L(\mathbf{x}; \bar{\psi}, \psi, \mathbf{R}_\alpha), d\mathbf{s})$$

где $<, >$ - симметричная билинейная форма на V^m, а $(,)$-скалярное произведение на R^n. Для корректности этого определения необходимо, чтобы коэффициенты оператора $\mathbf{L}$ были бы достаточное число раз дифференцируемыми. Предполагается, что такие условия выполнены. Векторное поле $\mathbf{Q}_L(\mathbf{x}; \bar{\psi}, \psi, \mathbf{R}_\alpha)$ задано на Ω и билинейно по ψ и $\bar{\psi}$ и определяется структурой оператора $\mathbf{L}$. В дальнейшем явная зависимость $\mathbf{Q}_L(\mathbf{x}; \bar{\psi}, \psi, \mathbf{R}_\alpha)$ от $\bar{\psi}, \psi$ и $\mathbf{R}_\alpha$ будет опускаться. Очевидным следствием введения оператора $\bar{\mathbf{L}}$ является обобщенная формула Лагранжа:

$$< \bar{\psi}, \mathbf{L}\psi > - < \bar{\mathbf{L}}\bar{\psi}, \psi > \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} Q_{Li}(\mathbf{x}), \tag{2.48}$$

выполняющаяся для любой пары функций ψ и $\bar{\psi}$.

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение

$$\mathbf{Lu} = \mathbf{f}, \tag{2.49}$$

где оператор $\mathbf{L}$ имеет вид (2.47), с коэффициентами $\mathbf{R}_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, зависящими от неизвестной вектор-функции $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, а $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ - вектор-функция - внешнее воздействие на систему, волновая динамика которой описывается нелинейной левой частью (2.49). Тогда совместно с этим уравнением рассмотрим вспомогательную линейную задачу

$$\bar{\mathbf{L}}(\mathbf{u})\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{s}. \tag{2.50}$$

Комбинируя (2.49) и (2.50), получаем:

$$< \bar{\psi}, \mathbf{Lu} > - < \bar{\mathbf{L}}\bar{\psi}, \mathbf{u} >= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} Q_{Li}(\mathbf{x}) = < \phi, \mathbf{f} > - < \mathbf{s}, \mathbf{u} >. \quad (2.51)$$

Последнее соотношение представляет собой обобщенный закон сохранения с плотностью тока $Q_{Li}(\mathbf{x})$ и внешним источником $< \phi, \mathbf{f} > - < \mathbf{s}, \mathbf{u} >$. Это соотношение удовлетворяется в общем случае, если

$$Q_{Li}(\mathbf{x}) \equiv \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \psi_{ij}(\mathbf{x}) + P_i(\mathbf{x}), i, j = 1, \ldots, n, \quad (2.52)$$

где $\psi_{ij}(\mathbf{x}) = -\psi_{ji}(\mathbf{x})$ - некоторый антисимметричный по индексам i и j набор функций, определенных на Ω, а функции P_i удовлетворяют уравнению (2.51). Поскольку векторное поле $Q_{Li}(\mathbf{x})$ линейно по $\phi(k, x)$, то (2.52) вместе с (2.50) образуют общую линейную задачу для набора функций

$$\mathbf{\Psi} = (\phi_1, \ldots, \phi_m, \psi_{12}, \psi_{13}, \ldots, \psi_{n-1n}).$$

Число уравнений, содержащихся в уравнениях (2.50) и (2.52), равно $m+n$. Для придания этой системе уравнений вида совокупности линейных матричных уравнений относительно вспомогательных функций $\mathbf{\Psi}$ (2.50) и (2.52) следует дополнить набором линейных соотношений:

$$\begin{aligned}&\tfrac{\partial}{\partial x_j}\Psi_\mu(\mathbf{x}) = \sum_{\nu=1}^{M} v_{\mu\nu j}(\mathbf{x})\Psi_\nu,\ P_j = \sum_{\nu=1}^{M} w_{\nu j}(\mathbf{x})\Psi_\nu,\ s_a = \sum_{\nu=1}^{M} \xi_{a\nu}(\mathbf{x})\Psi_\nu,\\ &j = 1, \ldots, n,\ a = 1, \ldots, m,\ \nu, \mu = 1, \ldots, M,\end{aligned} \quad (2.53)$$

в которых $M = m + n(n-1)/2$. Разрешая (2.53), (2.50) и (2.52) относительно первых производных от компонент вспомогательной вектор-функции $\mathbf{\Psi}$, совместную систему можно представить в виде системы из n линейных уравнений первого порядка

$$\mathbf{L_j}\mathbf{\Psi} = \frac{\partial}{\partial x_j}\mathbf{\Psi} - \mathbf{V}_j(\mathbf{x})\mathbf{\Psi} = 0, j = 1, \ldots, n, \quad (2.54)$$

с матрицами $\mathbf{V}_j(\mathbf{x})$ размерности $M \times M$, зависящими от неизвестной функции $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, коэффициентов $\mathbf{R}_\alpha(\mathbf{x})$ оператора $\mathbf{L}$, вспомогательных функций $v_{\mu\nu j}$,$w_{\nu j}$ и $\xi_{a\nu}$. При этом предполагается, что эти функции удовлетворяют дополнительным уравнениям, следующим из уравнения (2.51). Операторы $\mathbf{L}_j$ образуют псевдопредставление Лакса исходного уравнения (2.49) в том смысле, что условием совместности уравнений

(2.54) является уравнение (2.49) и набор уравнений относительно вспомогательных функций, входящих в соотношения (2.54). Вид этих уравнений устанавливается непосредственным вычислением условий коммутативности

$$[\mathbf{L}_i, \mathbf{L}_j] = 0, i \neq j, i, j = 1, \ldots, n,$$

которые в данном случае принимают вид обобщенных условий нулевой кривизны Захарова-Шабата:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\mathbf{V}_i - \frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{V}_j - [\mathbf{V}_i, \mathbf{V}_j] = 0,\ i \neq j,\ i, j = 1, \ldots, n. \tag{2.55}$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2.3 . *Для любого уравнения общего вида (2.47) существует псевдопредставление ЛЗШ, реализованное на n матричных операторах первого порядка с матрицами размерности $M \times M$, где $M = m + n(n-1)/2$, структура матриц которого определяется однозначно процедурой их построения, соответствующей изложенному выше методу, основанному на тождествах Лагранжа для данного исходного уравнения.*

Для выделения уравнений, имеющих истинное представление Лакса и интегрируемых в рамках МОЗР, необходимо потребовать, как и в случае размерности 1+1, чтобы вспомогательные функции $v_{\mu\nu j}$,$w_{\nu j}$ и $\xi_{a\nu}$ явно зависели от некоторого комплексного параметра λ (или параметров [38]). Предполагая определенную зависимость этих функций от λ, например, вида (2.26), и подставляя ее в уравнения (2.54), можно в явном виде получить классы уравнений, обладающих истинным представлением Лакса.

2.8 Пример построения псевдопредставления Лакса в случае размерности 1+2.

Из сформулированного выше общего утверждения непосредственно следует, что псевдопредставление Лакса всех скалярных уравнений в размерности 1+1, т.е. при $n = 2$, $m = 1$, может быть реализовано на двух матричных операторах первого порядка с матрицами 2×2. Для размерности же 1+2 в общем случае псевдопредставление Лакса может быть реализовано для скалярных уравнений лишь на трех матричных операторах размерности 4х4. Именно это и создает основные трудности для поисков примеров интегрируемых многомерных уравнений в случае $n > 2$.

Рассмотрим общую процедуру на примере однородного уравнения следующего общего вида (для $n = 3$, $m = 1$):

$$\varepsilon u_t + u_{xx} + u_{yy} + r(x,t;u)u_x + q(x,t;u)u_y + s(x,t;u)u = 0. \tag{2.56}$$

Сопряженное уравнение и соответствующий закон сохранения имеют вид:

$$\begin{aligned} &-\varepsilon\phi_t + \phi_{xx} + \phi_{yy} - r(x,t;u)\phi_x - q(x,t;u)\phi_y + s(x,t;u)\phi = 0,\\ &\varepsilon(u\phi)_t + (\phi u_x - u\phi_x + r\phi u)_x + (\phi u_y - u\phi_y + r\phi u)_y = 0. \end{aligned} \tag{2.57}$$

Из последнего соотношения следует:

$$\begin{aligned} &\varepsilon u\phi = \tfrac{\partial}{\partial y}\psi_2 - \tfrac{\partial}{\partial x}\psi_3,\\ &\phi u_x - u\phi_x + r\phi u = \tfrac{\partial}{\partial t}\psi_3 - \tfrac{\partial}{\partial y}\psi_1,\\ &\phi u_y - u\phi_y + r\phi u = \tfrac{\partial}{\partial x}\psi_1 - \tfrac{\partial}{\partial t}\psi_2. \end{aligned} \tag{2.58}$$

Введем вектор-столбец $\mathbf{\Psi} = \mathrm{col}(\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3)$, где $\psi_0 \equiv \phi$. Тогда система операторов представления Лакса может быть записана в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{L_1} &= \tfrac{\partial}{\partial x} - \mathbf{U}(x,y,t),\\ \mathbf{L_2} &= \tfrac{\partial}{\partial y} - \mathbf{V}(x,y,t),\\ \mathbf{L_3} &= \tfrac{\partial}{\partial t} - \mathbf{W}(x,y,t), \end{aligned}$$

где $\mathbf{U}$,$\mathbf{V}$,$\mathbf{W}$ - квадратные матрицы 4×4, между элементами которых существуют соотношения, следующие непосредственно из (2.57) и (2.58):

$$\begin{aligned} &V_{2i} = U_{3i}; V_{20} = U_{30} + \varepsilon u,\\ &W_{3i} = V_{1i} - uU_{0i}, W_{30} = V_{10} - uU_{00} + (u_x + ru);\\ &W_{2i} = U_{1i} + uV_{0i}, W_{20} = U_{10} - uV_{00}(u_y + qu);\\ &\varepsilon W_{00} = U_{00,x} + V_{00,y} + U_{00}^2 + V_{00}^2 +\\ &+ \sum_{i=1}^{3}(U_{0i}U_{i0} + V_{0i}V_{i0}) + s - qU_{00} - rV_{00};\\ &\varepsilon W_{0i} = U_{0i,x} + V_{0i,y} + U_{00}U_{0i} + V_{00}V_{0i} +\\ &+ \sum_{j=1}^{3}(U_{0j}U_{ji} + V_{0j}V_{ji}) - qU_{0i} - rV_{0i}. \end{aligned} \tag{2.59}$$

Индекс i пробегает значения $1, 2, 3$. В остальном элементы матриц - произвольны. Общее число независимых элементов матриц равно 48. Соотношения (2.59) содержат 16 условий. Таким образом, уравнения (2.55) содержат уравнения для остальных 32 элементов матриц, в том числе и исходное уравнение (2.56). По смыслу построения эти уравнения совместны с условиями (2.59). Обратим внимание на то, что матрицы $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ - почти произвольны (ограничения содержаться в первой строчке (2.59)), а вся информация об исходном уравнении содержится в матрице $\mathbf{W}$. Это означает, что пара операторов, соответствующая матрицам $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ может соответствовать почти любому интегрируемому уравнению в координатах x, y. При этом оператор, соответствующий матрице $\mathbf{W}$, будет автоматически подстраиваться под структуру выбранного уравнения. Это указывает на специфическую структуру многомерных нелинейных уравнений (размерности $d > 1 + 1$), интегрируемых с помощью МОЗР. Эти уравнения должны алгебраически разлагаться в систему интегрируемых уравнений низших размерностей, имеющих двухоператорное представление ЛЗШ.

Исследовать получающуюся из (2.55) систему уравнений на существование зависимости элементов матриц от некоторого спектрального параметра λ оказывается чрезвычайно сложно даже в простейших ситуациях. Поэтому данный подход в многомерном случае должен быть дополнен некоторыми упрощающими соображениями, например, типа наличия симметрий у исходного уравнения, которые можно было бы легко интерпретировать и формализовать с точки зрения структуры матриц $\mathbf{V}_j$. Отметим, что в ряде случаев задача построения классов интегрируемых уравнений формализуется для проведения вычислений на ЭВМ, с использованием языков аналитических вычислений типа REDUCE, Matematica, Maple. Часть примеров в данной работе была получена именно таким образом.

Последний пример здесь приведен с целью показать универсальность метода тождеств Лагранжа. Основной вывод, который можно сделать на основе проделанных построений, состоит в том, что метод обобщенных тождеств Лагранжа дает явный универсальный способ построения псевдопредставлений ЛЗШ практически любых нелинейных уравнений. Существование столь же универсальной процедуры введения в это представление спектрального параметра через явную зависимость от него вспомогательных функций псевдопредставления полностью решает задачу вывода для каждого класса уравнений общего представления ЛЗШ. Этот результат, полученный в работах автора [20, 21], фактически завершает поиски способа вывода представлений ЛЗШ, проводившиеся ранее многими авторами.

Хотя имеются технические трудности в расчетах, однако, метод тождеств Лагранжа содержит в себе ряд важных элементов, которые указывают на еще не использованные его возможности. Одной из таких возможностей является построение на базе теории тождеств Лагранжа и псевдопредставлений Лакса нелинейной теории возмущений для уравнений достаточно общего вида, в рамках которой в каждом порядке теории возмущений следует решать нелинейные интегрируемые уравнения с помощью МОЗР. Формулировкой этой общей идеи мы и закончим изложение теории метода тождеств Лагранжа в применении к построению моделей нелинейных волн в средах с дисперсией. В следующей главе приведены несколько конкретных примеров построения моделей волновых процессов, отвечающих определенным, заранее заданным физическим условиям в реально наблюдаемых системах. Эти примеры демонстрируют практическую ценность данного метода для задач, встречающихся на практике.

Глава 3

Применение тождеств Лагранжа для построения солитонных уравнений

В предыдущей главе были рассмотрены математические основы метода построения точнорешаемых с помощью МОЗР уравнений, имеющих в своей основе представление о базовых элементах в форме солитонов. В настоящей главе излагаются некоторые результаты применения этого метода к построению солитонных уравнений, встречающихся в прикладных задачах. Списки уравнений этого типа известны, однако, не все типы их деформаций, приведенные в данной работе были описаны ранее. Менее исследованной областью теории уравнений, допускающих солитонные решения, являются векторные и многокомпонентные уравнения (см. [58, 59]). Основной целью данной главы является применение развитого метода к задачам взаимодействия конечного числа волн в средах с квадратичной дисперсией на примере трехволнового взаимодействия. Эта задача имеет важное практическое значение, например, для анализа процессов распространения коротких и сверхкоротких оптических импульсов в нелинейных оптических средах [4, 61].

3.1 Простые обобщения уравнения НУШ

Как было показано в предыдущей главе, метод тождеств Лагранжа приводит в качестве семейства интегрируемых с помощью МОЗР уравнений общего вида (2.4) к совокупности уравнений, называемых уравнениями Хироты, частным случаем которых является и уравнение НУШ с переменными коэффициентами. Вообще говоря, как следует из (2.33) и (2.35), коэффициенты этих уравнений зависят от координаты x простым образом, т.е. эта зависимость может быть исключена из уравнений простой подстановкой неизвестной функции и подходящей заменой координат. Однако, имеются некоторые специальные подстановки, которые преобразуют эти уравнения к интересному с точки зрения прикладных задач виду. Примером может служить преобразование уравнений (2.33) в случае $a_1 \equiv 0$, задаваемое подстановкой $u = v\exp\{iq(t)x^2\}$, которое приводит одно из пары оставшихся взаимносопряженных уравнений к уравнению НУШ с неоднородностью типа гармонического осциллятора:

$$iv_t + v_{xx} + æ|v|^2 v + (a(t)x^2 + b(t)x + c(t))v = 0,$$

где $a(t), b(t), c(t)$ - некоторые функции времени, выражающиеся через $q(t)$. Аналогичные преобразования возможны и для уравнения Хироты (2.35). Уже простой анализ последнего уравнения показывает наличие у него солитонных решений, т.е. локализованных частицеподобных волн, совершающих гармонические колебания в ограниченной области пространства. При этом солитоны не распадаются, но меняют свою форму, периодически расширяясь и сжимаясь.

Еще один способ получить интегрируемую деформацию уравнения Хироты (2.35) состоит в использовании следующего наблюдения. Предположим, что уравнения для функций u, a_0 и a_1 вместе дают некоторый дифференциальный закон сохранения, тогда его можно отождествить с уравнением для b_0. Положим для простоты в уравнении (2.35) $Q(t), R_2(t) \equiv 0$:

$$iu_t + u_{xx} + iR_1(t)u_x - 2i\beta\frac{\partial}{\partial x}(|u|^2 u) - 2\alpha|u|^2 u.$$

Тогда простейший закон сохранения при его отождествлении с уравнением для b_0 дает: $\nu(x,t) = i\sigma\int|u|^2 dx$, что приводит к уравнению Экхауса (см. например [51])

$$\begin{aligned} iu_t + u_{xx} + iR_1(t)u_x + \sigma|u|^4 u - 2\alpha|u|^2 u +& \\ +2i\left((\sigma-\beta)\partial_x(|u|^2 u) - \sigma|u|^2 u_x\right) = 0.& \end{aligned} \quad (3.1)$$

В то же время функция $p = u\exp\{-i\sigma\int|u|^2 dx\}$ будет удовлетворять уравнению (2.35) при $Q(t) \equiv 0$. Поскольку функция $\nu(x,t)$ в соотношениях (2.27) произвольна, то аналогичная процедура возможна для любого другого закона сохранения уравнения (2.35), так что существует целая иерархия уравнений, связанных с уравнением (2.35) соотношениями вида $p = u\exp\{-i\int I(u,\bar{u})dx\}$, где $I(u,\bar{u})$- какая-либо сохраняющаяся плотность уравнения для u.

Эти два простых примера демонстрируют возможности данного подхода в конструировании уравнений, имеющих нелинейности, существенно отличные от нелинейностей "стандартных" уравнений типа НУШ, предлагая при этом для них способ построения точных эти решений "деформированных" уравнений. Однако, эти примеры не исчерпывают всех возможностей, которые дает метод тождеств Лагранжа. Мы рассмотрим наиболее важные из этих возможностей, постепенно усложняя исходную структуру уравнений, для анализа которых применяется метод тождеств Лагранжа.

3.2 Нелинейность и неоднородность квадратичной дисперсии

Одним из интересных обобщений НУШ и уравнений Хироты являются уравнения, описывающие дисперсионные свойства среды, зависящие от координат, времени и самой неизвестной функции $u(x,t)$. Эта общая ситуация соответствует случаю $r_2(x,t) \not\equiv 1$, когда свойства среды таковы, что величина квадратичного члена дисперсии среды может зависеть от координат и времени (неоднородность) (см. например [87, 36]) и от параметров самого волнового процесса (нелинейность). В этом случае также существует возможность свести задачу описания всех моделей, допускающих солитонные решения в средах такого типа, к предыдущему случаю. Опишем такую процедуру в самом общем виде произвольной зависимости $r_2 = r_2(x,t;u)$.

Для этого, в зависимости функций, входящих в (2.4), сделаем замену переменных, положив

$$u(x,t) = v(\theta(x,t),t), \quad r_k(x,t;u) = q_k(\theta(x,t),t;v), \quad k = 1,2,\dots.$$

В новых переменных при условии

$$r_2(x,t;u) = (\theta_x)^{-2} \tag{3.2}$$

исходное уравнение принимает вид

$$\varepsilon v_t + v_{\theta\theta} + R_1(\theta,t;v)v_\theta + R_0(\theta,t;v)v = 0, \tag{3.3}$$

где

$$R_0(\theta,t;v) = q_0(\theta,t;v), \quad R_1(\theta,t;v) = q_2\theta_{xx} - \varepsilon\theta_t + q_1\theta_x, \quad R_2 \equiv 1$$

Поскольку свойство существования многосолитонных решений не зависит от выбора независимых переменных, то, применяя к уравнению (3.3), изложенную в предыдущей главе процедуру, можем получить все типы нелинейных уравнений с неоднородным квадратичным законом дисперсии (линейной части), которые допускают решения солитонного типа. При этом уравнение (3.2) будет определять характеристики, вдоль которых перемещаются солитоны в координатах x, t. Если в коэффициент $r_2(x,t;u)$ входит явная зависимость от $u(x,t)$, то это уравнение должно решаться совместно с решением уравнения $u(x,t) = v(\theta,t)$. В этом случае характеристика зависит от формы самого решения.

Заметим, что в отличие от упомянутых выше работ ([87, 36]) данный метод дает условия существования в среде с изменяющимися параметрами не одной волны типа солитона, а произвольной совокупности солитонов, взаимодействующих упруго, что собственно и является определением понятия солитон. В сравнении с солитонами "невозмущенных" уравнений солитоны найденных уравнений также изменяют свои параметры - амплитуду, ширину и т.п. Однако, эта эволюция находится в жестком соответствии с требованием упругого взаимодействия солитонов между собой.

3.3 Уравнения для сред с дисперсией высших порядков.

Данный метод без существенных изменений может быть применен к исследованию типов нелинейности одномерной среды, в которой возможно распространение волн типа солитонов, при наличии дисперсии порядка большего, чем 2, например в случае кубической дисперсии. Если порядок дисперсии равен N, то общее уравнение, описывающее изменение комплексной амплитуды слабонелинейной волны в такой среде может быть представлено в виде:

$$\varepsilon u_t + \sum_{k=0}^{N} r_k(x,t;u) u^{[k]} = 0, \tag{3.4}$$

где $u^{[k]} = \frac{\partial^k}{\partial x^k} u(x,t)$. К уравнениям такого типа принадлежат, например, уравнения KdV, мKdV и т.п. Предложенная схема для таких уравнений воспроизводится без серьезных изменений, лишь с увеличением объема вычислений. Укажем в качестве примера, имеющего прикладное значение, общий вид матриц псевдопредставления Лакса для случая $N = 3$ и уравнения, имеющие истинное представление Лакса при использовании подстановки (2.25) и, следовательно, допускающие солитонные решения. Пара операторов псевдопредставления Лакса, построенная аналогично тому, как это было сделано выше, в данном случае будет иметь тот же общий вид (2.19) с тем отличием, что элементы матрицы $\mathbf{V}$ будут иметь более сложную зависимость от коэффициентов $r_k(x,t)$ оператора $\mathbf{L}$. Матрица же $\mathbf{U}$ будет иметь тот же вид, что и в (2.21). При $N = 3$ и $r_3(x,t) \equiv 1$

$$\mathbf{U}(x,t) = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon u \\ a & b \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{V}(x,t) = \begin{pmatrix} A(x,t) & B(x,t) \\ C(x,t) & D(x,t) \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

где

$$\begin{aligned}
&A(x,t) = au(-b + r_2) + au_x - a_x u,\\
&B(x,t) = -\varepsilon a u^2 + (-b_x + r_{2x})u + (bu - u_x)(-b + r_2) - u_{xx} + r_1 u,\\
&C(x,t) = -\varepsilon a^2 u + 2(-b_x + r_{2x})a + (ba - a_x)(-b + r_2) - a_{xx} - r_1 a,\\
&D(x,t) = -\varepsilon a(2bu + u_x - r_2 u) - b^2(b - r_2 + 3\Delta b_x - 2r_2 - r_1) -\\
&-2\varepsilon a_x u - b_{xx} + b_x r_2 - r_{1x} + r_{2xx} + r_0.
\end{aligned}$$

Уравнения Захарова-Шабата (2.22) после подстановки в них (2.26) и преобразований, аналогичных (2.32), принимают вид:

$$\begin{gathered}
\varepsilon u_t + u_{xxx} + r_1(t)u_{xx} + (r_2(t) - \varepsilon q(t)x)\, u_x + 2\varepsilon r_1(t)\frac{\partial}{\partial x}(a_1 u^2) -\\
-2\varepsilon r_1(t) a_0 u^2 + 6\varepsilon \frac{\partial}{\partial x}(a_1 u u_x) - 3\varepsilon a_0 \frac{\partial}{\partial x} u^2 + 6\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x}(a_1^2 u^3) -\\
-6\varepsilon^2 a_0 a_1 u^3 + (r_3(t) - \varepsilon q(t))\, u = 0,
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\varepsilon a_{0t} + a_{0xxx} - r_1(t) a_{0xx} + (r_2(t) - \varepsilon q(t)x)\, a_{0x} + 2\varepsilon r_1(t)\frac{\partial}{\partial x}(a_0 a_1 u) +\\
+2\varepsilon r_1(t) a_0^2 u - 3\varepsilon \frac{\partial}{\partial x}(u(a_0 a_1)_x) - 3\varepsilon u \frac{\partial}{\partial x} a_0^2 +\\
+6\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x}(a_0 a_1^2 u^2) - 6\varepsilon^2 a_0^2 a_1 u^2 - (r_3(t) + \varepsilon q(t))\, a_0 = 0,
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\varepsilon a_{1t} + a_{1xxx} - r_1(t) a_{1xx} + (r_2(t) - \varepsilon q(t)x)\, a_{0x} + 2\varepsilon r_1(t)\frac{\partial}{\partial x}(a_1^2 u) +\\
+2\varepsilon r_1(t) a_0 a_1 u - 6\varepsilon \frac{\partial}{\partial x}(u a_1 a_{1x}) - 3\varepsilon u \frac{\partial}{\partial x}(a_0 a_1) +\\
+6\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x}(a_1^3 u^2) + 6\varepsilon^2 a_0 a_1^2 u^2 - r_3(t) a_1 = 0.
\end{gathered}$$

Здесь $r_1(t), r_2(t), r_3(t)$ и $q(t)$ - произвольные функции t. Из этих уравнений при подходящей редукции получаются уравнения KdV, мKdV и набор уравнений, который встречается в нелинейной оптике при учете кубической дисперсии среды [4].

Ко всем уравнениям типа (3.4) применимы все основные выводы, полученные в параграфах 2 и 3 данной главы относительно уравнений с квадратичной дисперсией. Например, калибровочные преобразования, приводящие матрицу $\mathbf{U}$ к виду (2.25) имеют тот же самый вид, что и в (2.27) и (2.28). В случае $r_n(x,t) \neq 1$ остаются справедливыми все выводы раздела 3 с учетом того, что уравнение характеристик теперь будет иметь следующий вид

$$r_n(x,t;u) = (\theta_x)^{-n}$$

При этом коэффициенты уравнения с независимой переменной $\theta = \theta(x,t)$ могут быть вычислены непосредственно заменой переменных: $x \to \theta(x,t)$. Например, для случая $N = 3$

$$R_0 = r_0,\ R_1 = r_3\theta_{xxx} + r_2\theta_{xx} + r_1\theta_x - \varepsilon\theta_t,\ R_2 = 3r_3\theta_x\theta_{xx} + r_2\theta_x^2,\ R_3 = 1.$$

Примером уравнения этого типа является известное уравнение Хари-Дима

$$u_t = u^3 u_{xxx}$$

.

3.4 Уравнения с операторами Д'Аламбера и Лапласа

Приведенные выше примеры были рассмотрены здесь в большей степени для демонстрации техники вычислений в рамках предлагаемого метода, поскольку большинство полученных уравнений уже известны. В особенности это касается уравнений с квадратичным законом дисперсии, для которых были получены списки полностью интегрируемых скалярных уравнений [48, 56, 57]. Менее исследованным и более разнообразным по форме, но и более сложным для исследования является случай, когда уравнения содержат оператор Д'Аламбера или Лапласа в качестве линейной дисперсионной части. Такого рода задачи очень часто встречаются на практике. К ним относится, например, уравнение

Sin-Gordon (SG) и его модификации. Рассмотрим кратко применение предложенного подхода к уравнениям этого типа, что может послужить полезным примером для сравнения с методами деформации представлений Лакса [8].

Рассмотрим уравнения вида

$$u_{xt} + q(x,t;u)u_t + r(x,t;u)u_x + s(x,t;u)u = 0.$$

Предложенная схема построения представления типа Лакса для этого класса уравнений приводит к паре операторов с матрицами 2×2 следующего вида:

$$\mathbf{U}(x,t) = \begin{pmatrix} au & v(x,t) \\ a & b \end{pmatrix}, \ \mathbf{V}(x,t) = \frac{1}{\Lambda(x,t)} \begin{pmatrix} A(x,t) & B(x,t) \\ C(x,t) & D(x,t) \end{pmatrix}, \tag{3.6}$$

где

$$\begin{aligned}
&A(x,t) = u(a_t - ar)/2, \quad B(x,t) = (b-q)g - uf/2, \\
&C(x,t) = ar - a_t, \quad D(x,t) = f - ag, \quad \Lambda(x,t) = b - au/2 - q, \\
&v(x,t) = (b-2q)u/2 - u_x/2; \\
&f(x,t) = br + r_x + q_t - b_t - s; \ g = u_t/2 + ru.
\end{aligned}$$

Наиболее существенным отличием от предыдущих примеров является то, что вспомогательные функции $a(x,t,\lambda), b(x,t,\lambda)$ содержатся в знаменателе матрицы $\mathbf{V}$. В этом проявляется явная аналогия с представлениями с изменяющимся спектральным параметром [8], роль которого выполняет функция Λ. Уравнения для функций $a(x,t,\lambda)$ и $\Lambda(x,t,\lambda)$ (сделана замена $b = \Lambda + q + au/2$), следующие из уравнений Захарова-Шабата, имеют вид:

$$\begin{aligned}
&-a_{xt} - a(ua)_t + 2ar_x - sa + qa_t + ra_x - a\Lambda_t + (a_t - ar)\frac{\Lambda_x}{\Lambda} = 0, \\
&\Lambda_{xt}\Lambda - \Lambda_x\Lambda_t + \Lambda_t\Lambda^2 - \Lambda_x(au_t - aur - r_x + qr - s) + \\
&\quad +\Lambda(aur_x - au_t q - asu + a_x u_t + rua_x - (qr)_x - r_{xx} + s_x) + \\
&\quad\quad +\Lambda^2((au)_t + q_t - r_x) = 0.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Полагая $\Lambda(x,t) = \lambda = const$, получаем систему уравнений, представление Лакса которой содержит спектральный параметр λ и может быть с помощью калибровочных преобразований сведено к “стандартному” виду Гельфанда-Дикого (2.31). Эта система имеет вид:

$$u_{xt} + qu_t + ru_x + su = 0$$

$$
\begin{aligned}
&a_{xt} - (qa)_t - (ra)_x + sa = 0 \\
&(au)_t + q_t = r_x \\
&(ar)_x u - aqu_t - aus + a_x u_t + \frac{\partial}{\partial x}(s - qr - r_x) = 0
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

и содержит один произвольный функциональный параметр - одну из функций $q(x,t;u), r(x,t;u)$ или $s(x,t;u)$. Этот произвол аналогичен произволу в выборе функции b_0 в примерах, рассмотренных выше и может быть исключен с помощью калибровочных преобразований, рассмотренных в разделе 2 данной статьи. Действительно, матрица $\mathbf{U}$ в рассматриваемом случае может быть представлена в виде:

$$\mathbf{U} = \lambda \mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_0,$$

где

$$\mathbf{U}_1(x,t) = \begin{pmatrix} 0 & u/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{U}_0(x,t) = \begin{pmatrix} au/2 & au^2/4 - u_x/2 - qu/2 \\ a & au/2 + q \end{pmatrix}.$$

Матрицы $\mathbf{U}_1$ и $\mathbf{U}_0$ и матрицы калибровочных преобразований перейдут в соответствующие матрицы соотношений (2.27)-(2.31), если произвести замены $u \to a_0$; $au^2/4 - u_x/2 - qu/2 \to u$; $u/2 \to a_1$; $q \to b_0$ и дополнительно сделать преобразование $\Psi \to \Psi \exp\{\int (au/2) dx\}$.

Заметим, что в случае комплексных переменных уравнения (2.31) допускают интересную редукцию $a = i\kappa u^*$. В этом случае уравнение для a является комплексно-сопряженным уравнению для u, а функции q, r, s будут иметь вид:

$$s = g(x,t) + i\sigma_t(x,t); \ r = \frac{\partial}{\partial t}\int (\sigma + \frac{1}{2}\kappa |u|^2) dx + h(t); \ q = \sigma - \frac{1}{2}\kappa |u|^2 + f(x),$$

где g, σ - новые неизвестные действительные функции, а $f(x)$ и $h(t)$ - произвольные действительные функции. Функция σ может быть исключена из уравнений подстановкой $u = v(x,t)\exp\{-i\int \sigma dx\}$, после чего остается уравнение для функции v вида

$$v_{xt} + iv_t(f(x) - \frac{1}{2}\kappa |v|^2) + iv_x \frac{\partial}{\partial t}\int (\frac{1}{2}\kappa |v|^2) dx + gv = 0. \tag{3.9}$$

Уравнение для функции g легко получить и проинтегрировать. Оно содержит нелинейность второй и четвертой степени по u. Однако это уравнение несколько громоздко и поэтому здесь его не приводим. Уравнение (3.9) интересно тем, что описывает распространение электромагнитных волн (в конусных переменных) в среде с кубической нелинейностью определенного вида без приближения параболического уравнения. Исследование его представляет отдельный интерес.

Рассмотренные преобразования и другие возможные функциональные представления для Λ, например $\Lambda = \lambda + L_0(x,t)$ можно рассматривать как деформации уравнений (3.8), множество которых, по всей видимости, более богато нежели множество деформаций эволюционных уравнений, содержащих производные по переменной t (времени) первого порядка. Как видно, в отличие от работы [8] и других работ такого типа, совокупность "деформированных" уравнений появляется сразу из уравнений (3.7) после явного задания функциональной формы переменного спектрального параметра и не требует каких либо дополнительных вычислений. Одновременно сразу для всех деформаций данного типа определено представление Лакса, которое может быть использовано в МОЗР.

3.5 Взаимодействие волн в средах с дисперсией

Малоисследованным, но очень обширным классом уравнений являются многокомпонентные уравнения, допускающих солитонные решения. Для этих уравнений полных списков пока не найдено. Вместе с тем, уравнения этого типа важны с прикладной точки зрения. Покажем, как предложенная схема модифицируется на случай многокомпонентных нелинейных уравнений, в частности, уравнений 3-х-волнового взаимодействия [20] и вообще N-волн [21]. Постановка задачи в этом случае может быть сформулирована следующим образом.

Пусть в среде первоначально распространяются M почти гармонических волн, имеющих разные, но фиксированные волновые числа и частоты, амплитуды которых медленно изменяются в пространстве и времени: $a_i = a_i(x,t), i = 1, 2, \ldots, M$. Такая ситуация на практике создается с помощью нескольких источников когерентного излучения. Для оптических систем это лазеры, в других системах такие источники могут иметь природный характер. Если среда нелинейна, то эти первичные волны, взаимодействуя между собой, порождают спектр новых волн с другими частотами и волновыми числами. Во многих, важных с точки зрения приложений, случаях этот спектр содержит только квазигармонические волны, параметры которых удовлетворяют жестким условиям синхронизма с параметрами первичных волн и между собой. Условия синхронизма N волн могут быть записаны в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{N} \omega_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{N} \mathbf{k}_i = 0. \tag{3.10}$$

При выполнении этих соотношений число K вновь рожденных волн оказывается конечным, а амплитуды $a_j, j = M+1, M+2, \ldots, M+K$ этих волн оказываются связанными конечным числом уравнений друг с другом и амплитудами первичных волн. Представление полного поля возмущений в этом случае можно записать в следующей форме:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(x,t) = \sum_{m=1}^{M+K} \big(a_m(x,t) \exp\{i(k_m x - \omega_m t)\} + \\ + a_m^*(x,t) \exp\{-i(k_m x - \omega_m t)\}\big)\,.\end{aligned}$$

Такую ситуацию будем называть дискретной задачей взаимодействия волн. Более реалистичная схема взаимодействия волн в непрерывном спектре будет рассмотрена ниже.

В общем случае уравнения "медленной" эволюции амплитуд первичных волн в дискретной задаче взаимодействия волн можно представить в виде:

$$\mathbf{L}_i a_i = \sum_{j=1}^{M} w_{ij} a_j, \tag{3.11}$$

где операторы $\mathbf{L}_i$ описывают дисперсионные свойства среды, а матрица $\mathbf{W} = (w_{i,j})$ - взаимодействие первичных волн между собой и взаимодействие с порожденными ими вторичными волнами. Операторы $\mathbf{L}_i$ и матрицы $\mathbf{W}$ определяются в основном свойствами среды, в которой происходит волновой процесс, а также геометрией ее границ, если рассматриваемые волны имеют смысл возбуждений различных мод в резонаторных или волноводных системах. В действительности разбиение на первичные и вторичные волны является условным и может быть проведено лишь с помощью указания начальных и граничных условий для различных почти-гармонических компонент волнового процесса.

Для систем такого типа также можно поставить задачу отыскания всех типов сред, для которых система уравнений (3.11) допускает существование многосолитонных возбуждений, которые представляют собой, как правило, устойчивые локализованные возмущения.

В качестве основного примера рассмотрим уравнения взаимодействия n-волн в среде с дисперсией не выше второго порядка. В этом случае уравнения эволюции системы n первичных волн можно записать в форме

$$\partial_t a_i + v_i \partial_x a_i + d_i \partial_x^2 a_i = \sum_{j=1}^{n} w_{ij} a_j, \quad i, j = 1, \ldots, n. \tag{3.12}$$

Здесь $v_i(x,t)$ - групповые скорости первичных волн, $d_i(x,t)$ - коэффициенты при квадратичном члене в законе дисперсии для частоты. Совместно с (3.12) рассмотрим сопряженную систему уравнений

$$-\frac{\partial \phi_i}{\partial t} - \frac{\partial (v_i(x,t)\phi_i)}{\partial x} + \frac{\partial^2 (d_i \phi_i)}{\partial x^2} = \sum_{j=1}^{n} w_{ji} \phi_j, \quad i, j = 1, \ldots, n. \tag{3.13}$$

Здесь ϕ_i - функции, сопряженные к функциям a_i. Умножая уравнения (3.12) скалярно на ϕ_i слева, а уравнения (3.13) скалярно на a_i справа, и вычитая полученные соотношения, приходим к обобщенному закону сохранения

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^{n} \phi_i a_i + \frac{\partial}{\partial x} \sum_{i=1}^{n} \left(v_i(x,t)\phi_i a_i + d_i \phi_i \partial_x a_i - a_i \partial_x (d_i \phi_i) \right) = 0, \tag{3.14}$$

который автоматически выполняется, если

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \sum_{i=1}^{n} \phi_i a_i, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n} \left(v_i(x,t)\phi_i a_i + d_i \phi_i \partial_x a_i - a i_i \partial_x (d_i \phi_i) \right) \tag{3.15}$$

для произвольной дифференцируемой функции $\psi(x,t)$. Как и раньше, появление закона сохранения при комбинировании сопряженных уравнений есть следствие обобщенного тождества Лагранжа.

Рассмотрим вспомогательную вектор-функцию $\mathbf{\Psi} = \mathrm{colon}(\psi, \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)$ и дополнительные матрицу $n \times n$ с элементами b_{ij} и вектор c_i, такие, что

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \phi_j + c_i \psi, \quad i, j = 1, \ldots, n. \tag{3.16}$$

Тогда совокупность уравнений (3.13), (3.14) и (3.16) может быть представлена в виде двух уравнений относительно вектор-функции $\mathbf{\Psi}$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{\Psi} = \mathbf{U} \mathbf{\Psi}, \qquad \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{\Psi} = \mathbf{V} \mathbf{\Psi}, \tag{3.17}$$

где $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ две матрицы размерности $(n+1)\times(n+1)$, имеющие вид:

$$\mathbf{U}(x,t)=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ c_1 & b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_n & b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix}, \tag{3.18}$$

$$\mathbf{V}(x,t)=\begin{pmatrix} D & A_1 & A_2 & \ldots & A_n \\ C_1 & B_{11} & B_{12} & \ldots & B_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_n & B_{n1} & B_{n2} & \ldots & B_{nn} \end{pmatrix}. \tag{3.19}$$

Элементы этих матриц задаются соотношениями:

$$\begin{aligned} A_i &= \sum_{j=1}^{n}(d_j a_j b_{ji}) - (v_i - d_{i,x})a_i - d_i a_{i,x}, \\ C_i &= d_i\sum_{j=1}^{n}(c_j b_{ij}) - (v_i - 2d_{i,x})c_i + d_i c_{i,x}, \\ B_{ij} &= -w_{ji} - (v_i - 2d_{i,x})b_{ij} - (v_{i,x} - d_{i,xx})\delta_{ij} + \\ &\qquad\qquad + d_i b_{ij,x} + d_i c_i a_j + d_i\sum_{k=1}^{n}(b_{ik}b_{kj}), \\ D &= \sum_{i=1}^{n}(d_i a_i c_i), \quad i,j=1,\ldots,n. \end{aligned}$$

Полная совокупность уравнений Захарова-Шабата (2.22), соответствующая матрицам (3.18), имеет вид:

$$\begin{aligned} & a_{i,t} - A_{i,x} + \sum_{k=1}^{n}(a_k B_{ki} - A_k b_{ki}) - Da_i = 0, \\ & c_{i,t} - C_{i,x} - \sum_{k=1}^{n}(c_k B_{ik} - C_k b_{ik}) + Dc_i = 0, \\ & b_{ij,t} - B_{ij,x} + \sum_{k=1}^{n}(b_{ik}B_{kj} - B_{ik}b_{kj}) + c_i A_j - C_i a_j = 0, \\ & i,j=1,\ldots,n. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Уравнения для и a_i и c_i оказываются взаимосопряженными, так что c_i можно рассматривать как сопряженные амплитуды первичных волн. Уравнения для b_{ij} и b_{ji} при $i\neq j$ так же сопряжены, поэтому недиагональные элементы b_{ij} можно рассматривать как амплитуды вторичных волн.

Для отыскания уравнений, допускающих солитонные решения, необходимо в самом общем случае положить

$$b_{ij} = \lambda b_{ij}^{(1)}(x,t) + b_{ij}^{(0)}(x,t),\ c_i = \lambda c_i^{(1)}(x,t) + c_i^{(0)}(x,t), \quad i,j = 1,\ldots,n. \tag{3.21}$$

Как и в случае одноволновых уравнений существует калибровочное преобразование, приводящее матрицу $\mathbf{U}$ к форме (2.25), что позволяет строить решения получающихся уравнений с помощью стандартной схемы МОЗР.

3.6 Трехволновое взаимодействие в неоднородной среде с линейной дисперсией

Первой конкретной системой, которая имеет важное прикладное значение, будет рассмотрена система трехволнового взаимодействия в среде с линейной дисперсией. Исходная система уравнений в этом случае имеет вид пары уравнений:

$$\frac{\partial a_i}{\partial t} + v_i(x,t)\frac{\partial a_i}{\partial x} = \sum_{j=1}^{2} w_{ij} a_j. \tag{3.22}$$

Здесь a_1 и a_2 - амплитуды двух “первичных” волн, распространяющихся в среде с групповыми скоростями v_1 и v_2, соответственно. Матрица $\mathbf{W}$ 2×2 с элементами w_{ij} описывает свойства среды и, в том числе, самовоздействие и взаимодействие этих волн. В результате взаимодействия первичных волн в нелинейной среде в общем случае будут генерироваться волны, распространяющиеся с другими групповыми скоростями. В самом простом случае будет генерироваться только одна волна с амплитудой a_3 и групповой скоростью v_3. Динамика этой волны будет определяться как свойствами среды так и амплитудами, и параметрами двух первых волн. Рассмотрим задачу описания всех типов сред, в которых динамика трех взаимодействующих волн такова, что совокупность уравнений (3.22) имеет представление Лакса и, следовательно, возможно существование волн типа солитонов.

По аналогии с предыдущим разделом, для решения этой задачи совместно с уравнениями (3.22) рассмотрим сопряженную систему уравнений:

$$-\frac{\partial \phi_i}{\partial t} - \frac{\partial (v_i(x,t)\phi_i)}{\partial x} = \sum_{j=1}^{2} w_{ji}\phi_j. \tag{3.23}$$

Здесь ϕ_i - функции, сопряженные к функциям a_i. Умножая уравнения (3.22) скалярно на ϕ_i слева, а уравнения (3.23) скалярно на a_i справа, и вычитая полученные соотношения, приходим к обобщенному закону сохранения:

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_{i=1}^{2}\phi_i a_i + \frac{\partial}{\partial x}\sum_{i=1}^{2} v_i(x,t)\phi_i a_i = 0, \qquad (3.24)$$

который автоматически выполняется, если

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \sum_{i=1}^{2}\phi_i a_i, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{2} v_i(x,t)\phi_i a_i, \qquad (3.25)$$

для произвольной дифференцируемой функции $\psi(x,t)$.

Рассмотрим вспомогательные объекты: вектор-функцию $\mathbf{\Psi} = \mathrm{colon}(\psi, \phi_1, \phi_2)$ и матрицу 2×2 с элементами b_{ij} и вектор с компонентами c_i, такие, что

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x} = \sum_{i=1}^{2} b_{ij}\phi_j + c_i\psi. \qquad (3.26)$$

Тогда совокупность уравнений (3.23), (3.25) и (3.26) может быть представлена в виде двух уравнений относительно вектор-функции $\mathbf{\Psi}$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{\Psi} = \mathbf{U}\mathbf{\Psi}, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{\Psi} = \mathbf{V}\mathbf{\Psi}, \qquad (3.27)$$

где $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ две матрицы размерности 3×3, имеющие вид

$$\mathbf{U}(x,t) = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 \\ c_1 & b_{11} & b_{12} \\ c_2 & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}(x,t) = \begin{pmatrix} 0 & v_1 a_1 & v_2 a_2 \\ v_1 c_1 & B_{11} & B_{12} \\ v_2 c_2 & B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}, \qquad (3.28)$$

где $B_{ij} = w_{ji} + v_i b_{ij} + v_{i,x}\delta_{ij}, i,j = 1,2$. Условие совместности системы (3.27) может быть записано в форме условия "нулевой кривизны" Захарова-Шабата [29]:

$$\mathbf{U_t} - \mathbf{V_x} + [\mathbf{U}, \mathbf{V}] = 0. \qquad (3.29)$$

Вид вспомогательных уравнений устанавливается с помощью явного вычисления условий (3.29).

Чтобы (3.27)-(3.29) в точности являлись представлением Лакса, в матрицах (3.28) должен содержаться произвольный комплексный параметр λ, превращающий систему (3.27) в нетривиальную систему двух спектральных задач с λ в качестве спектрального параметра, и от которого не зависят неизвестные функции a_i исходного уравнения. Эти условия выполняются, если предположить, что от λ зависят только вспомогательные функции b_{ij} и c_i. Наиболее простой случай такой зависимости соответствует предположению

$$b_{11} = P_1(x,t)\lambda + R_{1x}(x,t), \quad b_{22} = P_2(x,t)\lambda + R_{2x}(x,t) \tag{3.30}$$

при условии, что b_{12}, b_{21} и c_i от λ не зависят. Подстановка (3.30) в (3.29) и дополнительная редукция

$$a_k^* = ic_k, \quad b_{12} = b_{21}^* = a_3 \tag{3.31}$$

приводят к следующей системе комплексных уравнений:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial a_1}{\partial t} + \frac{\partial(v_1(x,t)a_1)}{\partial x} + iN_1(x,t)a_1 = iQ_1(x,t)a_2a_3^*,\\
&\frac{\partial a_2}{\partial t} + \frac{\partial(v_2(x,t)a_2)}{\partial x} + iN_2(x,t)a_2 = iQ_2(x,t)a_1a_3^*,\\
&\frac{\partial a_3}{\partial t} + \frac{\partial(v_3(x,t)a_3)}{\partial x} + iN_3(x,t)a_3 = iQ_3(x,t)a_2a_1^*,
\end{aligned} \tag{3.32}$$

имеющей вид обобщенных уравнений трехволнового взаимодействия (3ВВ). Здесь использованы следующие обозначения

$$\begin{aligned}
&v_3(x,t) = v_1(x,t) + Q_1(x,t) = v_2(x,t) + Q_2(x,t),\\
&Q_1(x,t) = (v_1 - v_2)P_2/(P_1 - P_2) = (v_2 - v_3),\\
&Q_2(x,t) = (v_1 - v_2)P_1/(P_1 - P_2) = (v_3 - v_1),\\
&Q_3(x,t) = Q_2 - Q_1 = (v_1 - v_2),\\
&N_1(x,t) = \mathbf{D_1}R_1 \equiv R_{1t} + v_1R_{1x},\\
&N_2(x,t) = \mathbf{D_2}R_2 \equiv R_{2t} + v_2R_{2x},\\
&N_3(x,t) = (v_1 - v_2)(R_{2x} + Q_2(R_{2x} - R_{1x})) + \mathbf{D_2}R_2 - \mathbf{D_1}R_1.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Функции N_1,N_2 и N_3 в оптической интерпретации данной модели соответствуют коэффициентам преломления волн в среде, которые здесь оказываются функциями координат и времени. Функции Q_1,Q_2 и Q_3 описывают неоднородность нелинейных свойств среды. В (3.33) функции $R_1(x,t)$ и $R_2(x,t)$ полностью произвольны, а функции $P_1(x,t)$ и

$P_2(x,t)$ связаны с функциями $v_1(x,t)$ и $v_2(x,t)$ (групповыми скоростями двух первых волн) двумя соотношениями:

$$\frac{\partial P_1}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(v_1(x,t)P_1)=0,\quad \frac{\partial P_2}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(v_2(x,t)P_2)=0. \tag{3.34}$$

Поэтому любые две функции из четырех $P_1(x,t)$, $P_2(x,t)$, $v_1(x,t)$, $v_2(x,t)$ также произвольны.

Функции w_{ij} в этих обозначениях будут иметь следующий вид:

$$w_{12}=Q_1a_3^*,\quad w_{21}=Q_2a_3,\quad w_{11}=-\mathbf{D}_1R_1-v_{1x},\quad w_{22}=-\mathbf{D}_2R_2-v_{2x}.$$

Вся совокупность соотношений определяет вид матриц $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ представления (3.27)-(3.29), при котором оно является истинным представлением Лакса. В результате имеется возможность воспользоваться МОЗР для построения точных решений этих уравнений.

Полученная система позволяет исследовать поведение солитонов ЗВВ в неоднородной среде, свойства которой определяются четырьмя произвольными действительными функциями N_1, N_2, v_1 и v_2. В силу произвольности эти функции могут содержать зависимость от амплитуд волн в среде, и следовательно среда может иметь нелинейные свойства, отличные от обычно рассматриваемых в рамках точно интегрируемой модели ЗВВ. При этом интегрируемость этих уравнений с помощью МОЗР сохраняется. Производя замену переменных

$$\begin{aligned}&A_1(x,t)=a_1(x,t)\exp\{iR_1(x,t)\},\quad A_2(x,t)=a_2(x,t)\exp\{iR_2(x,t)\},\\&A_3(x,t)=a_3(x,t)\exp\{i(R_2(x,t)-R_1(x,t))\},\end{aligned} \tag{3.35}$$

можно показать, что функции A_k удовлетворяют системе (3.32) с $N_k\equiv 0$. Пусть A_1,A_2,A_3 - есть решения уравнений ЗВВ для этого случая. Тогда согласно (3.35) $|a_k|=|A_k|$, а функции $arg(a_k)$, при произвольной функциональной зависимости $R_i=R_k(x,t,a_1,a_2,a_3), i=1,2$ от a_k находятся из решения системы, вообще говоря, трансцендентных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}arg(A_1)&=arg(a_1)+R_1(x,t,a_1,a_2,a_3),\\arg(A_2)&=arg(a_2)+R_2(x,t,a_1,a_2,a_3),\\arg(A_3)&=arg(a_3)+R_2(x,t,a_1,a_2,a_3)-R_2(x,t,a_1,a_2,a_3).\end{aligned}$$

Примером такой системы может служить обобщенный аналог массивной модели Тирринга [37]. Положим

$$N_1(x,t) \equiv \mathbf{D}_1 R_1 = n_1(a_1, a_2, a_3),$$
$$N_2(x,t) \equiv \mathbf{D}_2 R_2 = n_2(a_1, a_2, a_3).$$

Тогда, выбирая $n_1 = |a_2|^2 + m_1$ и $n_2 = |a_1|^2 + m_2$ при условии $m_1, m_2 = const$, $v_1 = v_2 = const$ и $a_3 \equiv 0$, получаем систему, эквивалентную массивной модели Тирринга, которая интегрируется с помощью МОЗР [37]. В рамках МОЗР можно рассматривать и более общие уравнения, соответствующие другим выражениям для действительных функций n_1 и n_2, поскольку преобразования (3.35) сводят любую такую систему к стандартной системе 3ВВ при $v_1, v_2 = const$.

3.7 Трехволновое взаимодействие в среде с квадратичной дисперсией

В качестве примера еще одной модели взаимодействия волн рассмотрим модель трехволнового взаимодействия в среде с квадратичной дисперсией, соответствующую условиям $d_1(x,t) = const$, $d_2(x,t) = const$. Эта модель часто используется на практике для описания различных ситуаций, в том числе связанных волноводов. В этом случае $n = 2$ и $_i^{(1)} = 0$, $b_{ij}^{(1)} = 0$ при $i \neq j$. В результате подстановка (3.21) при этих ограничениях в уравнения (3.20) приводит к следующим соотношениям на параметры среды и элементы матрицы $\mathbf{W}$:

$$d_1 = d_2 = d,\ b_{11}^{(1)} = \sigma_1,\ b_{22}^{(1)} = \sigma_2,$$
$$b_{11}^{(0)}(x,t) = \frac{v_1(x,t)}{2d} + q_1(t),\ b_{22}^{(0)}(x,t) = \frac{v_2(x,t)}{2d} + q_2(t),$$
$$v_1(x,t) = 2P_{1,x},\ v_2(x,t) = 2P_{2,x}.$$

Обозначим $a_3 = b_{12}, c_3 = b_{21}$. Тогда при $d = i$ после редукции

$$a_1 = i\tilde{a}_1 \exp\{-iP_1\},\ a_2 = i\tilde{a}_2 \exp\{-iP_2\},\ a_3 = i\tilde{a}_3 \exp\{-i(P_2 - P_1)\},$$
$$c_1 = -i\tilde{a}_1{}^* \exp\{iP_1\},\ c_2 = -i\tilde{a}_2{}^* \exp\{iP_2\},\ c_3 = -i\tilde{a}_3{}^* \exp\{i(P_2 - P_1)\}$$

уравнения 3-х-волнового взаимодействия примут вид:

$$a_{1,t} + ia_{1,xx} - 2\gamma a_2 a_{3,x}^* - 2i(|a_1|^2 + \gamma|a_3|^2)a_1 + i\dot{q}_1 x a_1 = 0,$$
$$a_{2,t} + ia_{2,xx} - 2(\gamma - 1)a_1 a_{3,x} - 2i\left(|a_2|^2 + (\gamma - 1)|a_3|^2\right)a_2 + +i\dot{q}_2 x a_2 = 0,$$

$$a_{3,t} + i(1-2\gamma)a_{3,xx} - 2\frac{\partial}{\partial x}(a_2 a_1^*) -$$
$$-2i\left(|a_1|^2 - |a_2|^2 + (2\gamma-1)|a_3|^2\right)a_3 + \delta a_{3,x} + i(\dot{q_1} - \dot{q_2})xa_3 = 0,$$

где знак ˜ у комплексных амплитуд опущен и введены обозначения

$$\gamma = \frac{\sigma_1}{(\sigma_1 - \sigma_2)}, \qquad \delta(t) = q_1(t)(\gamma - 1) - q_2(t)\gamma.$$

Здесь $q_1(t)$ и $q_2(t)$ - произвольные действительные функции t. Обычно для баланса нелинейности и дисперсии в средах с квадратичным законом дисперсии требуется кубическая нелинейность. Данные уравнения содержат помимо членов с кубической нелинейностью члены с квадратичной нелинейностью, что является характерной особенностью уравнений 3ВВ в случае “линейной” дисперсии. Заметим также, что данная система в качестве частного случая содержит уравнения, ранее полученные в работе [68], в которой было построено представление Лакса для уравнений двухчастотного взаимодействия волн в среде с квадратичной дисперсией и кубической нелинейностью.

Замечательным свойством полученной системы уравнений является то, что уравнения содержат произвольный параметр γ, при различных значениях которого уравнения, описывающие поведение вторичной волны с амплитудой a_3, существенно меняют свою структуру. При $\gamma = 1/2$ в уравнении для a_3 дисперсионный член исчезает и вторичная волна распространяется без дисперсии. Эта ситуация может возникать в реальных условиях в оптических системах [61, 46] в области с аномальной дисперсией. Представляют интерес и другие “вырожденные” варианты данных уравнений, например, уравнения генерации второй гармоники с учетом квадратичной дисперсии.

3.8 Взаимодействие волн в непрерывном спектре

Рассмотренные в предыдущих разделах многокомпонентные интегрируемые с помощью МОЗР уравнения с точки зрения физики описывают, как уже указывалось выше, явления, возникающие в слабодиспергирующих и слабонелинейных средах при резонансном взаимодействии нескольких почти монохроматических импульсов излучения. Такие ситуации важны с точки зрения прикладных аспектов передачи сигналов по оптическим волноводам. В реальности чаще приходится иметь дело с ситуацией, когда в нелинейной среде распространяется сигнал, имеющий непрерывный спектр, который слабо эволюционирует при перемещении этого сигнала в среде. Такая эволюция, в частности, связана с тем, что в непрерывном спектре всегда существует бесконечно много компонент, которые связаны резонансными соотношениями типа $k_1 + k_2 = k_3$. В результате возникает задача о том, при каких условиях динамика спектра оказывается точно интегрируемой, что можно рассматривать как условие устойчивости такого спектра по отношению к совместному действию дисперсионных эффектов и эффектов нелинейности.

Другой не менее важной проблемой, приводящей к аналогичной задаче, является проблема построения и исследования многомерных нелинейных уравнений, интегрируемых с помощью метода обратной задачи рассеяния (МОЗР) [32, **?**]. Формально, процедура построения представлений типа Лакса-Захарова-Шабата на основе тождеств Лагранжа, как это было показано в предыдущей главе, позволяет строить такие представления для многомерных уравнений. Однако, при этом возникают серьезные технические трудности, связанные с громоздкостью вычислений. Однако, если от части координат избавиться с помощью преобразований Фурье-Лапласа, то соответствующие нелинейные уравнения сводятся к бесконечной (нумеруемой набором непрерывных параметров) совокупности нелинейных уравнений в размерности 1+1, для которой метод тождеств Лагранжа позволяет получить решение проблемы построения представления ЛЗШ в компактной форме. Эту идею можно проиллюстрировать вычислениями пары Лакса для уравнений с бесконечным числом компонент.

В простейшем варианте обе сформулированные задачи эквивалентны исследованию на интегрируемость с помощью МОЗР следующей совокупности уравнений:

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} + v_k(x,t)\frac{\partial a_k}{\partial x} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} w_{kk'} a_{k'} dk'. \tag{3.36}$$

Здесь $a_k = a_k(x,t)$ - амплитуды Фурье распространяющегося в среде возмущения. В случае, если рассматривается задача о медленной эволюции Фурье-компонент возмущения в слабонелинейной среде, то x, t - “медленные” координаты и полный волновой процесс получается обратным Фурье-преобразованием по “быстрым” координатам. В этом случае

$v_k(x,t)$ - фазовая скорость Фурье-компоненты с номером k. Если же система получается с помощью понижения координатной размерности, то полный волновой процесс представляется в виде

$$u(x,y,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} a_k(x,t)e^{iky}dk, \tag{3.37}$$

и $v_k(x,t)$ - описывает дисперсию по дополнительной координате y. В обоих случаях ядро $w_{kk'} = w_{kk'}(x,t)$ интегрального оператора в правой части уравнения (3.36) описывает взаимодействие отдельных Фурье-компонент возмущения или сигнала за счет нелинейности среды и, возможно, ее неоднородности.

Типичный пример системы, в которой возникают подобные уравнения, это задача о динамике электромагнитных волн в одномерной нелинейной среде. Уравнение Максвелла для напряженности электрического поля E с линейной поляризацией в одномерной среде может быть записано в виде:

$$\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}E - c^2\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}E = \frac{\partial^2}{\partial\tau^2}P, \tag{3.38}$$

где ξ - пространственная координата, перпендикулярная фронту электромагнитной волны, τ - время, c^2 - фазовая скорость волн в среде, а P - поляризуемость среды. Напряженность E и поляризуемость среды P могут быть представлены в виде:

$$E(\xi,\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} a_{k'}(\xi,\tau)e^{ik'\xi - i\omega(k',X,T)\tau}dk',$$

$$P(\xi,\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(k,k',\xi,\tau)a_k(x,t)e^{ik'\xi - i\omega(k',X,T)\tau}dk'dk.$$

Здесь $x = \varepsilon\xi,\ t = \varepsilon\tau$ - "медленные" переменные, в предположении, что параметр ε мал: $\varepsilon << 1$. Исходные переменные ξ и τ при этом называют "быстрыми". После некоторых преобразований в первом порядке теории возмущений по параметру ε из (3.38) можно получить уравнения, аналогичные (3.36).

Для иллюстрации второй задачи о сведении многомерных уравнений к одномерным приведем результат обратного преобразования Фурье уравнения (3.36) при условии, что $v_k(x,t) = k$. Используя тогда (3.37), получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - i\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} W(t,x,y,y')u(x,y',t)dy',$$

где $W(t,x,y,y')$ - некоторое ядро, вообще говоря, нелокального взаимодействия в среде. В Главе 4 показано, что среди уравнений этого типа содержится, по крайней мере, одно интегрируемое уравнение, для которого интегральный оператор справа превращается в дифференциальный нелинейный оператор.

Задача в рассмотренной постановке была решена в работе [27] с помощью метода тождеств Лагранжа, примененного к уравнениям взаимодействия волн в спектральной форме. Следуя работе [27], рассмотрим задачу описания всех типов сред, в которых динамика взаимодействующих волн такова, что совокупность уравнений (3.36) имеет представление Лакса и, следовательно, возможно существование волн типа солитонов. Для решения этой задачи совместно с уравнениями (3.36) рассмотрим сопряженную систему уравнений

$$-\frac{\partial \phi_k}{\partial t} - \frac{\partial (v_k(x,t)\phi_k)}{\partial x} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} w_{k'k}\phi_{k'}dk'. \qquad (3.39)$$

Здесь $\phi_k(x,t)$ - функции, сопряженные к функциям a_k. Умножая уравнения (3.36) на ϕ_k слева, а уравнения (3.39) на a_k справа, интегрируя их по k, и затем, вычитая полученные соотношения, приходим к обобщенному закону сохранения:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \phi_k a_k dk + \frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{-\infty}^{\infty} v_k(x,t)\phi_k a_k dk = 0, \qquad (3.40)$$

который автоматически выполняется, если существует такая функция $\psi(x,t)$, что

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \phi_k a_k dk, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} v_k(x,t)\phi_k a_k dk. \qquad (3.41)$$

Рассмотрим вспомогательную вектор-функцию $\mathbf{\Psi}(\mathbf{k}) = \mathrm{colon}(\psi, \phi_k)$ и дополнительно функции $b_{k,k'}(x,t)$ и $c_k(x,t)$, такие, что

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial x} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} b_{kk'}\phi'_k dk' + c_k\psi. \qquad (3.42)$$

Тогда совокупность уравнений (3.39), (3.41) и (3.42) может быть представлена в виде двух интегро-дифференциальных уравнений относительно вектор-функции $\mathbf{\Psi}$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{\Psi}(\mathbf{k}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{U}(k,k')\mathbf{\Psi}(k')dk', \qquad \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{\Psi}(\mathbf{k}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{V}(k,k')\mathbf{\Psi}(k')dk', \qquad (3.43)$$

где $\mathbf{U}(k,k')$ и $\mathbf{V}(k,k')$ - две матрицы размерности 2×2, имеющие вид

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(k,k',x,t) &= \begin{pmatrix} 0 & a_{k'} \\ c_k\delta(k') & b_{kk'} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{V}(k,k',x,t) &= \begin{pmatrix} 0 & v_{k'}a_{k'} \\ -v_k c_k\delta(k') & d_{kk'} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.44}$$

где $d_{kk'} = -w_{k'k} - v_k b_{kk'} - v_{k,x}\delta(k-k')$, а $\delta(k)$ - δ-функция Дирака. Совокупность уравнений (3.39) и (3.41) содержит в себе исходную систему уравнений (3.36), поэтому дополнительные соотношения (3.42), не вносящие никаких дополнительных ограничений на вид функций ϕ_k, ψ и a_k, приводят к тому, что вся совокупность уравнений (3.43) содержит в себе исходную систему уравнений (3.36). Отсюда следует, что условием совместности системы (3.43), которое может быть записано в форме обобщенного условия "нулевой кривизны" Захарова-Шабата:

$$\mathbf{U}(k,k')_{,t} - \mathbf{V}(k,k')_{,x} + \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{U}(k,k''), \mathbf{V}(k'',k')]dk'' = 0, \tag{3.45}$$

где, как и раньше, $[,]$-обычный матричный коммутатор, является исходное уравнение и некоторый дополнительный набор уравнений на вспомогательные функции $b_{kk'}$ и c_k. Вид этих уравнений вновь устанавливается с помощью явного вычисления условий (3.45). Таким образом уравнения (3.43)- (3.45) образуют некоторый аналог представления Лакса исходной системы уравнений.

Как и в предыдущих примерах, чтобы (3.43)-(3.45) в точности являлись представлением Лакса, в матрицах (3.44) должен содержаться произвольный комплексный спектральный параметр λ, превращающий систему (3.43) в нетривиальную систему двух спектральных задач. При этом неизвестные функции a_k исходного уравнения не должны зависеть λ. Эти условия выполняются, если предположить, что от λ зависят только вспомогательные функции $b_{kk'}(x,t)$ и $c_k(x,t)$.

Наиболее простой случай такой зависимости соответствует предположению:

$$b_{kk'}(x,t) = P_k(x,t)\lambda\delta(k-k') + Q_{kk'}(x,t) + R_k(x,t)\delta(k-k') \tag{3.46}$$

при условии, что a_k и c_k от λ не зависят и $Q_{kk} = 0$. Подстановка (3.46) в (3.45) и дополнительная редукция $c_k = \omega_k a_k^*$ приводит к следующей системе уравнений относительно функций a_k и $Q_{kk'}$:

$$\frac{\partial a_k}{\partial t} + \frac{\partial(v_k(x,t)a_k)}{\partial x} + iN_k(x,t)a_k = \\ = -i\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(v_k - v_{k'})Q_{k'k}}{P_k - P'_k} a_{k'} dk', \tag{3.47}$$

$$\frac{\partial Q_{kk'}}{\partial t} + \frac{\partial(g_{k,k'}(x,t)Q_{kk'})}{\partial x} + \omega_k(v_{k'} - v_k)a_{k'}a_k^* + +i(N_k - N_{k'})Q_{kk'} = \\ = -i\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{k,k',k''}Q_{kk''}Q_{k''k'}dk''. \tag{3.48}$$

Здесь

$$g_{k,k'}(x,t) = \frac{P_k v_k - P_{k'}v_{k'}}{P_k - P_{k'}},$$
$$G_{k,k',k''}(x,t) = \frac{P_k(v_k - v_{k''})(P_{k''} - P_{k'}) - P_{k'}(v_{k''} - v_{k'})(P_k - P_{k''})}{P_k - P_{k'}}.$$

Кроме этого должны выполняться следующие соотношения:

$$\frac{\partial R_k}{\partial t} + i\frac{\partial(N_k)}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial P_k}{\partial t} + \frac{\partial(v_k P_k)}{\partial x} = 0,$$
$$\omega_{k'}Q_{k'k} + Q^*_{kk'}\omega_k = 0.$$

3.9 Общие замечания о применении метода тождеств Лагранжа

Как показывают приведенные примеры и дополнительные исследования, предложенная схема построения моделей, допускающих солитонные решения, оказывается достаточно универсальной. Все известные одномерные солитонные уравнения могут быть построены в рамках этой схемы. Кроме этого схема позволяет строить различные модификации известных уравнений, отталкиваясь от достаточно конкретных физических условий, налагаемых на модель процесса требованиями порядка дисперсии и самим требованием существования солитонных решений. Достоинством данного метода является то, что он исходит из конкретной формы исследуемого уравнения и в случае успеха сразу дает в явном виде операторы представления Лакса. Кроме этого в рамках данного подхода получаются сразу все возможные модификации (деформации) уравнения, которые допускаются требованием существования солитонных решений. Это определяет важную практическую ценность такого подхода.

Чтобы подчеркнуть универсальность предложенного подхода, укажем еще раз на возможность применять этот метод для многомерных уравнений. Как было показано в предыдущей главе, метод позволяет рассматривать модели взаимодействия волн в n-мерных средах с заданным порядком дисперсии по каждой из координат, и строить для них псевдопредставления Лакса. Формальное вычисление n матриц псевдопредставления Лакса для таких моделей не представляет особого труда. Однако отыскание условий, при которых такие псевдопредставления соответствуют истинным представлениям, сопряжено с большими трудностями. Кроме чисто технических трудностей (громоздкие вычисления), оказывается затруднительным правильно выбирать зависимость вспомогательных функций от спектрального параметра, при которой обратная спектральная задача может быть успешно решена. В общих чертах эта трудность связана с тем, что форма нелинейности уравнений, допускающих солитонные решения, определяется не общей функциональной формой дисперсионной гиперповерхности в пространстве волновых чисел линейной ее части, а формой каждой дисперсионной кривой, параметризуемой одним спектральным параметром, т.е. для каждой дисперсионной кривой необходимо решать вопрос о существовании соответствующего ей солитонного уравнения и формы нелинейности этого уравнения. Уравнения, получаемые с помощью метода тождества Лагранжа не обладают достаточной избирательность и чувствительностью к форме дисперсионной кривой и поэтому содержат информацию сразу о нескольких уравнениях с различными типами нелинейностей, выделение которых и представляет основную трудность. Для решения этой задачи необходимо привлекать другие методы. Один из таких методов, основанный на методе преобразований Дарбу, излагается в следующей главе.

Глава 4

Метод преобразований Дарбу и структура солитонных уравнений

Задача, которая будет решаться в данной главе, может быть сформулирована следующим образом. Пусть имеется некоторое нелинейное уравнение, которое можно представить в виде суммы двух частей

$$\mathbf{L}u + N[u] = 0, \tag{4.1}$$

где $\mathbf{L}$ - линейный оператор, содержащий, как правило, старшие производные уравнения, и определяющий форму дисперсии данного уравнения, а $N[u]$ - нелинейный член описывающий нелинейность среды. Оператору $\mathbf{L}$ можно сопоставить дисперсионное соотношение $L(k_1, \ldots, k_n) = 0$, где $k_1, \ldots, k_n$ - спектральные параметры линейной задачи. Тогда основная проблема состоит в ответе на вопрос: как должны быть взаимосвязаны функциональная форма дисперсионного соотношения $L(k_1, \ldots, k_n) = 0$ уравнения (4.1) и функциональная форма нелинейного члена $N[u]$ для того, чтобы уравнение (4.1) допускало N-солитонные уравнения или, что одно и тоже, интегрировалось с помощью МОЗР. Эта проблема решалась, исходя из разных точек зрения, в целом ряде работ. Наиболее близкими по смыслу к поставленной проблеме были работы [93, 94, 71, 72], в которых был сформулирован подход анализа взаимосвязи дисперсионных соотношений и нелинейности в спектральном представлении. Однако, полного решения поставленной задачи получено не было в том смысле, что не был предъявлен алгоритм однозначного вычисления формы нелинейности исходя из формы дисперсионной кривой.

В настоящей работе предлагается в качестве метода построения уравнений использовать хорошо известный в теории солитонов и квантовой механике метод преобразований Дарбу [75, 79, 81, 5]. Обычно этот метод применяется для построения солитонных решений уравнений, имеющих представление Лакса [81, 66, 22]. Однако в данной работе показывается, каким образом этот метод может быть с большой эффективностью применен к построению самих нелинейных уравнений, допускающих солитонные решения, исходя из сведений о форме дисперсионной кривой для солитонов. Предлагаемый подход полностью решает проблему однозначного вычисления формы нелинейного уравнения по форме дисперсионной кривой. Ниже предъявлен явный алгоритм решения этой задачи и приведены конкретные примеры его использования. Следует отметить, что этот метод обладает несколько меньшей общностью, чем метод тождеств Лагранжа, но именно в силу этого более эффективен в случае многомерных уравнений.

4.1 Построение преобразований Дарбу

Пусть имеется набор операторов $\mathbf{L}_i^{(0)}$ вида

$$\mathbf{L}_i^{(0)} = \mathbf{I}\partial_{x_i} - R_i(\lambda)\mathbf{E}_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

которые в дальнейшем будем именовать “затравочными” операторами. Здесь $\mathbf{E}_i = \mathrm{diag}(e_1, \ldots, e_M)$ -диагональные матрицы размерности $M \times M$, $\mathbf{I}$ - единичная матрица той же размерности, $x_i, i = 1, \ldots, n$ - набор n независимых переменных, $R_i(\lambda)$- некоторые рациональные функции одного комплексного спектрального параметра λ. Поскольку матрицы $\mathbf{E}_i$ - диагональные, то операторы $\mathbf{L}_i^{(0)}$ коммутируют между собой и, следовательно, существует вектор-функция $\mathbf{\Psi}_0(\lambda, \mathbf{x})$ - являющаяся собственной функцией всех n операторов $\mathbf{L}_i^{(0)}$

$$\mathbf{L}_i^{(0)}\mathbf{\Psi}_0 = 0, i = 1, \ldots, n. \tag{4.2}$$

Функции $R_i(\lambda)$ определяют параметризацию дисперсионной кривой в пространстве волновых чисел R_i, на которой определены совместные решения Ψ_0 уравнений (4.2).

Под преобразованием Дарбу будем понимать преобразование, ставящее в соответствие операторам $\mathbf{L}_i^{(0)}$ новые операторы $\mathbf{L}_i$, также коммутирующие между собой, и такие, что их собственные вектор-функции $\mathbf{\Psi}(\lambda, x, t)$ связаны с $\mathbf{\Psi}_0(\lambda, x, t)$ соотношением

$$\mathbf{\Psi}(\lambda, \mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{\Psi}_0(\lambda, \mathbf{x}), \tag{4.3}$$

где $\mathbf{A}$ - некоторый линейный дифференциальный оператор. Из условия коммутативности операторов $\mathbf{L}_i$, которые будут называться в дальнейшем “одетыми”, следует набор соотношений, которые определяют основные свойства оператора $\mathbf{A}$. Для того, чтобы получить эти соотношения, одетые операторы представим следующим образом

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{L}_i^0 - \mathbf{U}_i = \mathbf{I}\partial_{x_i} - R_i(\lambda)\mathbf{E}_i - \mathbf{U}_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $\mathbf{U}_i$ - некоторые матрицы размерности $M \times M$, зависящие от λ и $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Функции $\mathbf{\Psi}$ по определению должны удовлетворять уравнениям

$$\mathbf{L}_i\mathbf{\Psi} \equiv \mathbf{L}_i^0 - \mathbf{U}_i\mathbf{\Psi} = 0, i = 1, \ldots, n. \tag{4.4}$$

Подставляя (4.3) в эти уравнения и учитывая (4.2), получаем следующие соотношения для $\mathbf{A}$

$$[\mathbf{L}_i^{(0)}, \mathbf{A}] = \mathbf{U}_i\mathbf{A}, i = 1, \ldots, n. \tag{4.5}$$

При этом матрицы

$$\mathbf{V}_i = R_i(\lambda)\mathbf{E}_i + \mathbf{U}_i \tag{4.6}$$

будут удовлетворять уравнениям Захарова-Шабата (2.55), которые представляют собой систему нелинейных уравнений относительно элементов матриц $\mathbf{U}_i$, точные решения которых могут быть найдены с помощью явного вычисления оператора $\mathbf{A}$, что собственно и представляет собой вариант МОЗР, основанный на методе преобразований Дарбу [81, 54, 66].

Построение решений уравнений (2.55) производится следующим образом. Из общей теории линейных операторов следует, что оператор $\mathbf{A}$ будет удовлетворять уравнениям (4.5), тогда и только тогда, когда все линейно-независимые собственные функции оператора $\mathbf{A}$, отвечающие его нулевому собственному значению, будут одновременно собственными функциями всех операторов $\mathbf{L}_i^{(0)}$ или производными от них конечного порядка по спектральному параметру. Последняя часть утверждения следует из того, что оператор $\mathbf{A}$ явно не зависит от спектрального параметра λ и, следовательно, если выполнено (4.3) для всех λ, то для любого значения λ, для которого существует производная от $\mathbf{\Psi}(\lambda, x, t)$ конечного порядка l, будут выполнены и условия:

$$\frac{\partial^l}{\partial\lambda^l}\mathbf{\Psi}(\lambda, x, t) = \mathbf{A}\frac{\partial^l}{\partial\lambda^l}\mathbf{\Psi}_0(\lambda, x, t).$$

Поэтому сформулированное выше утверждение относительно собственных функций оператора $\mathbf{A}$, соответствующих его нулевому значению, распространяется и на производные по λ от этих собственных функций операторов $\mathbf{L}_i^{(0)}$.

Пусть оператор $\mathbf{A}$ имеет N-кратно вырожденное нулевое собственное значение. Этот факт в дальнейшем будем отражать, указывая в качестве нижнего индекса у $\mathbf{A}$ степень его вырождения, например: $\mathbf{A_N}$. Обозначим

$$\Psi_\mu^{[\nu]} = \frac{\partial^\nu}{\partial \lambda^\nu} \mathbf{\Psi}_0(\lambda, x, t)|_{\lambda=\lambda_\mu},$$

где λ_μ - различные значения спектрального параметра $\mu = 1, \ldots, K$ и при каждом значении μ $\nu = 1, \ldots, L_\mu$, причем

$$N = \sum_{\mu=1}^{K} L_\mu.$$

Тогда сделанное выше утверждение эквивалентно следующей системе уравнений:

$$\mathbf{A_N} \Psi_\mu^{[\nu]} = 0, \qquad (4.7)$$

$$\mathbf{L}_i^{(0)} \Psi_\mu^{[\nu]} = \sum_{\nu=0}^{L_\mu} C_{L_\mu}^\nu R_{i\mu}^{[\nu]} \Psi_\mu^{[L_\mu - \nu]}, \qquad (4.8)$$

$$R_{i\mu}^{[\nu]} = (\tfrac{\partial^\nu}{\partial \lambda^\nu} R_i(\lambda, x, t))|_{\lambda=\lambda_\mu}, \qquad (4.9)$$

$$\mu = 1, \ldots, K, \nu = 1, \ldots, L_\mu, N = \sum_{\mu=1}^{K} L_\mu.$$

Здесь $C_{L_\mu}^\nu = \frac{L_\nu!}{\nu!(L_\mu - \nu)!}$ - биноминальные коэффициенты.

Если решение уравнений (4.8) найдено, то из (4.7) можно вычислить вид оператора $\mathbf{A}_N$, затем, непосредственно вычисляя коммутаторы в (4.5), можно найти вид матриц $\mathbf{U}_i$, соответствующих данному оператору $\mathbf{A}_N$. Поскольку операторы $\mathbf{L}_i$ в этом случае по построению имеют общие собственные функции Ψ_ν, то они коммутируют и следовательно элементы их матриц $\mathbf{V}_i$ соответствуют точному решению исходного уравнения.

Вычислить решения уравнений (4.8) не представляет труда, поскольку по постановке задачи эти уравнения - уравнения с постоянными коэффициентами. Для решения задачи остается указать вид оператора $\mathbf{A}_N$, для которого возможно построить решение уравнения (4.7). В стандартном методе преобразований Дарбу в МОЗР [81] в качестве такого оператора выбирается дифференциальный оператор порядка N по одной выделенной координате, не содержащий производных по другим координатам. Выделенной координатой x_1 обычно является та, для которой $R_1(\lambda) = \lambda$, т.е. является линейной функцией параметра λ. Пусть такой выделенной координатой является координата $x = x_1$. Тогда оператор $\mathbf{A}_N$ можно представить в следующем: виде

$$\mathbf{A}_N = \sum_{i=0}^{N} \Xi_i(x,t) \frac{\partial^i}{\partial x^i}, \tag{4.10}$$

где матрица Ξ_N без ограничения общности может полагаться равной единичной матрице: $\Xi_N = \mathbf{I}$. Матрицы $\Xi_0, \ldots, \Xi_{N-1}$ при заданных функциях $\mathbf{\Psi}_\mu$ могут быть найдены из системы алгебраических уравнений, следующей из (4.7):

$$\sum_{k=0}^{N-1} \Xi_k(x,t) \Psi_i^{[k]} = -\Xi_N \Psi_i^{[N]}. \tag{4.11}$$

Система (4.11) невырождена, если все Ψ_i линейнонезависимы как функции переменной x, поэтому в этом случае существует единственное нетривиальное решение для Ξ_k, которое и будет в конечном счете определять решения уравнений Захарова-Шабата.

В данной работе нас не будут интересовать сами точные решения уравнений (2.55). Они могут быть построены с помощью рассмотренной выше схемы, примеры использования которой можно найти, например, в [81, 54, 66]. Основная задача будет заключаться в отыскании общей формы представления матриц $\mathbf{U}_i$, отвечающей заданной функциональной зависимости $R(\lambda)_i$ от λ.

4.2 Вычисление одетых операторов для полиномиальных дисперсионных кривых

Решение поставленной задачи сводится к явному вычислению коммутаторов в левой части (4.5) и приведению их к виду правой части этих уравнений. Поскольку предполагается, что коэффициенты оператора $\mathbf{A}_N$ находятся из системы уравнений (4.7), (4.8) и (4.11), то это гарантирует выполнение (4.5) для некоторых матриц $\mathbf{U}_i$. Поэтому для вычисления $\mathbf{U}_i$ достаточно найти коэффициент при старшей производной по переменной x_1 в выражении для коммутаторов слева в уравнениях (4.5). Рассмотрим эту процедуру сначала на простом примере.

Вычислим матрицы $\mathbf{U}_1$, в операторе, соответствующем переменной $x_1 = x$ с $R(\lambda) = \lambda$. Имеем

$$[\mathbf{L}_1^0, \mathbf{A}_N]\Psi_0 = [\mathbf{I}\partial_x - \lambda\mathbf{E}, \sum_{i=0}^{N} \Xi_i (\mathbf{E}\partial_x)^i]\Psi_0 = \big(-[\mathbf{E}, \Xi_{N-1}]\mathbf{E}^{N-1}\lambda^N +$$
$$+ \left(\Xi_{N-1,x}\mathbf{E}^{N-1} + [\mathbf{E}, \Xi_{N-2}]\mathbf{E}^{N-2}\right)\lambda^{N-1} + O(\lambda^{N-2})\big)\,\Psi_0 =$$
$$= \left(\mathbf{U}_1\mathbf{E}^N\lambda^N + \mathbf{U}_1\Xi_{N-1}\mathbf{E}^{N-1}\lambda^{N-1} + O(\lambda^{N-2})\right)\Psi_0.$$

Отсюда сразу следует

$$\mathbf{U}_1 = -[\mathbf{E}, \Xi_{N-1}]\mathbf{E}^{-1}.$$

Исходя из этой формулы, можно получить целую серию соотношений, которые связывают матричные коэффициенты Ξ_k оператора $\mathbf{A}_N$ при $k < N-1$ с коэффициентом Ξ_{N-1}. Например, в порядке $N-1$ по λ

$$[\mathbf{E}, \Xi_{N-2}]\mathbf{E}^{-1} = \partial_x\Xi_{N-1} + [\mathbf{E}, \Xi_{N-1}]\mathbf{E}^{-1}\Xi_{N-1} \tag{4.12}$$

и далее рекурентно

$$[\mathbf{E}, \Xi_{k-1}]\mathbf{E}^{-1} = \partial_x\Xi_k + [\mathbf{E}, \Xi_{N-1}]\mathbf{E}^{-1}\Xi_k, \tag{4.13}$$

для $k = N-2, N-3, \ldots, 0$.

Пусть теперь для некоторого оператора $\mathbf{L}_2$, соответствующего переменной $x_2 = t$: $R_2(\lambda) = r_2\lambda^2 + r_1\lambda + r_0$, $\mathbf{E}_2 = \mathbf{J}$,

$$\partial_t\Psi_0 = R_2(\lambda)\mathbf{J}\Psi_0. \tag{4.14}$$

Тогда

$$[\mathbf{L}_2^0, \mathbf{A}_N]\Psi_0 = [\mathbf{I}\partial_t - R_2(\lambda)\mathbf{J}, \sum_{i=0}^{N} \Xi_i\partial_x^i]\Psi_0 =$$
$$= \sum_{i=0}^{N}\{\Xi_{i,t} - R_2(\lambda)[\mathbf{J}, \Xi_i]\}\mathbf{E}^i\lambda^i\Psi_0 =$$
$$= \Big\{\lambda^{N+1}\left(-r_2[\mathbf{J}, \Xi_{N-1}]\mathbf{E}^{N-1}\right) +$$
$$+\lambda^N\left(-r_1[\mathbf{J}, \Xi_{N-1}] - r_2[\mathbf{J}, \Xi_{N-2}]\mathbf{E}^{-1}\right)\mathbf{E}^{N-1} +$$
$$+\lambda^{N-1}\Big(-r_0[\mathbf{J}, \Xi_{N-1}] - r_1[\mathbf{J}, \Xi_{N-2}]\mathbf{E}^{-1} -$$
$$-r_2[\mathbf{J}, \Xi_{N-3}]\mathbf{E}^{-2} + \frac{\partial\Xi_{N-1}}{\partial t}\Big)\mathbf{E}^{N-1} + O(\lambda^{N-2})\Big\}\,\Psi_0.$$

Выражение справа в этом соотношении - матричный полином по λ, который согласно (4.5) должен иметь вид:

$$P(\lambda) = \mathbf{U}_2(\lambda)\mathbf{A}_N = (\mathbf{V}_1(\mathbf{x})\lambda + \mathbf{V}_0(\mathbf{x}))\sum_{k=0}^{N}\Xi_k\mathbf{E}^k\lambda^k.$$

Приравнивая старшие степени в последних двух соотношениях, получаем

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{V}_1 = -r_2[\mathbf{J}, \Xi_{N-1}]\mathbf{E}^{-1}, \\
&\mathbf{V}_0 = r_2\left(-[\mathbf{J}, \Xi_{N-2}]\mathbf{E}^{-2} + [\mathbf{J}, \Xi_{N-1}]\mathbf{E}^{-1}\Xi_{N-1}\mathbf{E}_1^{-1}\right) - \\
&\qquad\qquad -r_1[\mathbf{J}, \Xi_{N-1}]\mathbf{E}^{-1}.
\end{aligned} \tag{4.15}
$$

Отсюда следует, что одетый оператор $\mathbf{L}_2$ имеет вид

$$
\mathbf{L}_2 = \mathbf{I}\partial_t - \lambda^2\mathbf{J} - \lambda\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_0. \tag{4.16}
$$

В соответствие с рассмотренной схемой находим совокупность рекурентных соотношений для Ξ_k, аналогичную (4.13):

$$
\begin{aligned}
&-r_2[\mathbf{J}, \Xi_{k-2}]\mathbf{E}^{-2} - r_1[\mathbf{J}, \Xi_{k-1}]\mathbf{E}^{-1} - r_0[\mathbf{J}, \Xi_k] + \Xi_{k,t} = \\
&= \mathbf{V}_1\Xi_{k-1}\mathbf{E}^{-1} + \mathbf{V}_0\Xi_k, \quad k = N-1, \ldots, 0, \\
&\Xi_k = 0, k < 0.
\end{aligned} \tag{4.17}
$$

В частном случае, когда $\mathbf{E}_2 = \mathbf{J} = \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}$, а размерность матриц представления $M = 2$, из (2.55) получаем НУШ. В случае размерности матриц $M > 2$ получаем многокомпонентные аналоги уравнения НУШ.

Рассмотрим теперь общую схему построения уравнений для случая, когда $R_M(\lambda), M = 2, \ldots, n$ - конечный полином общего вида: $R_M(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{L} r_k\lambda^k$. Обозначим координату x_M, соответствующую оператору $\mathbf{L}_M$, через z и положим $\mathbf{H} = \mathbf{E}_M$. Тогда

$$
\mathbf{I}\partial_z\Psi_0 = R_M(\lambda)\mathbf{H}\Psi_0. \tag{4.18}
$$

Рассмотрим следующее выражение:

$$
\begin{aligned}
&[\mathbf{L}_M^0, \mathbf{A}_N]\Psi_0 = [\mathbf{I}\partial_z - R_M(\lambda)\mathbf{H}, \sum_{k=0}^{N} \Xi_k(\mathbf{E}\partial_x)^k] = \\
&= \sum_{k=0}^{N-1}\left(\Xi_{k;z} - R_M(\lambda)[\mathbf{H}, \Xi_k]\right)\partial_x^k\Psi_0 = \left(\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{L}\mathbf{G}_{kj}\lambda^{j+k} + O(\lambda^{N-1})\right).
\end{aligned} \tag{4.19}
$$

Здесь введено обозначение

$$
\mathbf{G}_{jk} = -[\mathbf{H}, \Xi_k]\mathbf{E}^k r_j.
$$

Тогда, изменяя порядок суммирования в (4.19), получаем:

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{L}_M^0, \mathbf{A}_N]\Psi_0 &= \left(\sum_{l=N}^{N+L-1}\sum_{j=l-L}^{N-1}\mathbf{G}_{(l-j)j}\lambda^l + O(\lambda^{N-1})\right)\Psi_0 = \\
&= \mathbf{P}(\lambda, \mathbf{x})\Psi_0.
\end{aligned} \tag{4.20}
$$

Согласно (4.5) $\mathbf{P}(\lambda)$ - полином и правая часть последнего равенства должна иметь вид:

$$\mathbf{P}(\lambda,\mathbf{x})\Psi_0 = \sum_{j=0}^{L-1}\mathbf{V}_j(\mathbf{x})\lambda^j\sum_{k=0}^{N}\mathbf{\Xi}_k\mathbf{E}^k\lambda^k\Psi_0 = \tag{4.21}$$
$$= \left(\sum_{l=N}^{N+L-1}\sum_{j=l-L+1}^{N}\mathbf{F}_{(l-j)j}\lambda^l + O(\lambda^{N-1})\right)\Psi_0,$$

где $\mathbf{F}_{jk}(\mathbf{x}) = \mathbf{V}_j\mathbf{\Xi}_k\mathbf{E}^k$. Сравнивая старшие части полиномов в (4.20) и (4.21), приходим к системе из L рекурентных соотношений для вычисления матричных коэффициентов $\mathbf{V}_j$:

$$\sum_{j=l-L+1}^{N}\mathbf{F}_{(l-j)j} = \sum_{j=l-L-1}^{N-1}G_{(l-j)j},\ l = N,\dots,N+L-1, \tag{4.22}$$

или

$$\sum_{j=l-L}^{N}\mathbf{V}_{l-j}\mathbf{\Xi}_j\mathbf{E}^j = \sum_{j=l-L-1}^{N-1}r_{l-j}[\mathbf{H},\mathbf{\Xi}_j]\mathbf{E}^j, \tag{4.23}$$
$$l = N,\dots,N+L-1.$$

В частности:

$$\mathbf{V}_{L-1} = -r_L[\mathbf{H},\mathbf{\Xi}_{N-1}]\mathbf{E}^{-1},$$
$$\mathbf{V}_{L-2} = -r_L[\mathbf{H},\mathbf{\Xi}_{N-2}]\mathbf{E}^{-2} + [\mathbf{H},\mathbf{\Xi}_{N-1}]\mathbf{E}^{-1}(-r_{L-1}+r_L\mathbf{\Xi}_{N-1}),$$
$$\dots$$

Одетый оператор $\mathbf{L}_M$ в результате будет иметь вид

$$\mathbf{L}_M = \partial_z - R_M(\lambda)\mathbf{H} - \sum_{j=0}^{L-1}\mathbf{V}_j\lambda^j.$$

4.3 Построение операторов для рациональной параметризации дисперсионных кривых

В предыдущем разделе построение уравнений производилось в предположении, что функции $R(\lambda)$ - полиномы. Рассмотрим случай, когда $R(\lambda)$ - рациональная функция общего вида:

$$R(\lambda) = \frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)},\ P(\lambda) = \sum_{k=0}^{L}p_k\lambda^k,\ Q(\lambda) = \sum_{k=0}^{L}q_k\lambda^k. \tag{4.24}$$

Будем предполагать, что полиномы $P(\lambda)$ и $Q(\lambda)$ таковы, что не все коэффициеты каждого из них обращаются в ноль.

Структурное уравнение (4.5) для оператора

$$\mathbf{L}^{(0)} = \frac{\partial}{\partial t} - \mathbf{J}R(\lambda)$$

имеет в данном случае вид:

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\partial}{\partial t} - \frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)}\mathbf{J}, \mathbf{A}_N\right]\Psi_0 = \\ &= \frac{1}{Q(\lambda)}\sum_{k=0}^{N}\left\{Q(\lambda)\mathbf{\Xi}_{k,t} - P(\lambda)[\mathbf{J}, \mathbf{\Xi}_k]\right\}\frac{\partial^k}{\partial x^k}\Psi_0 = \mathbf{D}\mathbf{A}_N\Psi_0. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Это уравнение принимает теперь вид, аналогичный (4.19):

$$\begin{aligned} &[\mathbf{I}\partial_z - R(\lambda)\mathbf{J}, \sum_{k=0}^{N}\mathbf{\Xi}_k(\mathbf{E}\partial_x)^k] = \\ &= \frac{1}{Q(\lambda)}\sum_{k=0}^{N-1}\left(Q(\lambda)\mathbf{\Xi}_{k;z} - P(\lambda)[\mathbf{J}, \mathbf{\Xi}_k]\right)\partial_x^k\Psi_0 = \\ &= \frac{1}{Q(\lambda)}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{L}\left(q_j\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{\Xi}_k - p_j[\mathbf{J}, \mathbf{\Xi}_k]\right)\mathbf{E}^k\lambda^{j+k} + O(\lambda^{N-1})\frac{\Psi_0}{Q(\lambda)} = \\ &= \frac{1}{Q(\lambda)}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{L}\mathbf{G}_{jk}\lambda^{j+k} + O(\lambda^{N-1})\frac{\Psi_0}{Q(\lambda)}, \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{G}_{jk} = \left(q_j\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{\Xi}_k - p_j[\mathbf{J}, \mathbf{\Xi}_k]\right)\mathbf{E}^k.$$

Оператор $\mathbf{D}$ следует искать теперь в виде рациональной функции λ вида

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \frac{1}{Q(\lambda)}\sum_{k=0}^{L-1}\mathbf{V}_k(\mathbf{x})\lambda^k = \\ &= \frac{1}{Q(\lambda)}\left(\sum_{l=N}^{N+L-1}\sum_{j=l-L+1}^{N}\mathbf{F}_{(l-j)j}\lambda^l + O(\lambda^{N-1})\right)\Psi_0, \end{aligned}$$

где $\mathbf{F}_{jk}$ - те же, что и в (4.21).

Приравнивая члены при одинаковых степенях λ в уравнении (4.25), получаем рекурентную систему уравнений для вычисления $\mathbf{V}_k$, совпадающую по форме с (4.22). Система (4.23) при этом будет иметь несколько иной вид:

$$\sum_{k=m-N}^{L}\left\{\frac{\partial\Xi_{m-k}}{\partial t}q_k-[\mathbf{J},\Xi_{m-k}]p_k\right\}\mathbf{E}_1^{m-k}= \tag{4.26}$$
$$=\sum_{k=m-N}^{L-1}\mathbf{V}_k\Xi_{m-k}\mathbf{E}_1^{m-k},\quad m=N,\ldots,L+N-1.$$

Решения этой системы приводят к классу одетых операторов с рациональной зависимостью их коэффициентов от спектрального параметра:

$$\mathbf{L}_z=\partial_z-\frac{P(\lambda)}{Q(\lambda)}\mathbf{J}-\frac{1}{Q(\lambda)}\sum_{j=0}^{L-1}\mathbf{V}_j\lambda^j.$$

Полученные соотношения позволяют эффективно вычислять одетые операторы во всех рассмотренных случаях дисперсионных кривых. Это дает возможность вычислять форму нелинейных уравнений, которым удовлетворяют коэффициенты этих операторов, явно вычисляя их коммутаторы, т.е. в форме уравнений Захарова-Шабата (2.55). Однако такой подход не всегда прост и удобен. Существует более эффективная процедура построения этих уравнений, связанная с рекурентными соотношениями, которым удовлетворяют коэффициенты операторов.

4.4 Эффективная процедура вычисления формы уравнений

Из приведенных построений видно, что если дисперсионная кривая, соответствующая затравочным операторам $\mathbf{L}_i^{(0)}$, имеет полиномиальную параметризацию в пространстве волновых чисел, то матрицы одетых операторов целиком определяются коммутаторами вида $[\mathbf{E}_k,\Xi_m]$, которые в силу соотношений ((4.13)) могут быть представлены в форме дифференциальных полиномов от элементов матрицы Ξ_{N-1}. Поэтому, уравнения Захарова-Шабата (2.55) в этом случае представляют собой набор уравнений относительно компонент одной матрицы Ξ_{N-1}. Оказывается, что необходимые уравнения можно получать более рациональным путем, чем из уравнений Захарова-Шабата. Как и в случае вычисления коммутатора $[\mathbf{L}_1^0,\mathbf{A}_N]$ в (4.13),(4.12) вычисление коммутатора $[\mathbf{L}_2^0,\mathbf{A}_N]$, и вообще $[\mathbf{L}_i^0,\mathbf{A}_N]$, приводит к набору соотношений, связывающих коэффициенты оператора $\mathbf{A}_N$ между собой. Эти соотношения дополняют соотношения (4.13). Максимальный набор линейнонезависимых соотношений из всего набора этих соотношений, отвечающих всем различным операторам $\mathbf{L}_i^{(0)}$, собственно и будет являтся искомой системой нелинейных уравнений.

В качестве примера, рассмотрим случай квадратичной дисперсии. Введем обозначения:

$$\mathbf{U} = \Xi_{N-1}, \quad \tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{E}_1^{-1}[\mathbf{E}_1, \Xi_{N-1}].$$

и для простоты положим $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2$. Тогда, исключая матрицу Ξ_{N-2} из соотношений (4.12) и соотношения

$$[\mathbf{E}_1, \Xi_{N-2}]\mathbf{E}_2^{-1} + [\mathbf{E}_2, \Xi_{N-1}]\mathbf{E}_2^{-1} - [\mathbf{E}_2, \Xi_{N-1}]\mathbf{E}_2^{-1}\Xi_{N-1} = 0. \qquad (4.27)$$

(последнее следует из (4.17) при $k = N-2$), уравнения можно привести к виду:

$$\tilde{\mathbf{U}}_t = \mathbf{U}_{xx}\mathbf{E}_1 + \partial_x(\tilde{\mathbf{U}}\mathbf{E_1}\tilde{\mathbf{U}}) - [\mathbf{U}, \mathbf{U}_x] - [\tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{U}}\mathbf{E_1}\tilde{\mathbf{U}}] = 0. \quad (4.28)$$

Как уже отмечалось, это уравнение в случае размерности матриц 2×2 является нелинейным уравнением Шредингера (НУШ), а в случае большей матричной размерности это уравнение будет являться некоторым многокомпонентным обобщением уравнения НУШ [58].

Очевидно для каждой пары операторов $\mathbf{L}_i^{(0)}$ можно указать совокупность уравнений их совместности, полученных аналогичным образом. Поэтому вся совокупность из N операторов в качестве условий совместности содержит ровно N нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных на коэффициенты этих операторов, которые по построению совместны, а выражения для их решений определяются процедурой вычисления коэффициентов Ξ_i оператора $\mathbf{A}_N$ методом преобразований Дарбу.

4.5 Примеры уравнений с полиномиальными дисперсионными кривыми

Руководствуясь развитым методом, определим вид скалярных уравнений, соответствующих лианеризованному дисперсионному соотношению $\omega^2 = k_x^2 + k_y^2$ двумерного волнового уравнения. Эта поверхность допускает дисперсионные кривые, имеющие полиномиальную параметризацию следующего вида

$$\omega = a\lambda^{2m+1} + b\lambda, k_x = a\lambda^{2m+1} - b\lambda, k_y = 2\sqrt{ab}\lambda^{m+1}.$$

Здесь a, b - постоянные, m - целое число.

Рассмотрим простейшую нетривиальную полиномиальную параметризацию, которой соотвествует $m = 1$. В этом случае удобно ввести новые координаты по правилу $\xi = x - t$ и $\eta = x + t$. Для этих переменных дисперсионные параметры будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} R_1(\lambda) &= k_x - \omega = 2b\lambda, \\ R_2(\lambda) &= k_x + \omega = 2a\lambda^3, \\ R_3(\lambda) &= k_y = -2\sqrt{ab}\lambda^2. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Для удобства положим $a = b = 1/2$. В результате голые операторы будут иметь вид:

$$\mathbf{L}_1^{(0)} = \frac{\partial}{\partial \xi} - \lambda \mathbf{E}, \quad \mathbf{L}_2^{(0)} = \frac{\partial}{\partial \eta} - \lambda^3 \mathbf{J}, \quad \mathbf{L}_3^{(0)} = \frac{\partial}{\partial y} + \lambda^2 \mathbf{H}.$$

Полагая $M = 2$ и выбирая

$$\mathbf{E} = \mathbf{J} = \mathbf{H} = \operatorname{diag}\{i, -i\}, \tag{4.30}$$

приходим к двум хорошо известным задачам одевания операторов и вычисления уравнений для них. Для пары операторов $\mathbf{L}_1^{(0)}$ и $\mathbf{L}_3^{(0)}$ - результат одевания соотвествует обычному НУШ, а для пары $\mathbf{L}_1^{(0)}$ и $\mathbf{L}_2^{(0)}$ модифицированному уравнению КдВ. Эти уравнения имеют вид:

$$iu_\eta + u_{\xi\xi} + 2\alpha|u|^2 u = 0, \quad u_y + u_{\xi\xi\xi} + 6\alpha|u|^2 u_\xi = 0.$$

Таким образом, динамика солитонов, дисперсионная кривая для которых параметризуется соотношениями (4.29), описывается двумя уравнениями: НУШ и мКдВ. Более общий вид этих уравнений можно найти в [21]. Из этих двух уравнений можно сконструировать явно трехмерное нелинейное уравнение, которое по форме уже не будет похоже на уравнения НУШ и мКдВ,

$$u_y - iu_{\eta\xi} - 2\alpha\frac{\partial}{\partial \xi}(|u|^2 u) + 6\alpha|u|^2 u_\xi = 0.$$

Очевидно, это уравнение допускает тот же класс солитонных решений, что и исходная пара уравнений, однако до сих пор по-видимому не рассматривалось как солитонное уравнение. Таким образом, данный метод позволяет строить уравнения, допускающие солитонные решения, для которых явное представление в форме Лакса получить сложно, в том числе и в многомерном случае.

4.6 Примеры уравнений с рациональными дисперсионными кривыми.

Простейшим примером уравнения, имеющего рациональную параметризацию дисперсионной кривой, является уравнение СГ:

$$u_{xt} = \sin u.$$

Дисперсионная кривая в этом случае задается соотношениями $R_1(\lambda) = \lambda$ и $R_2(\lambda) = 1/\lambda$. Рассмотрим в начале именно этот случай. Уравнение для Ψ_0 будет иметь вид:

$$\partial_y \Psi_0 = \mathbf{E}_2 R_2(\mathbf{E}_2 \partial_x)\Psi_0.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
[\mathbf{L}_1^0, \mathbf{A}_N]\Psi_0 &= [\mathbf{I}\partial y - \frac{1}{\lambda}\mathbf{E}_3, \sum_{i=0}^{N} \mathbf{\Xi}_i \partial_x^i]\Psi_0 = \\
&= \sum_{i=0}^{N}([\mathbf{I}\partial_y, \mathbf{\Xi}_i\partial_x^i] - \frac{1}{\lambda}[\mathbf{E}_2, \mathbf{\Xi}_i\partial_x^i])\Psi_0 = \\
&= \sum_{i=0}^{N}(\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{\Xi}_i - \frac{1}{\lambda}[\mathbf{E}_2, \mathbf{\Xi}_i])\partial_x^i\Psi_0.
\end{aligned}$$

Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial x}\Psi_0 = \lambda \mathbf{E}_1 \Psi_0,$$

то последнее выражение можно переписать так:

$$\begin{aligned}
&[\mathbf{L}_1^0, \mathbf{A}_N]\Psi_0 = \big(\mathbf{\Xi}_{N-1,y}\mathbf{E}_1^{N-1}\lambda^{N-1} - \\
&- \big([\mathbf{E}_2, \mathbf{\Xi}_{N-1}]\mathbf{E}_1^{N-1} + \mathbf{\Xi}_{N-2,y}\mathbf{E}_1^{N-2}\big)\,\lambda^{N-2} + O(\lambda^{N-3})\big)\,\Psi_0 = \\
&= \big(\mathbf{U}_2\mathbf{E}_1^N\lambda^N + \mathbf{U}_2\mathbf{\Xi}_{N-1}\mathbf{E}_1^{N-1}\lambda^{N-1} + O(\lambda^{N-3})\big)\,\Psi_0.
\end{aligned}$$

Полиномы в левой и правой части должны иметь одинаковый порядок, поэтому оператор $\mathbf{U}_2$ имеет вид $\mathbf{U}_2 = \lambda^{-1}\mathbf{Q}_{-1}$. Сравнивая коэффициенты при λ^{N-1} в левой и правой частях, получаем:

$$\mathbf{Q}_{-1} = \Xi_{N-1,y}\mathbf{E}_1^{-1},$$
$$\mathbf{U}_2 = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial y}\Xi_{N-1}\mathbf{E}_1^{-1}.$$

Рекурентные соотношения, определяющие связь Ξ_{N-1} и Ξ_k, имеют вид:

$$\Xi_{k-1,y}\mathbf{E}_1^{-1} - [\mathbf{E}_2, \Xi_k] = \Xi_{N-1,y}\mathbf{E}_1^{-1}\Xi_k. \tag{4.31}$$

Вид самого уравнения относительно Ξ_{N-1} можно получить, комбинируя (4.13) и (4.31) и полагая $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_1$:

$$\Xi_{N-1,xt} = [\mathbf{E}_1, [\mathbf{E}_1, \Xi_{N-1}]] + \Xi_{N-1,t}[\Xi_{N-1}\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_1^{-1}] - [\mathbf{E}_1\xi_{N-1}, \mathbf{E}_1^{-1}]\Xi_{N-1,t}. \tag{4.32}$$

В случае размерности матриц представления $M = 2$ (4.32) можно свести к уравнению sine – Gordon. Для этого выберем матрицу $\mathbf{E}_1$ таким же образом как и ранее (4.30). Матрицу Ξ_{N-1} запишем следующим образом:

$$\Xi_{N-1} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}. \tag{4.33}$$

В этом случае для элементов матрицы Ξ_{N-1} получаются уравнения

$$u_{11,xt} = 2(u_{12}u_{21})_{,t} \tag{4.34}$$
$$u_{12,xt} = -4u_{12} + 2u_{12}(u_{11} + u_{22})_{,t}\,. \tag{4.35}$$

Функция u_{22} удовлетворяет уравнению (4.34), а u_{21} (4.34). При замене

$$\cos v = 4(u_{11,t} - 1) \qquad \sin v = 4u_{12,t},$$

полагая $u_{11} = u_{22}$ и $u_{12} = -u_{21}$ легко получить уравнение

$$v_{xt} = \sin v.$$

Вычисление коммутатора, соответствующего оператору $\mathbf{L}_2^{(0)}$, проводится несколько иначе, чем раньше

$$[\mathbf{L}_2^0, \mathbf{A}_N] = [\mathbf{E}_2\partial_t, \sum_{i=0}^{N}\Xi_i\partial_x^i] = \sum_{i=0}^{N}\Big([\mathbf{E}_2, \Xi_i]\partial_y + \mathbf{E}_2\partial_y\Xi_i\Big)\partial_x^k =$$
$$= \mathbf{E}_2\partial_y\Xi_{N-1}\mathbf{E}_1(\mathbf{E}_1\partial_x)^{-1}\Big(\Xi_N\partial_x^N + O(\partial_x^{N-1})\Big).$$

Правая часть полученного соотношения представляет собой дифференциальный оператор по переменной x с производными от -1 до $N-1$. Поэтому в представлении правой части в форме $\mathbf{D}\mathbf{A}_N$, оператор $\mathbf{D}$ будет иметь вид $\mathbf{D} = \mathbf{E}_2\partial_y\Xi_{N-1}\mathbf{E}_1(\mathbf{E}_1\partial_x)^{-1}$. Отсюда

$$\mathbf{U}_2 = \lambda^{-1}\mathbf{E}_2\Xi_{N-1;y}\mathbf{E}_1.$$

Полюсная особенность сохраняется в "одетом" операторе, поэтому матрицы $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$ приобретают следующую форму:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{D}_1\lambda - \mathbf{D}_1[\mathbf{E}_1, \Xi_{N-1}],$$
$$\mathbf{V}_2 = \frac{1}{\lambda}(\mathbf{D}_2 - \frac{\partial}{\partial y}\Xi_{N-1}\mathbf{E}_1).$$

Уравнения Захарова-Шабата или процедура исключения матрицы Ξ_{N-2}, случае $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_0$, приводят к матричному уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\Xi_{N-1}\mathbf{E}_1 + [\mathbf{D}_2, \mathbf{D}_1[\mathbf{E}_1, \Xi_{N-1}]] + [\mathbf{D}_1[\mathbf{E}_1, \Xi_{N-1}], \frac{\partial}{\partial y}\Xi_{N-1}\mathbf{E}_1] = 0.$$

Для матричной размерности 2×2 это уравнение эквивалентно уравнению СГ. В случае большей размерности это уравнение является многокомпонентным обобщением СГ [58].

Более интересным с точки зрения приложений является случай соответствующий параметризации: $k_x = R_1(\lambda) = \lambda$ и $k_y = R_2(\lambda) = a(\lambda_1-\lambda)^{-1} + b(\lambda_2-\lambda)^{-1}$ с двумя полюсами на дисперсионной кривой. В этом случае оператор Лакса $\mathbf{L}_1$ будет совпадать с определенным ранее в параграфе 4.2. Построение $\mathbf{L}_2$ будем проводить по общей схеме. "Затравочный" оператор в этом случае имеет вид:

$$\mathbf{L}_2^{(0)} = \frac{\partial}{\partial y} - \left(\frac{a}{\lambda_1-\lambda} + \frac{b}{\lambda_2-\lambda}\right)\mathbf{E}_2.$$

В соотношении $[\mathbf{L}_2, \mathbf{A}] = \mathbf{U}_2\mathbf{A}$ оператор $\mathbf{U}_2$ необходимо записать в форме рациональной функции по λ:

$$\mathbf{U}_2 = \frac{1}{P(\lambda)}\left(\lambda\mathbf{Q}_1 + \lambda\mathbf{Q}_0\right),$$

где $\mathbf{Q}_0$, $\mathbf{Q}_1$ определяются из сравнения коэффициентов при соответствующих степенях λ.

Группируя коэффициенты при λ^{N+1} и λ^N, можно получить выражение для $\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_2$:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{Q}_1 = \Xi_{1,y}\,\mathbf{E}_1^{-1}\Xi_N^{-1},\\
&\mathbf{Q}_0 = \Xi_{N-1,y}(\lambda 1 + \lambda 2)\mathbf{E}_1^{-1}\Xi_N^{-1} - A[\mathbf{E}_2, \Xi_{N-1}]\mathbf{E}_1^{-1}\Xi_N^{-1} +\\
&+\Xi_{N-2,y}\mathbf{E}_2^{-2}\Xi_N^{-1} - \mathbf{Q}_1\Xi_{N-1}\mathbf{E}_1^{-1}\Xi_N^{-1}.
\end{aligned}$$

Здесь $A = a + b$ и $B = a\lambda_1 + b\lambda_2$. Последнее уравнение преобразуется к виду:

$$\begin{aligned}
&\Xi_{N-3,y}\mathbf{E}_1^{-2} - A[\mathbf{E}_2, \Xi_{N-2}]\mathbf{E}_1^{-1} + (\lambda_1 + \lambda_2)\Xi_{N-2,y}\mathbf{E}_1^{-1} +\\
&+\lambda_1\lambda_2\Xi_{N-1,y} + B[\mathbf{E}_2, \Xi_{N-1}] - \mathbf{Q}_0\Xi_{N-1} - \mathbf{Q}_1\Xi_{N-2}\mathbf{E}_1^{-1} = 0.
\end{aligned}$$

Положим для простоты $\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & e_2 \end{pmatrix}$ и $\Xi_{N-1} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$. Тогда, используя (4.13), и исключая с помощью них элементы матрицы Ξ_{N-2}, можно получить систему уравнений, для функций $u(x,t) = u_{12}(x,t) = -u_{21}(-x,-t)$ и $v = u_{11}$. Эта система имеет вид

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{2}{e_1e_2}v_t - A\right)u_x + \left(\lambda_1\lambda_2 + \frac{2}{e_1e_2}v_x\right)u_t +\\
&+\frac{\lambda_1+\lambda_2}{e_1-e_2}u_{xt} + \frac{1}{(e_1-e_2)^2}u_{xxt} +\\
&+u\left(B(e_1-e_2) + \frac{1}{e_1e_2}(\left(u^2\right)_x + p(t) + \right. &&(4.36)\\
&\left.+g_{,t}(t) + 2(\lambda_1+\lambda_2)\left(\frac{1}{e_2} - \frac{1}{e_1}\right)v_t\right) = 0,\\
&v_x = -u^2. &&(4.37)
\end{aligned}$$

Чтобы еще больше упростить уравнения, положим $\lambda_1 = -\lambda_2$ и $\lambda_1\lambda_2 = -\frac{2}{e_1e_2}$. Тогда первое уравнение системы (4.36) будет иметь вид

$$\left(\lambda_1^2 v_t - A\right)u_x + \frac{1}{(e_1-e_2)^2}u_{xxt} + u\left((u^2)_x + p(t) + g_{,t}+\right)v_t = 0.$$

На этом мы заканчиваем изложение методов построения и анализа нелинейных уравнений солитонного типа. В предыдущих главах мы дали исчерпывающие ответы на поставленные во введении вопросы, касающиеся развития теории солитонов, но не решили всех проблем, которые существуют в этой теории для того, чтобы она могла рассматриваться в качестве универсальной теории с базовыми элементами, в смысле определения данного во введении. В последующих главах мы перейдем к рассмотрению иных подходов построения точных решений нелинейных уравнений, описывающих волны в средах с дисперсией и нелинейностью. Эти методы, как правило, не дают полного описания всех решений рассматриваемых уравнений, а это двумеризованные цепочки Тоды и уравнения Лиувилля в многомерных пространствах. Однако, эти методы позволяют перейти от исследования нелинейных волн в средах с дисперсией к волнам в средах с диффузией, что невозможно сделать в рамках теории солитонов. Использование этих методов в теории автоволн, которая тесно связанна с нелинейными диффузионными уравнениями, будет рассмотрено в части II, после того как будут изучены методы анализа двумеризованных цепочек Тоды и уравнений Лиувилля в многомерных пространствах.

Глава 5

Квадратичные формы в теории двумеризованных цепочек Тоды

Рассмотренные в предыдущих главах методы построения базовых моделей, интегрируемых с помощью МОЗР, как уже указывалось, приводят к очень громоздким вычислительным схемам уже в размерности координатного пространства 2+1. Кроме этого, методы, основанные на МОЗР, не применимы в ситуациях, когда среда, в которой распространяются нелинейные волны, является диссипативной или диффузионной. Поэтому, существует настоятельная проблема разработки новых схем построения и интегрирования моделей многомерных волновых процессов, которые могли бы быть использованы и в теории диффузионных процессов. Метод такого типа был предложен в работах [111, 112]. Основа этого метода состоит в существовании специального класса решений уравнений Лиувилля и двумеризованных цепочек Тоды в форме квадратичных форм [23, 86, 41]. Развитие этого метода позволяет распространить его на системы типа Лиувилля или цепочек Тоды в многомерном пространстве (многомеризованные уравнения Лиувилля (мУЛ), многомеризованных цепочек Тоды (мЦТ)). В дальнейшем эта теория применяется в части II данной монографии к моделям распространения волн в средах с диффузией.

Одними из наиболее важных для практических приложений интегрируемых с помощью МОЗР моделей волновых процессов в средах с дисперсией являются так называемые двумеризованные цепочки Тоды [86, 41]. В одномерном варианте цепочки Тоды служат точноинтегрируемым примером гамильтоновской системой и использовались первоначально (самим Тодой) как модель взаимодействия цепочек атомов в задачах, связанных с теорией твердых тел [64]. В многомеризованном варианте цепочки Тоды встречаются, например, в задачах теории поля и оказываются связанными преобразованиями типа Миуры со многими точноинтегрируемыми уравнениями типа KdV [17]. Достаточно давно известно, см. например, [60, 86, 41], что цепочки Тоды определенного типа имеют представление Лакса-Захарова-Шабата и, соответственно, решения типа солитонов. В работах [86, 41] было показано, что решения солитонного типа этих уравнений могут быть представлены в виде квадратичных форм от некоторого набора функций. Этот формальный результат был с иных позиций найден для уравнения Лиувилля в работе [23] и использован затем для построения точных решений нелинейных диффузионных уравнений в работах [111, 112, 19]. Основные результаты представленные в данной главе были опубликованы автором в работе [25].

В работе [23] было показано, что двумерные уравнения Клейна-Гордона

$$\Delta\Psi = F(\Psi), \tag{5.1}$$

с оператором Лапласа и с достаточно произвольной функцией $F(X)$, имеют представление в виде условия совместности пары уравнений:

$$\Phi_{zz} = A_{zz}\Phi, \quad \Phi_{\bar{z}\bar{z}} = A_{\bar{z}\bar{z}}\Phi, \tag{5.2}$$

где $z = x+iy$, $\bar{z} = x-iy$, $\Psi(z,\bar{z}) = \ln\Phi(z,\bar{z})$, $A = A(z,\bar{z})$ - действительная функция, определяющая вид $F = F(\psi)$. Этот факт может быть проверен прямым вычислением условия совместности системы (5.2). Действительно, в силу того, что $A(z,\bar{z})$ - действительная функция, имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}A_{\bar{z}\bar{z}} - \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2}A_{zz} = \frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{\Phi_{\bar{z}\bar{z}}}{\Phi} - \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2}\frac{\Phi_{\bar{z}\bar{z}}}{\Phi} = \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\Phi_{\bar{z}}}{\Phi}\right)^2 - \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2}\left(\frac{\Phi_{z}}{\Phi}\right)^2.$$

Раскрывая правую часть последнего соотношения, получаем:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial\Delta\Psi}{\partial\bar{z}} - \frac{\partial\Psi}{\partial\bar{z}}\frac{\partial\Delta\Psi}{\partial z} = 0.$$

Это уравнение эквивалентно (5.1) для некоторой функции $F(\Psi)$, вид которой определяется видом функции $A(z,\bar{z})$. В частности, уравнению Лиувилля с $F(\phi) = Q\exp\{-2\phi\}$ соответствует $A(z,\bar{z}) = a(z) + a(\bar{z})$, где $a(z)$ - произвольная дифференцируемая дважды функция комплексной переменной z. Результатом этого является то, что общее действительное решение уравнения Лиувилля может быть представлено в виде:

$$\Psi(z,\bar{z}) = \ln\Phi(z,\bar{z}), \quad \Phi(z,\bar{z}) = \frac{1}{|w(z)|}\sum_{i,j=1}^{2} h_{ij}\psi_i(z)\psi_j(\bar{z}), \tag{5.3}$$

где $\mathbf{h} = (h_{ij})$ - невырожденная эрмитова матрица размерности 2×2 ($h_{ij} = h^*_{ji}$) (знак " *" - комплексное сопряжение), определяющая эрмитову форму на двумерном линейном пространстве функций $\psi_{1,2}(z)$ - линейно-независимых решений обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\psi''(z) + \frac{w'}{w}\psi'(z) = a''(z)\psi(z),$$

где $w(z) = \psi_1\psi'_2 - \psi_2\psi'_1$ - определитель Вронского функций ψ_1, ψ_2. При этом в выражении для F $Q = \det(\mathbf{h})$. Поскольку в этом уравнении функции $w(z)$ и $a(z)$ произвольны, то функции ψ_1, ψ_2 также произвольны. Этот результат может быть установлен прямой проверкой

$$\Delta \ln \Phi = \frac{\det(\mathbf{h})}{\Phi^2}$$

и является отправной точкой для построения его обобщений на случай ДЦТ вида (5.4).

5.1 Основное тождество и двумеризованные цепочки Тоды

Первоначально предлагаемая конструкция решений будет построена для ДЦТ. Ограничимся в данной работе двумеризованными цепочками Тоды (соответственно и ОЦТ), которые могут быть представлены в виде дифференциальных уравнений в частных производных

$$\Delta\Phi_n = \exp\{\Phi_{n-1} - 2\Phi_n + \Phi_{n+1}\},\ n = 1, \ldots, N-1, \qquad (5.4)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$ - оператор Лапласа в случае комплексных координат $z = x + iy,\ \bar{z} = x - iy$ (или оператор Д'Аламбера в случае действительных координат $z = x+y, \bar{z} = x-y$ (конусные координаты)). Для переменных $G_n = \Phi_n - \Phi_{n-1}$, эта система будет иметь более привычный вид

$$\Delta G_n = \exp\{G_{n+1} - G_n\} - \exp\{G_n - G_{n-1}\},\ n = 1, \ldots, N-1. \qquad (5.5)$$

Обобщенные ОЦТ и ДЦТ (см. например [17, 117]) в данной работе рассматриваться не будут.

Рассмотрим N-мерное линейное векторное комплексное пространство $\mathbf{C}^N$. Элементами этого пространства являются векторы $\mathbf{\Psi}$ =

$(\psi_1,\ldots,\psi_N)$. Введем в пространстве $\mathbf{C}^N$ билинейную эрмитову форму

$$(\mathbf{\Psi},\bar{\mathbf{\Psi}})=\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}h_{\alpha\beta}\psi_\alpha\bar{\psi}_\beta, \tag{5.6}$$

где $\bar{\mathbf{\Psi}}=(\bar{\psi}_1,\ldots,\bar{\psi}_N)$ - вектор, комплексно-сопряженный вектору $\mathbf{\Psi}$, $\mathbf{h}=(h_{\alpha\beta})$ - невырожденная эрмитова матрица размерности $N\times N$. Поэтому $(\mathbf{\Psi},\bar{\mathbf{\Psi}})$ - действительное число. Для удобства записи выражений типа (5.6) введем тензорные объекты с верхними индексами по правилу

$$W^{\alpha_1\ldots\alpha_n}=\sum_{\beta=1}^{N}h_{\alpha_1\beta_1}\cdots h_{\alpha_n\beta_n}\bar{W}_{\beta_1\ldots\beta_n},$$

где величины $\bar{W}_{\beta_1\ldots\beta_n}$ получены из $W_{\beta_1\ldots\beta_n}$ простым комплексным сопряжением. Поэтому (5.6) можно записать теперь в виде

$$(\mathbf{\Psi},\bar{\mathbf{\Psi}})=\sum_{\alpha=1}^{N}\psi_\alpha\psi^\alpha.$$

Пусть уравнения $\mathbf{\Psi}=\mathbf{\Psi}(z)$ задают гладкую кривую $\mathbf{L}$ в $\mathbf{C}^N$ такую, что компоненты $\psi_i(z)$ радиус-вектора кривой суть линейно-независимые и $N-1$ раз дифференцируемые функции одного аргумента z. Для определенности рассмотрим случай, когда z - комплексный аргумент. Для всех $n=1,\ldots,N-1$ введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}&W^{(n)}_{\{\alpha_n,\alpha_{n+1},\ldots,\alpha_{N-1}\}}=\\&=\det\begin{pmatrix}\psi_1&\psi_1'&\ldots&\psi_1^{[n-1]}&\delta_{1\alpha_n}&\ldots&\delta_{1\alpha_{N-1}}\\\psi_2&\psi_2'&\ldots&\psi_2^{[n-1]}&\delta_{2\alpha_n}&\ldots&\delta_{2\alpha_{N-1}}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\psi_N&\psi_N'&\ldots&\psi_N^{[n-1]}&\delta_{N\alpha_n}&\ldots&\delta_{N\alpha_{N-1}}\end{pmatrix}=\\&=\varepsilon_{\alpha_0,\ldots,\alpha_{n-1}\alpha_n,\ldots,\alpha_{N-1}}\psi_{\alpha_0}\cdots\psi^{[n-1]}_{\alpha_{n-1}}.\end{aligned}\tag{5.7}$$

Здесь $\varepsilon_{\{\alpha_0,\alpha_{n+1},\ldots,\alpha_{N-1}\}}$ - полностью антисимметричный символ в размерности пространства N,

$$\psi^{[n]}=\frac{d^n}{dz^n}.$$

По смыслу $W^{(n)}_{\{\alpha_n,\alpha_{n+1},\ldots,\alpha_{N-1}\}}$ - антисимметричный по всем индексам тензор в $\mathbf{C}^N$, представляющий собой, с геометрической точки зрения, $(N-n)$-вектор, связанный с кривой $\mathbf{L}$. С другой стороны $W^{(n)}_{\{\alpha_n,\alpha_{n+1},\ldots,\alpha_{N-1}\}}$ -

совокупность определителей Вронского всех сочетаний по n функций из общего набора N функций $\{\psi_i\}_{i=1}^N \in \mathbf{C}^N$. В силу линейной независимости ψ_i все определители Вронского отличны от нуля.

Для дальнейшего удобно дополнить обозначения (5.7) и на случай $n=0$ и $n=N$, положив

$$\begin{aligned}
&W^{(0)}_{\{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{N-1}\}} = \qquad (5.8)\\
&= \det\begin{pmatrix} \delta_{1\alpha_0} & \delta_{1\alpha_1} & \ldots & \delta_{1\alpha_{n-1}} & \delta_{1\alpha_n} & \ldots & \delta_{1\alpha_{N-1}} \\ \delta_{2\alpha_0} & \delta_{2\alpha_1} & \ldots & \delta_{2\alpha_{n-1}} & \delta_{2\alpha_n} & \ldots & \delta_{2\alpha_{N-1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \delta_{N\alpha_0} & \delta_{N\alpha_1} & \ldots & \delta_{N\alpha_{n-1}} & \delta_{N\alpha_n} & \ldots & \delta_{N\alpha_{N-1}} \end{pmatrix} = \\
&= \varepsilon_{\{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{N-1}\}},\\
&W^{(N)} = \qquad (5.9)\\
&= \det\begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_1' & \ldots & \psi_1^{[n-1]} & \psi_1^{[n]} & \ldots & \psi_1^{[N-1]} \\ \psi_2 & \psi_2' & \ldots & \psi_2^{[n-1]} & \psi_2^{[n]} & \ldots & \psi_2^{[N-1]} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \psi_N & \psi_N' & \ldots & \psi_N^{[n-1]} & \psi_N^{[n]} & \ldots & \psi_N^{[N-1]} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

т.е. $W^{(N)}$ - определитель Вронского всех N линейно-независимых функций $\psi_i(z)$.

Для двух произвольных функций $f(z)$ и $g(z)$ введем также следующее обозначение

$$[f(z), g(z)] \equiv f(z)\frac{dg(z)}{dz} - g(z)\frac{df(z)}{dz}. \qquad (5.10)$$

Для заданной кривой $\mathbf{\Psi} = \mathbf{\Psi}(z)$ определена сопряженная кривая $\bar{\mathbf{\Psi}} = \bar{\mathbf{\Psi}}(\bar{z})$, параметром которой является $\bar{z} = x - iy$, комплексно-сопряженный $z = x + iy$. Тогда эрмитову форму (5.6) можно рассматривать как действительную функцию z и $\bar{z}$:

$$\begin{aligned}
H_{(1)}(z,\bar{z}) &= (\mathbf{\Psi}, \bar{\mathbf{\Psi}}) = \sum_{\alpha=1}^{N} \psi_\alpha(z)\psi^\alpha(\bar{z}) = \\
&= \frac{1}{(N-1)!}\sum_{\alpha_1\ldots\alpha_{N-1}=1}^{N} W^{(1)}_{\alpha_1\ldots\alpha_{N-1}}(z) W^{(1)\alpha_1\ldots\alpha_{N-1}}(\bar{z})
\end{aligned}$$

- скалярное произведение радиус-векторов точек на паре взаимосопряженных кривых в $\mathbf{C}^N$.

Лемма 5.1. *Для любого фиксированного* $N > 1$

$$H^2_{(1)}(z,\bar{z})\Delta \ln H_{(1)}(z,\bar{z}) = H_{(2)}(z,\bar{z}), \qquad (5.11)$$

где

$$
\begin{aligned}
&H_{(2)}(z,\bar z)=\sum_{\alpha<\beta=1}^{N} w_{\alpha\beta}(z)w^{\alpha\beta}(\bar z)=\\
&=\frac{1}{(N-2)!}\sum_{\alpha_2,\dots,\alpha_{N-1}=1}^{N} W^{(2)}_{\alpha_2\dots\alpha_{N-1}}(z)W^{(2)\alpha_2\dots\alpha_{N-1}}(\bar z),\\
&w_{\alpha\beta}=[\psi_\alpha(z),\psi_\beta(z)],\ \alpha\neq\beta.
\end{aligned}
$$

Доказательство. Проверка осуществляется прямыми вычислениями:

$$
\begin{aligned}
&H^2_{(1)}(z,\bar z)\Delta\ln H_{(1)}(z,\bar z)=\\
&=H_{(1)}(z,\bar z)\Delta H_{(1)}(z,\bar z)-H_{(1),z}(z,\bar z)H_{(1),\bar z}(z,\bar z)=\\
&=(\mathbf{\Psi},\bar{\mathbf{\Psi}})\Delta(\mathbf{\Psi},\bar{\mathbf{\Psi}})-(\mathbf{\Psi},\bar{\mathbf{\Psi}})_z(\mathbf{\Psi},\bar{\mathbf{\Psi}})_{\bar z}=\\
&=\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}\Big(\psi_\alpha(z)\psi^\alpha(\bar z)\psi'_\beta(z)\psi'^\beta(\bar z)-\psi'_\alpha(z)\psi^\alpha(\bar z)\psi_\beta(z)\psi'^\beta(\bar z)\Big)=\\
&=\sum_{\alpha<\beta=1}^{N}\Big((\psi_\alpha(z)\psi'_\beta(z)-\psi'\alpha(z)\psi_\beta(z))\Big)\times \qquad (5.12)\\
&\times\Big((\psi^\alpha(\bar z)\psi'^\beta(\bar z)-\psi^\alpha(\bar z)\psi'^\beta(\bar z))\Big)=\sum_{\alpha<\beta=1}^{N} w_{\alpha\beta}(z)w^{\alpha\beta}(\bar z)=\\
&=\frac{1}{(N-2)!}\sum_{\alpha_2,\dots,\alpha_{N-1}=1}^{N} W^{(2)}_{\alpha_2\dots\alpha_{N-1}}(z)W^{(2)\alpha_2\dots\alpha_{N-1}}(\bar z).
\end{aligned}
$$

Что и требовалось доказать.

Заметим, что в (5.12) не имеет значения, как нумеруются компоненты квадратичной формы. Например, это соотношение можно записать в виде

$$
\begin{aligned}
&H^2_{(1)}(z,\bar z)\Delta\ln H_{(1)}(z,\bar z)= \qquad (5.13)\\
&=\frac{1}{(N)!}\frac{1}{(N-2)!}\sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_{N-1}=1}^{N}\ \sum_{\beta_1,\dots,\beta_{N-1}=1}^{N}[W^{(1)}_{\{\alpha_1,\dots,\alpha_{N-1}\}},W^{(1)}_{\{\beta_1,\dots,\beta_{N-1}\}}]\times\\
&\times[W^{(1)\{\alpha_1,\dots,\alpha_{N-1}\}},W^{(1)\{\beta_1,\dots,\beta_{N-1}\}}],
\end{aligned}
$$

причем множитель $[(N-1)!(N-1)!]^{-1}$ заменяется на множитель $[N!(N-2)!]^{-1}$ вследствие того, что число неодинаковых элементов сумм уменьшается в $(N-1)/N$ раз за счет антисимметричности определенной выше операции $[,]$.

Для случая $N = 2$ это соотношение эквивалентно рассмотренному выше решению уравнения Лиувилля. В общем случае, поскольку $H_{(2)}$ - вновь эрмитова форма, но возможно другой размерности, то к ней применима та же формула (5.11). В результате получается новая эрмитова форма. Продолжая цепочку таких вычислений, получаем последовательность квадратичных форм. Оказывается, последовательность этих эрмитовых форм при конечном N конечна. Непосредственной проверкой можно убедится в справедливости для $N = 3$ двух соотношений:

$$H^2_{(1)}(z,\bar{z})\Delta\ln H_{(1)}(z,\bar{z}) = H_{(2)}(z,\bar{z}), \tag{5.14}$$

$$H^2_{(2)}(z,\bar{z})\Delta\ln H_{(2)}(z,\bar{z}) = H_{(1)}(z,\bar{z})H_{(3)}(z,\bar{z}), \tag{5.15}$$

где $H_{(3)}(z,\bar{z}) = W^{(3)}(z)\bar{W}^{(3)}(\bar{z})$, а

$$W^{(3)}(z) = det\begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_1' & \psi_1'' \\ \psi_2 & \psi_2' & \psi_2'' \\ \psi_3 & \psi_3' & \psi_3'' \end{pmatrix}.$$

Очевидно $\Delta\ln H_{(3)} = 0$ (если $W^{(3)}(z)$ не имеет нулей или полюсов). Как показано ниже, этот результат обобщается на произвольную конечную размерность N эрмитова пространства линейно-независимых $N-1$ раз дифференцируемых функций $\psi_i(z)$.

Обратим внимание на то, что формулы (5.11) и (5.13) эквивалентны следующему тождеству

$$[W^{(1)}_{\{\alpha_1,\ldots,\alpha_{N-1}\}}, W^{(1)}_{\{\beta_1,\ldots,\beta_{N-1}\}}] = W^{(0)}_{\{\alpha_1,\ldots,\alpha_{N-1},\beta_{N-1}\}}W^{(2)}_{\{\beta_1,\ldots,\beta_{N-2}\}}. \tag{5.16}$$

Докажем теперь по индукции более общее тождество.

Лемма 5.2. *Для каждого $n = 2,\ldots,N-1$ при фиксированном N*

$$[W^{(n)}_{\{\alpha_n,\ldots,\alpha_{N-1}\}}, W^{(n)}_{\{\beta_n,\ldots,\beta_{N-1}\}}] = W^{(n-1)}_{\{\alpha_n,\ldots,\alpha_{N-1},\beta_{N-1}\}}W^{(n+1)}_{\{\beta_n,\ldots,\beta_{N-2}\}}. \tag{5.17}$$

Доказательство. Доказательство строится для каждого значения N - размерности эрмитова пространства, исходя из следующих очевидных тождеств, связанных со свойствами определителей Вронского и $(N-n)$-векторов $W^{(n)}_{\{\alpha_n,\alpha_{n+1},\ldots,\alpha_{N-1}\}}$:

$$W^{(n)}_{\{\alpha_n,\alpha_{n+1},\ldots,\alpha_{N-1}\}} = -\psi^{[n-2]}_{\alpha_{n-1}}\frac{d}{dz}W^{(n-1)}_{\{\alpha_{n-1},\alpha_n,\alpha_{n+1},\ldots,\alpha_{N-1}\}},$$

$$\frac{d}{dz}W^{(n)}_{\{\alpha_n,\alpha_{n+1},\ldots,\alpha_{N-1}\}} = \psi^{[n]}_{\alpha_{n-1}}W^{(n-1)}_{\{\alpha_{n-1},\alpha_n,\alpha_{n+1},\ldots,\alpha_{N-1}\}}, \tag{5.18}$$

$$W^{(n)}_{\{\alpha_n,\alpha_{n+1},\ldots,\alpha_{N-1}\}}\psi^{[k]}_{\alpha_n}=0,\ k=0,\ldots,n-1,$$
$$W^{(n)}_{\{\alpha_n,\alpha_{n+1},\ldots,\alpha_{N-1}\}}\psi^{[n]}_{\alpha_n}=W^{(n+1)}_{\{\alpha_{n+1},\ldots,\alpha_{N-1}\}}.$$

Здесь и далее предполагается суммирование по повторяющемуся нижнему индексу.

В силу (5.16) для любого N формула (5.17) справедлива при n=1. Пусть для номера $n-1$ равенство (5.17) выполнено, тогда в силу (5.18)

$$\begin{aligned}
&[W^{(n)}_{\{\alpha_n,\ldots,\alpha_{N-1}\}},W^{(n)}_{\{\beta_n,\ldots,\beta_{N-1}\}}]=\\
&=[W^{(n-1)}_{\{\alpha_{n-1},\alpha_n\ldots,\alpha_{N-1}\}},W^{(n-1)}_{\{\beta_{n-1},\ldots,\beta_{N-1}\}}](\psi^{[n-2]}_{\alpha_{n-1}}\psi^{[n]}_{\beta_{n-1}}+\psi^{[n-2]}_{\beta_{n-1}}\psi^{[n]}_{\alpha_{n-1}})=\\
&=W^{(n-2)}_{\{\alpha_{n-1},\alpha_n\ldots,\alpha_{N-1}\beta_{N-1}\}}\cdot W^{(n)}_{\{\beta_{n-1},\ldots,\beta_{N-2}\}}\psi^{[n-2]}_{\alpha_{n-1}}\psi^{[n]}_{\beta_{n-1}}=\\
&=W^{(n-1)}_{\{\alpha_n\ldots,\alpha_{N-1},\beta_{N-1}\}}W^{(n+1)}_{\{\beta_n\ldots,\beta_{N-2}\}}
\end{aligned}\tag{5.19}$$

и равенство (5.17) оказывается выполненным для номера n. Тогда по индукции равенство (5.17) справедливо для произвольного n.

Обозначим теперь

$$\begin{aligned}
&H_{(n)}=\frac{1}{(N-n)!}\sum_{\alpha_n,\ldots,\alpha_{N-1}}W^{(n)}_{\alpha_n,\ldots,\alpha_{N-1}}(z)W^{(n)\alpha_n,\ldots,\alpha_{N-1}}(\bar z),\\
&H_{(0)}=1,\quad H_{(N)}=W^{(N)}(z)\bar W^{(N)}(\bar z),\\
&n=1,\ldots,N-1.
\end{aligned}\tag{5.20}$$

Используя леммы 1 и 2, можно теперь доказать следующую теорему.

Теорема 5.1 *При произвольных линейно-независимых и $N-1$ раз дифференцируемых функциях $\psi_i(z)$ функции $H_{(n)}$, определенные в соответствие с (5.20), удовлетворяют тождествам*

$$\begin{aligned}
&\Delta\ln H_{(n)}=\frac{H_{(n-1)}H_{(n+1)}}{H^2_{(n)}},\\
&\Delta\ln H_{(0)}=0,\ \Delta\ln H_{(N)}=0,\\
&n=1,\ldots,N-1.
\end{aligned}\tag{5.21}$$

Доказательство. В силу леммы 1

$$H^2_{(n)}\Delta\ln H_{(n)}=\frac{1}{(N-n-1)!(N-n+1)!}\times$$
$$\times\sum_{\{\alpha_n,\ldots,\alpha_{N-1}\}\{\beta_n,\ldots,\beta_{N-1}\}}[W^{(n)}_{\{\alpha_n,\ldots,\alpha_{N-1}\}},W^{(n)}_{\{\beta_n,\ldots,\beta_{N-1}\}}]\times$$

$$
\begin{aligned}
&\times[W^{(n)\{\alpha_n,\dots,\alpha_{N-1}\}}, W^{(n)\{\beta_n,\dots,\beta_{N-1}\}}] = \\
&= \frac{1}{(N-n-1)!(N-n+1)!} \times \\
&\times \sum_{\{\alpha_n,\dots,\alpha_{N-1}\}\{\beta_n,\dots,\beta_{N-1}\}} W^{(n-1)}_{\{\alpha_n,\dots,\alpha_{N-1},\beta_{N-1}\}} W^{(n+1)}_{\{\beta_n,\dots,\beta_{N-2}\}} \times \\
&\times W^{(n-1)\{\alpha_n,\dots,\alpha_{N-1},\beta_{N-1}\}} W^{(n+1)\{\beta_n,\dots,\beta_{N-2}\}} = \\
&H_{(n-1)} H_{(n+1)}.
\end{aligned}
$$

Что и требовалось доказать. Множитель $[(N-n)!(N-n)!]^{-1}$ здесь заменяется множителем $[(N-n+1)!(N-n-1)!]^{-1}$ поскольку число неодинаковых элементов в суммах уменьшается в $[(N-n)/(N-n+1)]^{-1}$ раз.

Вводя обозначения $\Phi_n = \ln H_{(n)}$, систему соотношений (5.21) можно записать в форме ДЦТ (5.4) или (5.5).

5.2 Некоторые обобщения и дополнения

Заметим, что эту систему можно обобщить, если доопределить функцию $H_{(0)}$, положив

$$H_{(0)} = \Psi_0(z)\Psi_0(\bar{z}),\ \Delta\ln H_{(0)} = 0$$

(в отсутствие у $\Psi_0(z)$ нулей и полюсов). Если в этом случае вместо $H_{(1)}$ в цепочке использовать функцию $\tilde{H}_{(1)} = H_{(0)}^{1/2} H_{(1)}$, то уравнение для $\tilde{H}_{(1)}$ будет иметь стандартный вид:

$$\Delta\ln\tilde{H}_{(1)} = \frac{H_{(0)}H_{(2)}}{\tilde{H}^2_{(1)}}.$$

В этом случае получаем "незамкнутую" цепочку Тоды со "свободными концами". Использование здесь термина ДЦТ "со свободными концами" оправдывается тем, что на концах цепочки в этом случае правые части уравнений (условно "силы") обращаются в ноль.

Для того, чтобы получить теперь "незамкнутую" цепочку Тоды с "несвободными концами" необходимо из последовательности функций $\left\{\Phi_{(n)}\right\}_{n=0}^{N}$ удалить функции $\Phi_{(0)}$ и $\Phi_{(N)}$. Для этого в уравнениях (5.21) достаточно положить $H_{(N)} = 1$ ($H_{(0)} = 1$ - по построению). Это эквивалентно условию $W^{(N)} = 1$, что соответствует требованию, что функции $\psi_i(z)$ являются линейно-независимыми решениями одного линейного обыкновенного дифференциального уравнения порядка N общего вида согласно (5.18).

Сделаем также следующие полезные дополнения. Во-первых, поскольку данный результат получен для произвольной совокупности $N-1$-раз дифференцируемых функций $\psi_\alpha(z)$, то решения уравнений ДЦТ, полученные с помощью линейных их комбинаций с постоянными коэффициентами $v_{\alpha\beta}$:

$$\psi_\alpha(z) = \sum_{\beta=1}^{N} v_{\alpha\beta}\phi_\beta, \quad v_{\alpha\beta} = const$$

вновь будут решениями ДЦТ с новой эрмитовой матрицей $\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{VhV}^+$, осуществляющей подъем индексов. Здесь $\mathbf{V} = (v_{\alpha\beta})$, а $\mathbf{h}$ - "старая" матрица.

Во-вторых, если не требовать действительности $H_{(n)}$, то в качестве квадратичной формы (5.6) можно рассматривать произвольную (не эрмитову) комплексную форму с постоянной матрицей $\mathbf{h}$, осуществляющей подъем индексов. В этом случае можно вместо сопряженной кривой $\bar{\mathbf{\Psi}} = \bar{\mathbf{\Psi}}(\bar{z})$рассматривать произвольную кривую, параметром которой является параметр $\bar{z}$, сопряженный z. В этом случае общий вид функций $H_{(n)}$ определяется формулой:

$$H_{(n)} = \frac{1}{(N-n)!}\sum_{\alpha_n,\ldots,\alpha_{N-1}} W^{(n)}_{\alpha_n,\ldots,\alpha_{N-1}}(z)V^{(n)\alpha_n,\ldots,\alpha_{N-1}}(\bar{z}), \qquad (5.22)$$

где $V^{(n)}_{\alpha_n,\ldots,\alpha_{N-1}}(\bar{z})$ определено с помощью соотношений (5.7) и (5.8) для другого набора N линейно-независимых функций $\phi_i(\bar{z}) \in \mathbf{C}^N$, вообще говоря, отличных от $\bar{\psi}_i(z)$.

Примером такого обобщения являются решения следующей комплексной системы:

$$\Delta\Phi = qe^{-2\Phi+\Phi^*}, \;\; \Delta\Phi^* = q^*e^{-2\Phi^*+\Phi} \qquad (5.23)$$

в размерности $N = 3$ и системы

$$\Delta\Phi = qe^{-2\Phi}, \;\; \Delta\Phi^* = q^*e^{-2\Phi^*} \qquad (5.24)$$

в размерности $N = 2$. Эти системы эквивалентны следующим действительным системам уравнений

$$\Delta u = |q|e^{-u}\cos 3v, \;\; \Delta v = |q|e^{-u}\sin 3v \qquad (5.25)$$

для $N=3$ и

$$\Delta u = |q| e^{-2u} \cos 2v, \quad \Delta v = |q| e^{-2u} \sin 2v \tag{5.26}$$

для $N=2$. Здесь

$$u = \mathrm{Re}\{\Phi\} + \frac{i}{2} \ln \left(\frac{q^*}{q}\right), \ v = \mathrm{Im}\{\Phi\}.$$

Решения (5.23) можно представить в виде:

$$\Phi(z, \bar{z}) = \ln \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} h_{\alpha\beta} \psi_\alpha(z) \phi_\alpha(\bar{z}) + \ln[Q(z)P(\bar{z})],$$

где

$$\phi_1(\bar{z}) = [\psi_2(\bar{z}), \psi_3(\bar{z})], \quad \phi_2(\bar{z}) = [\psi_3(\bar{z}), \psi_1(\bar{z})], \quad \phi_3(\bar{z}) = [\psi_1(\bar{z}), \psi_2(\bar{z})],$$

матрица $\mathbf{h} = \mathrm{diag}\{h_1, h_2, h_3\}$ - произвольная диагональная комплексная матрица, $q = \det \mathbf{h}$. Функции ψ_α произвольны, а $Q_3(z)$ и $P_3(\bar{z})$ имеют вид:

$$P_3(\bar{z}) = W_3^{*-2/3}(\bar{z}), \quad Q_3(z) = W_3^{-1/3}(z),$$

причем

$$W_3(z) = \det \begin{pmatrix} \psi_2 & \psi_2' & \psi_2'' \\ \psi_3 & \psi_3' & \psi_3'' \\ \psi_4 & \psi_4' & \psi_4'' \end{pmatrix}.$$

Решения (5.24) имеют следующий вид:

$$\Phi(z, \bar{z}) = \ln \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} h_{\alpha\beta} \psi_\alpha(z) \phi_\alpha(\bar{z}) + \ln[Q_2(z)P_2(\bar{z})]$$

где функции $\psi_\alpha(z)$ и $\phi_\alpha(\bar{z})$ произвольны, а $P_2(\bar{z})$ и $Q_2(z)$ определяются соотношениями:

$$Q_2(z) = [\psi_1(z), \psi_2(z)]^{-1/2}, \quad P_2(\bar{z}) = [\psi_1(\bar{z}), \psi_2(\bar{z})]^{-1/2}.$$

Рассмотренное комплексное продолжение ДЦТ указывает на то, что полученные решения могут быть распространены на случай двумеризованных цепочек Тоды с оператором Д'Аламбера. В этом случае $H_{(n)}$ представляются в виде (5.22) с заменой переменных $z = x + y$, $\bar{z} = x - y$. Для действительности решений достаточно функции $\psi_\alpha(z)$ и $\phi_\alpha(\bar{z})$ выбрать действительными. В отличие от конструкции с оператором Лапласа в данном случае все соотношения определены для пары произвольных действительных кривых в $\mathbf{R}^N$.

5.3 Периодические цепочки Тоды

Рассмотрим теперь вопрос о редукции полученных цепочек общего вида (5.21) и реализацией этих редукций с помощью алгебр Ли специального вида.

Периодической или "замкнутой" цепочкой Тоды называется цепочка, удовлетворяющая условию

$$\Phi_1 = \Phi_{N-1}$$

для цепочки с несвободными концами и условию

$$\Phi_0 = \Phi_N$$

в случае цепочки со свободными концами. Очевидно эти соотношения эквивалентны соответственно условиям

$$H_{(1)} = H_{(N-1)}, \quad H_{(0)} = H_{(N)}.$$

В случае цепочки со свободными концами условие периодичности сводится к двум нелинейным обыкновенным дифференциальным уравнениям $\psi_0(z) = W^{(N)}(z)$, $\phi_0(\bar{z}) = V^{(N)}(\bar{z})$ порядка $N-1$.

В случае задачи с несвободными концами задача оказывается сложней. Поскольку компоненты квадратичных форм для H_1 и H_{N-1} представляются соответственно N-1-векторами и 1-векторами в $\mathbf{F}^N$, то условие периодичности можно выразить в виде двух систем N нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений $N-2$ порядка:

$$\sum_{\beta=1}^{N} u_{\beta\alpha}\psi_\beta(z) = W_\alpha^{(N-1)}(z), \quad \sum_{\beta=1}^{N} v^{\beta\alpha}\phi^\beta(\bar{z}) = V^{(N-1)\alpha}(\bar{z}),$$

где $u_{\beta\alpha}$ и $v^{\beta\alpha}$ - элементы матриц $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$, удовлетворяющих условию

$$\mathbf{U}\mathbf{V}^T = \mathbf{I}. \tag{5.27}$$

Здесь $\mathbf{I}$ - единичная матрица размерности $N \times N$, а $\mathbf{V}^T$ означает матрицу, транспонированную к матрице $\mathbf{V}$. В случае оператора Лапласа для действительных решений условие (5.27) превращается в требование унитарности матрицы $\mathbf{U}$, поскольку требование действительности решений сводится к требованию $\mathbf{U} = \mathbf{V}^*$. Ранг каждой из этих двух систем зависит от выбора матриц $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$. Поскольку

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \psi_\alpha^{[k]}(z) W_\alpha^{(N-1)}(z) = 0, \ \sum_{\alpha=1}^{N} \phi^{[k]\alpha}(\bar{z}) V^{(N-1)\alpha}(\bar{z}) = 0, \tag{5.28}$$

$$k = 0, \ldots, N-2,$$

то первые $N-1$ уравнений сводятся к соотношениям вида

$$\sum_{\alpha=1}^{N} u_{\alpha\beta}\psi_\alpha(z)\psi_\beta^{[k]}(z)=0,\ \sum_{\alpha=1}^{N} v^{\alpha\beta}\phi^\alpha(z)\phi^{[k]\beta}(z)=0,\ k=0,\ldots,N-2$$

часть из которых является линейно-зависимыми. Поэтому ранг этой системы выбором матриц $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ может быть сделан меньше $N-1$.

Приведем несколько простых примеров. В случае $N=3$ условие периодичности при $\mathbf{U}=\mathbf{I}$ эквивалентно требованию, что вектор $\Psi=(\psi_1,\psi_2,\psi_3)$ имеет нулевую “длину”:

$$\psi_1^2+\psi_2^2+\psi_3^2=0.$$

Отсюда легко получить решения:

$$\begin{aligned}
&\psi_1=i\psi_3\cos\theta(z);\ \psi_2=i\psi_3\sin\theta(z),\\
&\theta'(z)=-1/\psi_3(z),\\
&(\phi^1)^2+(\phi^2)^2+(\phi^3)2=0;\ \phi^1=i\phi^3\cos\xi(\bar z);\ \phi^2=i\phi^3\sin\xi(\bar z),\\
&\xi'(\bar z)=-1/\phi^3(\bar z),
\end{aligned}\tag{5.29}$$

где $\psi_3(z)$ и $\phi^3(\bar z)$ - произвольные функции z и $\bar z$. Это приводит вновь к уравнению Лиувилля, а его решения, соответствующие этому случаю, можно записать в виде:

$$\Phi(z,\bar z)=\ln(\psi_3(z)\phi_3(\bar z))+\ln(1+\sin\theta(z)\sin\xi(\bar z)+\cos\theta(z)\cos\xi(\bar z)).$$

Для действительных решений (случай оператора Лапласа) $(\theta(z))^*=\xi(\bar z),\ \phi_3(\bar z)=(\psi_3(z))^*$ и решение можно записать в виде

$$\Phi(z,\bar z)=-\ln|\theta'(z)|^2+\ln\left(1+\cos(\theta(z)-\theta(\bar z))\right).$$

В случае $N=4$ условия периодичности оказываются более разнообразными. При $\mathbf{U}=\mathbf{I}$ условию периодичности невозможно удовлетворить. Однако в случае простейшей кососимметрической унитарной матрицы

$$\mathbf{U}=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

сводится к двум уравнениям относительно функций $\psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_4$:

$$[\psi_1,\psi_4]=-[\psi_2,\psi_3],\ \psi_4=-det\begin{pmatrix}\psi_2&\psi_2'&\psi_2''\\\psi_3&\psi_3'&\psi_3''\\\psi_4&\psi_4'&\psi_4''\end{pmatrix}.\tag{5.30}$$

Еще одним типом редукций ДЦТ является редукция к уравнениям типа Sh-Gordon: $u_{z\bar{z}} = \mathrm{sh}(u)$. Общий вид этой редукции имеет вид требований $G_{n+1} = -G_n, \;\; G_n = -G_{n-1}$, выполняющихся при некотором $0 < n < N$. Отсюда при данном n: $\Phi_{n+1} = \Phi_{n-1}, \;\Phi_n = \Phi_{n-2}$, или окончательно

$$H_{(n+1)} = H_{(n-1)},\; H_{(n)} = H_{(n-2)}.$$

Как уже отмечалось выше, впервые решения в форме квадратичных форм были найдены в работе [86] (см. также [41]). В этих работах квадратичные формы появились как результат определенной редукции более общего по форме решения, получаемого с помощью МОЗР. Однако, и это было показано в данной главе, такое представление может быть найдено и независимо от МОЗР. Более того, метод квадратичных форм дает решения, зависящие от функциональных параметров - компонент вектора $\Psi(z)$, общего функционального вида, что в рамках стандартного МОЗР получить невозможно. В результате частное решение, полученное в [86, 41], с помощью метода квадратичных форм приобретает более широкий смысл и значительно более удобно для построения решений ДЦТ для различных типов их замыканий. Оказывается, этот метод может быть теперь распространен и на системы, которые не интегрируются с помощью МОЗР. В первую очередь это относится к многомерным уравнениям типа Лиувилля и многомеризованным цепочкам Тоды, к изучению которых мы приступаем в следующей главе.

Глава 6

Точные решения многомерных уравнений Лиувилля в классе n-форм

Существуют области физики, в которых использование МОЗР в исследовании поведения волновых процессов затруднено в силу их диссипативного характера. Например, к таким ситуациям относятся автоволновые процессы в средах с диффузией. В работах [111, 112] был предложен класс моделей нелинейных волновых процессов в двумерных активных средах с диффузией, допускающих точные решения. Модели такого рода, имеющие размерность 1+2, представляют собой обобщение двумеризованных цепочек Тоды на случай двумерных диффузионных процессов и могут быть названы диффузионными цепочками Тоды (ДфЦТ). Однако следует заметить, что ДфЦТ естественным образом обобщаются на случай процессов, описывающихся не только уравнениями с диффузионным оператором, но и с параболическим волновым оператором Шредингера, что важно для прикладных задач в нелинейной оптике и, возможно, в квантовой механике. Класс точных решений, полученный в работах [111, 112] для ДфЦТ является естественным обобщением решений двумеризованных цепочек Тоды (ДЦТ) [41] и уравнения Лиувилля [23] в форме двумерной эрмитовой формы. Полезность ДфЦТ для описания волн в двумерных средах с диффузией заставляет искать обобщения развитого подхода на случай моделей с координатным пространством, большим 2.

Первым шагом реализации программы построения многомерных моделей ДфЦТ и их аналогов с другим типом операторов (например, Шредингера или оператором телеграфного уравнения), по аналогии с двумерным случаем, является исследование многомерных уравнений Лиувилля и многомеризованных цепочек Тоды с операторами Лапласа и Д'Аламбера в случае размерности $d > 2$. Такие уравнения представляют интерес и сами по себе, например, как частные случаи уравнений Клейна-Гордона, которые играют важную роль в современной теории поля. Примером может служить и уравнение Лиувилля в трехмерном пространстве, которое описывает статические изотермические конфигурации самогравитирующего идеального газа, находящегося в термодинамическом равновесии, подчиняющемся распределению Больцмана. Уравнения такого рода встречаются в эйнштейновской теории гравитационного поля с материей в форме самогравитирующего самодействующего скалярного поля и т.п.

В настоящей работе предлагается подход к построению точных решений таких уравнений в размерности пространства-времени $d = 3, 4$ и выше, основанный на идее использования квадратичных форм в случае $d = 2$. Обобщение этой идеи на многомерный случай состоит в специальном представлении операторов Лапласа и Д'Аламбера в d-мерном координатном пространстве, которое называется ниже внедиагональным, и записи решений уравнений Лиувилля в виде форм степени d от набора функций, зависящих специальным образом от координатных переменных.

6.1 Внедиагональное представление операторов Д'Аламбера и Лапласа

Основная идея, на которой базируется метод квадратичных форм в теории двумеризованных цепочек Тоды, предложенный в [111], состоит в том, что двумерные операторы Лапласа и Д'Аламбера могут быть с помощью подходящей замены координат представлены в виде смешанной второй производной

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}, \quad \diamond = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}.$$

Здесь $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, $\xi = x + y$, $\eta = x - y$. Именно существование такого представления приводит к основному тождеству для квадратичных форм

$$\Psi(z, \bar{z}) = \sum_{i=1}^{N} a_i |\psi_i^2|,$$

которое можно записать в виде

$$\Delta \ln \Psi = \frac{W}{\Psi^2}, \tag{6.1}$$

где

$$W(z,\bar z) = \sum_{i<j=1}^{N} a_i a_j |w_{ij}^2|, \quad w_{ij}(z) = \psi_i(z)\frac{d}{dz}\psi_j(z) - \psi_j(z)\frac{d}{dz}\psi_1(z).$$

Например, в случае $N = 2$

$$\Psi(z,\bar z) = a_1|\psi_1|^2 + a_2|\psi_2|^2, \quad W(z,\bar z) = a_1 a_2 |w_{12}|^2.$$

Возможность использовать данное тождество (6.1) в многомерных задачах состоит в существовании специального выбора системы координат, при котором операторы Лапласа и Д'Аламбера имеют вид, который имеет смысл назвать внедиагональным. Будем называть внедиагональным такое представление операторов Лапласа и Д'Аламбера, при которых они имеют вид суммы смешанных производных координат

$$\Delta = \varepsilon_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \varepsilon_n \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} = \sum_{i<j}^{N} \gamma_{ij} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j}. \tag{6.2}$$

Здесь

$$z_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \tag{6.3}$$

а a_{ij} - коэффициенты некоторого линейного преобразования координат $x \xrightarrow{\xi} z$, γ_{ij} - матрица постоянных коэффициентов с нулевой диагональю $\gamma_{ii} = 0,\ i = 1, \ldots, n$. Очевидно, что в случае размерности пространства $n > 2$ внедиагональное представление является неоднозначным. Для того, чтобы получить такое представление, необходимо потребовать выполнения $n(n-1)/2$ условий на n^2 коэффициентов a_{ij} преобразования $x \xrightarrow{\xi} z$ (6.3). Эти условия имеют следующий вид:

$$\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j a_{ij} a_{kj} = \gamma_{ik}, \quad i, j, k = 1, \ldots, n.$$

В силу свойств матрицы γ_{ij} эти соотношения для каждого $i = k$ имеют вид:

$$\varepsilon_1 (a_{i1})^2 + \varepsilon_2 (a_{i2})^2 + \ldots + \varepsilon_n (a_{in})^2 = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Из последних соотношений следует, что для оператора Лапласа (т.е. все $\varepsilon_i = +1$) для каждого номера i среди чисел a_{ij} должно быть хотя бы одно комплексное, и, следовательно, все координаты z_i - комплексные. Комплексность координат z_i для операторов Лапласа фактически увеличивает реальную размерность координатного пространства задачи, которую необходимо понижать специальным требованием действительности решений, что важно с точки зрения физических приложений. Поэтому случай уравнений Лиувилля с оператором Лапласа будет рассмотрен отдельно в заключительной части данной работы.

6.2 Уравнение Лиувилля с оператором Д'Аламбера в размерности $d = 3$

Для того, чтобы описать процедуру построения точных решений, в качестве примера рассмотрим уравнение Лиувилля с оператором Д'Аламбера в пространстве-времени размерности $n = 3, 4$. Это уравнение имеет вид:

$$\diamond\Phi(t, x, y) = \Omega_0 \exp\{-2\Phi\}, \tag{6.4}$$

где Ω_0 - некоторая постоянная. С помощью преобразования

$$z_1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{\sqrt{3}}(t + y), \quad z_2 = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{\sqrt{3}}(t - 2y), \quad z_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(t + y)$$

представим оператор Д'Аламбера в пространстве R^3 в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2 \partial z_3} + \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_3}. \tag{6.5}$$

Будем искать решение уравнения (6.4) в следующем виде:

$$\Phi(t, x, y) = \ln\left\{\frac{\Psi(z_1, z_2, z_3)}{\sqrt{U_{12}(z_1)V_{12}(z_2)W_{12}(z_3)}}\right\}, \tag{6.6}$$

$$\begin{aligned} \Psi(z_1, z_2, z_3) &= \psi_1(z_1)\phi_1(z_2)[a\chi_1(z_3) + b\chi_2(z_3)] + \\ &+\psi_2(z_1)\phi_2(z_2)[c\chi_1(z_3) + d\chi_2(z_3)] + \\ &+\psi_1(z_1)\phi_2(z_2)\left[p\chi_1(z_3) + q\chi_2(z_3)\right] + \\ &\psi_2(z_1)\phi_1(z_2)\left[r\chi_1(z_3) + s\chi_2(z_3)\right], \end{aligned} \tag{6.7}$$

$$U_{12}(z_1) = \psi_1 \frac{\partial}{\partial z_1}\psi_2 - \psi_2 \frac{\partial}{\partial z_1}\psi_1, \tag{6.8}$$

$$V_{12}(z_2) = \phi_1 \frac{\partial}{\partial z2}\phi_2 - \phi_2 \frac{\partial}{\partial z_2}\phi_1, \tag{6.9}$$

$$W_{12}(z_3) = \chi_1 \frac{\partial}{\partial z_3}\chi_2 - \chi_2 \frac{\partial}{\partial z_3}\chi_1. \tag{6.10}$$

Как следует из (6.7), функция Ψ представляет собой кубическую форму в двумерном векторном пространстве $\mathbf{R}^2$, в котором пары функций $\psi_\alpha, \phi_\alpha, \chi_\alpha, \alpha = 1, 2$, параметрически зависящие от соответствующих координат z_1, z_2, z_3, являются компонентами трех векторов $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3$. Параметрическая зависимость этих трех векторов от координат задает в $\mathbf{R}^2$ три кривые:

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_1(z_1), \quad \mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_2(z_2), \quad \mathbf{R}_3 = \mathbf{R}_3(z_3),$$

свойства которых и определяют вид решения. Вычисляя результат действия оператора $\diamond$ на функцию Φ, получаем

$$\diamond\Phi = \frac{U_{12}V_{12}W_{12}}{\Psi^2}\left\{\frac{Q_1(z_1)}{U_{12}(z_1)} + \frac{Q_2(z_2)}{V_{12}(z_2)} + \frac{Q_3(z_3)}{W_{12}(z_3)}\right\}, \tag{6.11}$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
&Q_1(z_1) = A_1\psi_1^2 + B_1\psi_2^2 + C_1\psi_1\psi_2,\\
&Q_2(z_2) = A_2\phi_1^2 + B_2\phi_2^2 + C_2\phi_1\phi_2,\\
&Q_3(z_3) = A_3\chi_1^2 + B_3\chi_2^2 + C_3\chi_1\chi_2,\\
&A_1 = ac - qr, \quad B_1 = bd - qs, \quad C_1 = ad - ps + bc - qr,\\
&A_2 = as - bp, \quad B_2 = pd - qc, \quad C_2 = ad + ps - bc - qr,\\
&A_3 = aq - bp, \quad B_3 = pd - sc, \quad C_3 = ad - ps - bc + qr.
\end{aligned} \tag{6.12}$$

Утверждение 6.1. *Уравнение Лиувилля (6.4) в размерности $d = 3$ с оператором Д'Аламбера (6.5) имеет класс точных решений в форме (6.6), в которой коэффициенты кубической формы (6.7) удовлетворяют соотношениям (6.12) при выполнении следующих условий*

$$\frac{Q_1(z_1)}{U_{12}(z_1)} = \lambda_1 = \mathrm{const}, \quad \frac{Q_2(z_2)}{V_{12}(z_2)} = \lambda_2 = \mathrm{const}, \quad \frac{Q_3(z_3)}{W_{12}(z_3)} = \lambda_3 = \mathrm{const}, \tag{6.13}$$

где постоянные $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ связаны одним соотношением

$$\Omega_0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3. \tag{6.14}$$

Доказательство. Соотношения (6.13) и (6.14) являются достаточными условиями, при которых правая часть тождества (6.11) может быть записана в форме

$$\frac{U_{12}V_{12}W_{12}}{\Psi^2}\left\{\frac{Q_1(z_1)}{U_{12}(z_1)}+\frac{Q_2(z_2)}{V_{12}(z_2)}+\frac{Q_3(z_3)}{W_{12}(z_3)}\right\}=$$
$$=(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\frac{U_{12}V_{12}W_{12}}{\Psi^2}=\Omega_0 e^{-2\Phi}.$$

В результате тождество (6.11) имеет вид уравнения (6.4). Найдем конкретный вид решений (6.6). Уравнения (6.13) представляют собой однотипные дифференциальные уравнения относительно функций $\psi_1,\ \psi_2,\ \phi_1,\ \phi_2,\ \chi_1,\ \chi_2,$. Например, для функций $\psi_1,\ \psi_2$ имеем

$$\psi_1\psi_2'-\psi_1\psi_2'=\frac{1}{\lambda_1}(A_2\psi_1^2+B_2\psi_2^2+C_2\psi_1\psi_2). \qquad (6.15)$$

Это уравнение после подстановки $u(z_1)=\psi_2(z_1)/\psi_1(z_1)$ принимает следующий вид:

$$u'=\frac{1}{\lambda_1}(A_1+B_1u^2+C_1u).$$

Обозначим корни квадратного алгебраического уравнения

$$A_1+B_1u^2+C_1u=0 \qquad (6.16)$$

через u_1 и u_2:

$$u_1=-\frac{C_1-\sqrt{C_1^2-4A_1B_1}}{2B_1},\quad u_2=-\frac{C_1+\sqrt{C_1^2-4A_1B_1}}{2B_1}. \qquad (6.17)$$

Тогда решение имеет вид

$$u(z_1)=\frac{u_1+u_2q_1\exp\{\mu_1z_1\}}{1+q_1\exp\{\mu_1z_1\}}=(u_2-u_1)\,\mathrm{th}\left(\frac{\mu_1z_1}{2}+\xi_1\right)+(u_1+u_2), \quad (6.18)$$

где q_1 - произвольная постоянная, а $\mu_1=\dfrac{u_2-u_1}{\lambda_1}$. Аналогичные решения получаются для функций $v(z_2)=\phi_2(z_2)/\phi_1(z_2)$ и $w(z_3)=\chi_2(z_3)/\chi_1(z_3)$:

$$v(z_2)=\frac{v_1+v_2q_2\exp\{\mu_2z_2\}}{1+q_2\exp\{\mu_2z_2\}}=$$
$$=(v_2-v_1)\,\mathrm{th}\left(\frac{\mu_2z_2}{2}+\xi_2\right)+(v_1+v_2), \qquad (6.19)$$

$$w(z_3)=\frac{w_1+w_2q_3\exp\{\mu_3z_3\}}{1+q_3\exp\{\mu_3z_3\}}=$$
$$=(w_2-w_1)\,\mathrm{th}\left(\frac{\mu_3z_2}{2}+\xi_3\right)+(w_1+w_2), \quad (6.20)$$

где q_2, q_3 - произвольные постоянные, $\xi_i = \ln\sqrt{q_i}$, v_1, v_2 и w_1, w_2 - корни квадратных уравнений

$$A_2 + B_2 v^2 + C_2 v = 0, \quad A_3 + B_3 w^2 + C_3 w = 0, \tag{6.21}$$

соответственно,

$$\mu_2 = \frac{v_2 - v_1}{\lambda_2}, \quad \mu_3 = \frac{w_2 - w_1}{\lambda_3}. \tag{6.22}$$

Окончательно получаем выражение для Ψ в виде:

$$\Psi(z_1, z_2, z_3) = \psi_2(z_1)\phi_2(z_2)\chi_2(z_3)[au(z_1)v(z_2)w(z_3) + bu(z_1)v(z_2) +$$
$$+pu(z_1)w(z_3) + rv(z_2)w(z_3) + cw(z_3) + qu(z_1) + sv(z_2) + d].$$

После подстановки этого выражения в (6.6) решение для Φ (6.7) не будет содержать произвольных функций $\psi_2(z_1)$, $\phi_2(z_2)$, $\chi_2(z_3)$ и будет выражаться только через функции $u(z_1), v(z_2), w(z_3)$.

6.3 Уравнение Д'Аламбера в размерности $d = 3$

Заметим, что вместе с построением класса точных решений уравнений Лиувилля получено специальное представление для решений уравнения Д'Аламбера.

Утверждение 6.2. *Уравнение Д'Аламбера*

$$\diamond\Phi = 0 \tag{6.23}$$

имеет класс решений, которые представимы в виде

$$\Phi = \sum_{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0} C(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \ln\left\{\frac{\Psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, z_1, z_2, z_3)}{\sqrt{U_{12}(\lambda_1, z_1)V_{12}(\lambda_2, z_2)W_{12}(\lambda_3, z_3)}}\right\}, \tag{6.24}$$

либо в более простой форме

$$\Phi = \sum_{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0} C(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \ln\left\{\Psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, z_1, z_2, z_3)\right\}, \tag{6.25}$$

где в обоих случаях $C(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ - произвольные комплексные постоянные и для каждой тройки комплексных чисел λ_1, λ_2 λ_3, удовлетворяющих условию

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0. \tag{6.26}$$

При этом функция $\Psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, z_1, z_2, z_3)$ имеет вид кубической формы (6.7) относительно функций $\psi_1(z_1), \phi_1(z_2), \chi_1(z_3), \psi_2(z_1), \phi_2(z_2), \chi_2(z_3)$

удовлетворяющих условиям (6.13), с коэффициентами, удовлетворяющими (6.12).

Полученные решения для уравнения Д'Аламбера представляют собой разложение решений в ряд по негармоническим волнам, имеющим несколько основных форм. В случае действительности $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$, а также u_i, v_i, w_i функции $\psi_i,\ \phi_i,\ \chi_i$ имеют форму "кинков". При сохранении условий действительности эти общие свойства сохраняются и у каждого из элементов суммы (6.25). В случае комплексности постоянных $\lambda_1,\ \lambda_2\ \lambda_3$ поведение отдельных элементов сумм в (6.24) и (6.25) может быть достаточно сложным. Заметим также, что суммы в (6.24) и (6.25) могут быть модифицированы дифференцированием по координатам и ее числовым параметрам. В результате могут быть получены решения уравнения Д'Аламбера (6.23) в форме рядов с более общим видом элементов сумм и специальными свойствами.

6.4 Обобщенные решения уравнения Лиувилля

Более общие решения могут быть получены следующими двумя способами. Первый из них состоит в возможности отменить одно из условий (6.13), например первое (для функций от z_1). В этом случае решение для Φ можно записать в виде:

$$\Phi = \ln\left\{\frac{\Psi(z_1, z_2, z_3)}{\sqrt{R_1(z_1)U_{12}(z_1)V_{12}(z_2)W_{12}(z_3)}}\right\}, \tag{6.27}$$

где

$$R_1(z_1) = \frac{1}{\Omega_0}\left(\frac{Q_1(z_1)}{U_{12}(z_1)} + \lambda_2 + \lambda_3\right), \tag{6.28}$$

а все остальные функции от z_2, z_3 описываются теми же соотношениями (6.7). Отличие от рассмотренного случая состоит в том, что теперь произвольны функции $\psi_1(z_1),\ \psi_2(z_1)$ и, следовательно, $u(z_1)$, а функции $v(z_2), w(z_3)$ определяются соотношениями (6.19). По аналогии решения этого типа могут быть получены отменой любого другого из условий в (6.13). В каждом из этих случаев решение зависит от одной произвольной функции: либо $u(z_1)$, либо $v(z_2)$, либо $w(z_3)$. С помощью прямой проверки доказывается следующее утверждение.

Утверждение 6.3. *Уравнение Лиувилля (6.4) с оператором Д'Аламбера (6.5) в размерности $d = 3$ имеет класс точных решений в форме (6.27), в которой коэффициенты кубической формы*

(6.7) удовлетворяют соотношениям

$$
\begin{aligned}
&Q_2(z_2) = A_2\phi_1^2 + B_2\phi_2^2 + C_2\phi_1\phi_2\\
&Q_3(z_3) = A_3\chi_1^2 + B_3\chi_2^2 + C_3\chi_1\chi_2,\\
&A_2 = as - bp, \quad B_2 = pd - qc, \quad C_2 = ad + ps - bc - qr,\\
&A_3 = aq - bp, \quad B_3 = pd - sc, \quad C_3 = ad - ps - bc + qr
\end{aligned}
\tag{6.29}
$$

при выполнении (6.28) и условий

$$
\frac{Q_2(z_2)}{V_{12}(z_2)} = \lambda_2 = \mathrm{const}, \quad \frac{Q_3(z_3)}{W_{12}(z_3)} = \lambda_3 = \mathrm{const}, \tag{6.30}
$$

где постоянные λ_2, λ_3 произвольны.

Еще один класс решений параметризуется следующим образом.

Утверждение 6.4. *Уравнение Лиувилля (6.4) с оператором Д'Аламбера (6.5) в размерности $d = 3$ имеет класс точных решений в форме*

$$
\Phi = \ln\left\{\frac{\Psi(z_1, z_2, z_3)}{\sqrt{\Theta(z_1, z_2, z_3)U_{12}(z_1)V_{12}(z_2)W_{12}(z_3)}}\right\}, \tag{6.31}
$$

где $\Theta(z_1, z_2, z_3) = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3$. При этом коэффициенты кубической формы $\Psi(z_1, z_2, z_3)$ (6.7) удовлетворяют тем же соотношениям (6.12), а сами функции ψ_i, ϕ_i, χ_i удовлетворяют новым уравнениям

$$
\frac{Q_1(z_1)}{U_{12}(z_1)} = \lambda_1 z_1, \quad \frac{Q_2(z_2)}{V_{12}(z_2)} = \lambda_2 z_2, \quad \frac{Q_3(z_3)}{W_{12}(z_3)} = \lambda_3 z_3 \tag{6.32}
$$

с постоянными $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, удовлетворяющими соотношению

$$
\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} = 0. \tag{6.33}
$$

Доказательство. В силу условий (6.32) тождество (6.11) примет вид

$$
\diamond \ln\Psi = \frac{\Theta(z_1, z_2, z_3)}{\Psi^2}
$$

Основываясь на легко поверяемом тождестве

$$
\diamond \ln\Theta(z_1, z_2, z_3) = -\frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{\Theta^2(z_1, z_2, z_3)}\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3}\right), \tag{6.34}
$$

выражение в правой части которого обращается тождественно в ноль при условии (6.33), получаем требуемое утверждение.

Для этого класса решения зависят, как и в передыдущем случае, только от функций $u(z_1), v(z_2), w(z_3)$, которые теперь имеют следующий вид

$$u(z_1) = \frac{u_1 - u_2 q_1 z_1^{\mu_1}}{1 - q_1 z_1^{\mu_1}}, \quad v(z_2) = \frac{v_1 - v_2 q_2 z_2^{\mu_2}}{1 - q_2 z_2^{\mu_2}}, \quad w(z_3) = \frac{w_1 - w_2 q_3 z_3^{\mu_3}}{1 - q_3 z_3^{\mu_3}}, \tag{6.35}$$

где все постоянные определяются теми же соотношениями, что и для решений (6.18) и (6.19).

Следствием тождества (6.34) является и следующий результат. Рассмотрим последовательность функций

$$\Theta_a(z_1, z_2, z_3) = f_1^{(a)}(z_1) + f_2^{(a)}(z_2) + f_3^{(a)}(z_3), \quad a = 1, 2, \ldots .$$

В силу тождества (6.34) эти функции удовлетворяют соотношениям

$$\diamond \ln \Theta_a = -\frac{f_1^{(a)'} f_2^{(a)'} f_3^{(a)'}}{\Theta_a^2(z_1, z_2, z_3)} \left(\frac{1}{f_1^{(a)'}} + \frac{1}{f_2^{(a)'}} + \frac{1}{f_3^{(a)'}} \right)$$

Здесь и далее введено обозначение

$$f_k^{(a)'}(z_k) = \frac{d f_k^{(a)}(z_k)}{d z_k}.$$

Отсюда следует

Утверждение 6.5. *Последовательность функций*

$$\Phi_a(z_1, z_2, z_3) = \ln \left[\frac{\Theta_a(z_1, z_2, z_3)}{h_1^{(a)} h_2^{(a)} h_3^{(a)}} \right]$$

удовлетворяет уравнениям цепочки Тоды

$$\diamond \Phi_a = e^{-2\Phi_a + \Phi_{a+1}}, \quad a = 1, 2, \ldots \tag{6.36}$$

в пространстве размерности $d = 3$, *если функции* $f_k^{(a)}(z_k)$ *и* $f_k^{(a)}(z_k)$ *удовлетворяют рекурентной системе обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$f_k^{(a+1)}(z_k) = \frac{1}{f_k^{(a)'}(z_k)}, \quad h_k^{(a+1)}(z_k) = \frac{\left[h_k^{(a)}(z_k) \right]^2}{f_k^{(a)'}(z_k)},$$
$$k = 1, 2, 3; \quad a = 1, 2, \ldots .$$

Цепочка Тоды (6.36) будет конечной, если существует такой номер $a = a_0$, для которого

$$f_k^{(a_0)}(z_k) = const, \quad k = 1, 2, 3$$

для каждого номера $k = 1, 2, 3$. Цепочка будет периодической, если для некоторого номера $a = a_0$ и каждого номера $k = 1, 2, 3$ выполняются уравнения

$$f_k^{(a_0)}(z_k) = f_k^{(1)}(z_k), \quad h_k^{(a_0)}(z_k) = h_k^{(1)}(z_k), \quad k = 1, 2, 3.$$

6.5 Решения уравнений Д'Аламбера и Лиувилля в размерности $d = 4$

Для уравнения Лиувилля в пространстве-времени размерности 4 действительные решения строятся аналогичным образом. Наиболее простое внедиагональное представление оператора Д'Аламбера для $n = 4$ имеет вид:

$$\diamond = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial z_3 \partial z_3^*} + \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2},$$

где $z_3 = (x+iy)/2, z_3^* = (x-iy)/2, z_1 = (z-t)/2, z_2 = (z+t)/2$. Это представление отличается от рассмотренного в предыдущем разделе тем, что число смешанных производных во внедиагональном представлении оператора Д'Аламбера меньше максимального и равно двум. Однако, все основные построения решений аналогичны тем, которые были проведены в размерности $d = 3$. Поскольку точные решения уравнения Лиувилля в размерности $d = 4$ представляют практический интерес, поэтому в данном разделе опишем только сами точные решения, не формулируя результаты в форме утверждений. Соответствующие результаты будут сформулированы в форме утверждений для произвольной конечной размерности в следующем разделе.

Решение следует искать в виде:

$$\Phi(z_1, z_2, z_3, z_3^*) = \ln \left\{ \frac{\Psi(z_1, z_2, z_3, z_3^*)}{\sqrt{U_{12}(z_1) V_{12}(z_2) |W_{12}(z_3)|^2}} \right\}, \tag{6.37}$$

$$\Psi(z_1, z_2, z_3, z_3^*) = \tag{6.38}$$

$$= A(z_1, z_2)|\psi_1|^2 + B(z_1, z_2)|\psi_2|^2 + C(z_1, z_2)\psi_1\psi_2^* + C^*(z_1, z_2)\psi_2\psi_1^* =$$

$$
\begin{aligned}
&= K(z_3,z_3^*)\phi_1\chi_1 + L(z_3,z_3^*)\phi_2\chi_2 - M(z_3,z_3^*)\phi_1\chi_2 + N(z_3,z_3^*)\phi_2\chi_1,\\
&A(z_1,z_2) =\\
&= a_1\phi_1(z_1)\chi_1(z_2) + b_1\phi_2(z_1)\chi_2(z_2) + c_1\phi_1(z_1)\chi_2(z_2) + d_1\phi_2(z_1)\chi_1(z_2),\\
&B(z_1,z_2) =\\
&= a_2\phi_1(z_1)\chi_1(z_2) + b_2\phi_2(z_1)\chi_2(z_2) + c_2\phi_1(z_1)\chi_2(z_2) + d_2\phi_2(z_1)\chi_1(z_2),\\
&C(z_1,z_2) =\\
&= a_3\phi_1(z_1)\chi_1(z_2) + b_3\phi_2(z_1)\chi_2(z_2) + c_3\phi_1(z_1)\chi_2(z_2) + d_3\phi_2(z_1)\chi_1(z_2),\\
&K(z_3,z_3^*) = a_1|\psi_1|^2 + a_2|\psi_2|^2 + a_3\psi_1\psi_2^* + a_3^*\psi_1^*\psi_2,\\
&L(z_3,z_3^*) = b_1|\psi_1|^2 + b_2|\psi_2|^2 + b_3\psi_1\psi_2^* + b_3^*\psi_1^*\psi_2,\\
&M(z_3,z_3^*) = c_1|\psi_1|^2 + c_2|\psi_2|^2 + c_3\psi_1\psi_2^* + c_3^*\psi_1^*\psi_2,\\
&N(z_3,z_3^*) = d_1|\psi_1|^2 + d_2|\psi_2|^2 + d_3\psi_1\psi_2^* + d_3^*\psi_1^*\psi_2.
\end{aligned}
$$

Здесь f^* обозначают комплексно-сопряженные величины к f, числа a_i, b_i, c_i, d_i - действительные для $i = 1, 2$ и комплексные для $i = 3$, функции $\psi_1(z_3), \psi_2(z_3)$ - комплексные, а $\phi_1(z_1), \phi_2(z_1), \chi_1(z_2)\chi_2(z_2)$ - действительные. Заметим, что теперь функция Ψ представляет собой форму четвертой степени. Для Φ получаем следующее тождество:

$$
\diamond\Phi = \frac{Q(z_1,z_2)|W_{12}(z_3)|^2}{\Psi^2} + \frac{R(z_3,z_3^*)U_{12}(z_1)V_{12}(z_2)}{\Psi^2}, \tag{6.39}
$$

$$
\begin{aligned}
&Q(z_1,z_2) = [A(z_1,z_2)B(z_1,z_2) - |C(z_1,z_2)|^2],\\
&R(z_3,z_3^*) = [K(z_3,z_3^*)L(z_3,z_3^*) - M(z_3,z_3^*)N(z_3,z_3^*)].
\end{aligned} \tag{6.40}
$$

Для того, чтобы правая часть этого тождества превращалась в уравнение Лиувилля, необходимо потребовать, чтобы функции $Q(z_1, z_2)$ и $R(z_3, z_3^*)$ имели вид

$$
\begin{aligned}
&Q(z_1,z_2) = Q_1(z_1)Q_2(z_2), \quad R(z_3,z_3^*) = R_1(z_3)R_2(z_3^*),\\
&Q_1(z_1) = (p_1\phi_1^2 + q_1\phi_2^2 + r_1\phi_1\phi_2),\ Q_2(z_2) = (p_2\chi_1^2 + q_2\chi_2^2 + r_2\chi_1\chi_2),\\
&R_1(z_3) = (\alpha\psi_1^2 + \beta\psi_2^2 + \gamma\psi_1\psi_2),\ R_2(z_3^*) = (\alpha^*\psi_1^{*2} + \beta\psi_2^{*2} + \gamma\psi_1^*\psi_2^*).
\end{aligned}
$$

Эти условия эквивалентны системе алгебраических уравнений, связывающих постоянные $a_i, b_i, c_i, d_i, p_\mu, q_\mu, r_\mu, \alpha, \beta, \gamma$. Эти уравнения выписываются без труда, но представляют собой несколько громоздкую систему, поэтому здесь ее приводить не будем. Достаточными условиями превращения (6.39) в уравнение Лиувилля являются условия типа (6.13)

$$
\frac{Q_1(z_1)}{U_{12}(z_1)} = \lambda_1 = \mathrm{const},\ \frac{Q_2(z_2)}{V_{12}(z_2)} = \lambda_2 = \mathrm{const}, \tag{6.41}
$$

$$\frac{R_1(z_3)}{W_{12}(z_3)} = \lambda_3 = \text{const}, \ \frac{R_2(z_3^*)}{W_{12}^*(z_3^*)} = \lambda_3^* = \text{const}. \tag{6.42}$$

При этом $\Omega_0 = \lambda_1\lambda_2 + |\lambda_3|^2$. Вновь следует ввести функции $u(z_1) = \phi_2(z_1)/\phi_1(z_1), \ v(z_1) = \chi_2(z_1)/\chi_1(z_1), \ w(z_3) = \psi_2(z_1)/\psi_1(z_1)$. Эти функции удовлетворяют тем же уравнениям (6.15), решениями которых являются те же функции (6.18),(6.19).

По аналогии с (6.24) и (6.25) для размерности пространства-времени равной 4 может быть получено специальное представление для решений уравнения Д'Аламбера $\diamond\Phi = 0$ в виде:

$$\Phi = \sum_{\lambda_1\lambda_2+|\lambda_3|^2=0} C(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\ln\left\{\frac{\Psi(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\bar{\lambda}_3,z_1,z_2,z_3,z_3^*)}{\sqrt{U_{12}(\lambda_1,z_1)V_{12}(\lambda_2,z_2)|W_{12}(\lambda_3,z_3)|^2}}\right\} \tag{6.43}$$

или

$$\Phi = \sum_{\lambda_1\lambda_2+|\lambda_3|^2=0} C(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\ln\left\{\Psi(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\bar{\lambda}_3,z_1,z_2,z_3,z_3^*)\right\},$$

где функция $\Psi(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\bar{\lambda}_3,z_1,z_2,z_3,z_3^*)$ имеет вид (6.38) и $C(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ - произвольные комплексные числа.

Аналогичным образом могут быть получены обобщенные решения типа (6.27) и (6.32)-(6.31). Первое из них обобщается следующим образом

$$\Phi = \ln\left\{\frac{\Psi(z_1,z_2,z_3,z_3^*)}{\sqrt{P_1(z_1)U_{12}(z_1)V_{12}(z_2)|W_{12}(z_3)|^2}}\right\}, \tag{6.44}$$

где

$$P_1(z_1) = \frac{1}{\Omega_0}\left(\frac{Q_1(z_1)}{U_{12}(z_1)}\lambda_2 + |\lambda_3|^2\right),$$

а все остальные функции от z_2, z_3 описываются теми же соотношениями (6.38). В силу требования действительности решений это соотношение (6.44) может быть получено только при снятии ограничений для (6.41), но не для (6.42). Здесь вновь произвольны либо функции $\phi_1(z_1), \ \phi_2(z_1)$ и, следовательно, $u(z_1)$, либо функции $\chi_1(z_2), \ \chi_2(z_2)$ и, следовательно, функция $v(z_2)$.

Решения (6.32)-(6.31) обобщаются по следующим правилам:

$$\frac{Q_1(z_1)}{U_{12}(z_1)} = ae^{\lambda_1 z_1}, \ \frac{Q_2(z_2)}{V_{12}(z_2)} = be^{\lambda_2 z_2}, \tag{6.45}$$
$$\frac{R_1(z_3)}{W_{12}(z_3)} = ce^{\lambda_3 z_3}, \ R_2(z_3^*) = R_1^*(z_3).$$

Причем постоянные $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ должны удовлетворять соотношению

$$\lambda_1 \lambda_2 + |\lambda_3|^2 = 0. \tag{6.46}$$

В этом случае функция Φ записывается в следующем виде

$$\Phi = \ln \left\{ \frac{\Psi(z_1, z_2, z_3, z_3^*)}{\sqrt{\Theta_4(z_1, z_2, z_3, z_3^*)) U_{12}(z_1) V_{12}(z_2) |W_{12}(z_3)|^2}} \right\}, \tag{6.47}$$

где

$$\Theta_4(z_1, z_2, z_3, z_3^*) = abe^{\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2} + |c|^2 e^{\lambda_3 z_3 + \lambda_3^* z_3^*}.$$

Последняя формула основана на легко проверяемом тождестве

$$\diamond \ln \Theta_4(z_1, z_2, z_3, z_3^*) = -\frac{ab|c|^2 e^{\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3 + \lambda_3^* z_3^*}}{\Theta_4^2(z_1, z_2, z_3, z_3^*)} \left(\lambda_1 \lambda_2 + |\lambda_3|^2 \right), \tag{6.48}$$

выражение в правой части которого обращается тождественно в ноль при условии (6.46). В этом случае функции $u(z_1), v(z_2), w(z_3)$ описываются соотношениями (6.35).

Как и в размерности $d = 3$ тождество (6.48) приводит к цепочке Тоды

$$\diamond \Phi_a = e^{-2\Phi_a + \Phi_{a+1}}, \quad a = 1, 2, \ldots.$$

Параметризация решений в случае $d = 4$ выглядит следующим образом. Последовательность функций

$$\Theta_a(z_1, z_2, z_3, z_3^*) = f_1^{(a)}(z_1) f_2^{(a)}(z_2) + f_3^{(a)}(z_3) f_3^{(a)*}(z_3^*), \quad a = 1, 2, \ldots.$$

в силу тождества (6.48) удовлетворяет соотношениям

$$\diamond \ln \Theta_a = -\frac{f_1^{(a)} f_2^{(a)} f_3^{(a)} f_3^{(a)*}}{\Theta_a^2(z_1, z_2, z_3, z_3^*)} \left(\frac{f_1^{(a)\prime}}{f_1^{(a)}} \frac{f_2^{(a)\prime}}{f_2^{(a)}} + \frac{f_3^{(a)\prime}}{f_3^{(a)}} \frac{f_3^{(a)*\prime}}{f_3^{(a)*}} \right), \; a = 1, 2, \ldots$$

Отсюда следует, что последовательность функций

$$\Phi_a(z_1, z_2, z_3, z_3^*) = \ln \left[\frac{\Theta_a(z_1, z_2, z_3, z_3^*)}{h_1^{(a)} h_2^{(a)} h_3^{(a)} h_3^{(a)*}} \right]$$

удовлетворяет уравнениям цепочки Тоды (6.36) в пространстве размерности $d = 4$, если функции $f_k^{(a)}(z_k)$ и $h_k^{(a)}(z_k)$ удовлетворяют рекурентной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f_k^{(a+1)}(z_k) = \frac{d}{dz_k} \ln f_k^{(a)}(z_k), \quad h_k^{(a+1)}(z_k) = \frac{\left[h_k^{(a)}(z_k) \right]^2}{f_k^{(a)}(z_k)},$$
$$k = 1, 2, 3, 4; \quad a = 1, 2, \ldots.$$

При этом условия конечности и периодичности цепочек остаются теми же, что и в случае $d = 3$.

6.6 Решения уравнений Д'Аламбера и Лиувилля в размерности $d > 4$

Предложенный метод естественным образом обобщается на случай пространства-времени $n > 4$. Если оператор в размерности n имеет внедиагональное представление (6.2) с заданной вещественной матрицей G_{ij}, $G_{ii} = 0, i, j = 1, \ldots, n$, то решения соответствующего уравнения Лиувилля (6.4) следует искать в аналогичном виде:

$$\Phi = \ln \left\{ \Psi(z_1, \ldots, z_n) \left[\prod_{i=1}^{n} U_{12}^{(i)}(z_i) \right]^{-1/2} \right\}, \tag{6.49}$$

где

$$\Psi(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n = 1,2} h_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \psi_{\alpha_1}^{(1)}(z_1) \cdots \psi_{\alpha_n}^{(n)}(z_n), \tag{6.50}$$

$$U_{12}^{(i)}(z_i) = \psi_1^{(i)}(z_i) \frac{d}{dz_i} \psi_2^{(i)}(z_i) - \psi_2^{(i)}(z_i) \frac{d}{dz_i} \psi_1^{(i)}(z_i),$$

а коэффициенты $h_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}$ - постоянные. Таким образом Ψ - форма степени n, которую для каждого значения индексов i, j можно представить в виде:

$$\Psi(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{\alpha_i, \alpha_j = 1,2} R_{i,j,\alpha_i,\alpha_j} \psi_{\alpha_i}^{(i)}(z_i) \psi_{\alpha_j}^{(j)}(z_j),$$

где

$$R_{\alpha_i,\alpha_j,i,j} = \sum_{\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}/\{\alpha_i\alpha_j\}=1,2} h_{\alpha_1 \ldots \alpha_{i-1} \alpha_i \alpha_{i+1} \ldots \alpha_{j-1} \alpha_j \alpha_{j+1} \ldots \alpha_n} \prod_{k=1,\ldots,n, k \neq i,j} \psi_{\alpha_k}^{(k)}(z_k).$$

Здесь запись $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}/\{\alpha_i \alpha_j\}$ подразумевает, что из общего списка индексов, по которым проводится суммирование, исключены индексы α_i и α_j. Тождество (6.39) в общем виде выглядит следующим образом

$$\diamond \Phi = \frac{1}{\Psi^2} \left\{ \sum_{i<j=1}^{n} G_{ij} Q_{ij} U_{12}^{(i)} U_{12}^{(j)} \right\}, \tag{6.51}$$

где

$$Q_{ij} = R_{1,1,i,j} R_{2,2,i,j} - R_{1,2,i,j} R_{2,1,i,j}. \tag{6.52}$$

Заметим, что Q_{ij} как функции координат зависят от всех координатных переменных, кроме z_i и z_j и представляют собой по отношению к функциям $\psi_1^{(k)}(z_k)$ форму степени $n-2$. Доказательство этого факта получается применением тождества (6.1) к каждому элементу внедиагонального представления оператора Д'Аламбера в форме второй смешанной производной от пары несовпадающих координат.

Основной класс решений определяется требованиями

$$Q_{ij} = \prod_{k=1,\dots,n,k\neq i,j} P_k(z_k), \tag{6.53}$$

сводящимися к системе алгебраических уравнений на коэффициенты n-формы (6.50) и параметры p_k, q_k, r_k функций $P_k(z_k)$, имеющих по определению вид:

$$P_k(z_k) = p_k \left(\psi_1^{(k)}(z_k)\right)^2 + q_k \left(\psi_2^{(k)}(z_k)\right)^2 + r_k \psi_1^{(k)}(z_k)\psi_2^{(k)}(z_k). \tag{6.54}$$

При этом функции $\psi_1^{(k)}(z_k)$ должны удовлетворять системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\lambda_k U_{12}^k = P_k(z_k),\ k = 1, \dots, n. \tag{6.55}$$

Совокупность соотношений (6.52) и (6.53) эквивалентна системе относительно функций $\psi_\alpha^{(k)}(z_k)$ и системе алгебраических уравнений, связывающих значения постоянных p_k, q_k, r_k со значениями коэффициентов n-формы (6.50) по аналогии с тем, как это имело место для размерностей $d = 3, 4$.

Утверждение 6.6. *Уравнение Лиувилля (6.4) в произвольной конечной размерности $d = n$ с оператором Д'Аламбера (6.5) имеет класс точных решений в форме (6.49), для которой коэффициенты кубической формы (6.50) удовлетворяют соотношениям (6.53), а функции $\psi_\alpha^{(k)}(z_k)$ удовлетворяют уравнениям (6.55), при условии, что постоянные $\lambda_k,\ k = 1, \dots, n$ связаны одним соотношением*

$$\Omega_0 = \Omega(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \mathrm{const}, \tag{6.56}$$

где функция $\Omega(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ определяется соотношением

$$\Omega(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{j<k=1}^{n} G_{jk} \left(\prod_{i=1, i\neq j,k}^{n} \lambda_i \right). \tag{6.57}$$

Все остальные обобщенные классы решений для уравнений Д'Аламбера и Лиувилля в размерности $n > 4$, существуют и в общем случае и строятся аналогичным образом. Соответствующие результаты сформулируем в виде утверждений без доказательства.

Утверждение 6.7. *Уравнение Д'Аламбера*

$$\diamond\Phi = 0$$

в размерности n координатного пространства имеет классы решений, представимых в форме

$$\Phi = \sum_{\Omega(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)=0} \ln\left\{\Psi(\lambda_1,\ldots,\lambda_n,z_1,\ldots,z_3)\right\}.$$

При этом каждому набору комплексных чисел $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, удовлетворяющих условию

$$\Omega(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) = 0,$$

где Ω определяется соотношением (6.57), соотвествует функция $\Psi(\lambda_1,\ldots,\lambda_n,z_1,\ldots,z_n)$, имеющая вид n-формы (6.50) относительно функций $\psi^{(k)}_\alpha(z_k)$, удовлетворяющих условиям (6.53).

Утверждение 6.8. *Уравнение Лиувилля*

$$\diamond\Phi = \Omega_0 e^{2\Phi}$$

в размерности n координатного пространства имеет классы решений представимых в форме соотношений (6.49) -(6.50), в которых одна из функций $U^{(i)}_{12}(z_i)$ в записи (6.49) заменена на функцию

$$Q(z_i) = \frac{1}{\Omega_0}\Omega(\lambda_1,\ldots,\lambda_i(z_i),\ldots,\lambda_n),$$

а постоянная величина замена на функцию

$$\lambda_i(z_i) = \frac{P_i(z_i),}{U^{(i)}_{12}(z_i)}.$$

Отметим, что обобщенное решение, аналогичное описанному в Утверждении 6.4, в случае произвольной конечной размерности d оператора Д'Аламбера не параметризуется в столь простой форме, как в случае размерности $d = 3, 4$, поэтому здесь не будем касаться этой проблемы.

6.7 Действительные решения уравнений Лапласа и Лиувилля с оператором Лапласа

Особо рассмотрим построение решений уравнений Лиувилля и Лапласа с оператором Лапласа в размерности $d = 3$ и вообще в нечетной размерности координатного пространства. В разделе 1 было показано, что внедиагональное представление оператора Лапласа обязательно содержит комплексные координатные переменные. Однако, в случае четной размерности пространства координат внедиагональное представление оператора Лапласа строится на совокупности пар комплексно-сопряженных координатных переменных, а в нечетно-мерном случае комплексные координаты не образуют комплексно-сопряженные пары. Например, в случае $d = 4$

$$\Delta = 4\frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} + 4\frac{\partial^2}{\partial z_2 \partial \bar{z}_2}, \tag{6.58}$$

где $z_1 = x + iy$, $z_2 = z + iu$, $\bar{z}_1 = x - iy$, $\bar{z}_2 = z - iu$, а x, y, z, u - вещественные координаты в R^4. В случае же $d = 3$

$$\Delta = 2\frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} + 4\frac{\partial^2}{\partial z_2 \partial z_3} + 2\frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_3}, \tag{6.59}$$

где $z_1 = z + iy$, $z_2 = z + ix$, $z_3 = z - ix$. Поэтому, в случае $d = 2k + 1$ построение действительных решений для уравнения Лиувилля с оператором Лапласа по развитой выше схеме оказывается не возможным.

Выход из этого положения можно найти с помощью погружения нечетномерного пространства в подходящее пространство четного числа измерений. Например, для случая, соответствующего (6.59), необходимое представление можно получить дополняя совокупность комплексных координат еще одной координатой $z_4 = z - iy$. В этом случае B-представление оператора будет выглядеть следующим образом

$$\Delta = 2\left\{\frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} + 2\frac{\partial^2}{\partial z_2 \partial z_3} + \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_3} + 2\frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_4} + \frac{\partial^2}{\partial z_2 \partial z_4} + \frac{\partial^2}{\partial z_3 \partial z_4}\right\}$$

или, с учетом комплексной сопряженности пар координат: $z_4 = z_1^*$ и $z_3 = z_4^*$,

$$\begin{aligned}\Delta = 2\frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} + 4\frac{\partial^2}{\partial z_2 \partial z_2^*} + 2\frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2^*} + \\ +4\frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_1^*} + 2\frac{\partial^2}{\partial z_2 \partial z_1^*} + 2\frac{\partial^2}{\partial z_2^* \partial z_1^*}.\end{aligned} \tag{6.60}$$

Форма соотношения (6.60) позволяет воспользоваться теми же построениями, что и в предыдущем разделе.

Поскольку случай оператора Лапласа в размерности $d = 3$ имеет важное значение для построения решений многих физических моделей в этой же размерности координатного пространства, рассмотрим более подробно соотношения, определяющие решения уравнений Лапласа и Лиувилля, соответствующие этой размерности.

Начнем с уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0. \tag{6.61}$$

В силу линейности этого уравнения нет необходимости производить погружение 3-х-мерного пространства в 4-х-мерное. Действительно, если $u(z_1, z_2, z_3)$ - комплексное решение, то $u^*(z_1^*, z_2^*, z_3^*)$ - тоже решение уравнения (6.61). Поэтому вещественное решение можно записать в виде:

$$U = u + u^*.$$

Таким образом вся процедура построения решений сводится к уже рассмотренному выше для уравнения Д'Аламбера случаю в размерности $d = 1 + 2$ (см. Утверждение 6.2.). Отличие заключается лишь в том, что во всех вычислениях числовые коэффициенты решений могут быть произвольными комплексными величинами. Утверждение 6.2. остается полностью справедливым. В том числе решение уравнения Лапласа (6.61) может быть представлено в виде сумм (6.24) или (6.25) для любых комплексных $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, удовлетворяющих (6.26):

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0.$$

Для уравнения Лиувилля с оператором Лапласа необходимо для построения вещественных решений использовать представление (6.60). Вычисления в этом случае практически полностью совпадают с вычислениями для уравнения с оператором Д'Аламбера в размерности $d = 4$, проведенными выше. Мы не будем их воспроизводить полностью. Обратим внимание лишь на то, что согласно общей концепции решение для уравнения Лиувилля с оператором, имеющим внедиагональное представление (6.60) должно иметь вид:

$$\Phi = \ln\left(\frac{\Psi}{|U_{12}(z_1)V_{12}(z_2)|}\right),$$

где Ψ представляется 4-формой следующего вида:

$$\Psi = \sum_{\alpha\beta\gamma\delta\mu\nu=1}^{2} h_{\alpha\beta\mu\nu}\psi_\alpha(z_1)\psi^*_\beta(\bar{z}_1)\phi_\mu(z_2)\phi^*_\nu(\bar{z}_2), \tag{6.62}$$

Здесь $\psi_\alpha(z_1), \phi_\beta(z_2)$ - аналитические функции комплексных переменных z_1 и z_2 соответственно. Для того, чтобы существовали решения уравнения Лиувилля в рассматриваемом классе функций, необходимо потребовать существования двух аналитических, квадратичных по функциям $\psi_\alpha(z_1)$ и $\phi_\beta(z_1)$ соответственно, функция $P^{(1)}(z_1)$ и $P^{(2)}(z_2)$, с помощью которых формулируются условия на коэффициенты $h_{\alpha\beta\mu\nu}$ 4-формы (6.62). В случае выполнения этих условий, эквивалентных (6.53) и (6.54), уравнения для функций $\psi_\alpha(z_1), \phi_\beta(z_2)$ сводятся к системе обыкновенных уравнений с комплексным аргументом, имеющих решения в форме кинков (6.18), но с комплексными коэффициентами.

Основное отличие от случая уравнения Лиувилля с оператором Д'Аламбера при $d = 4$ состоит в более сложной форме условия (6.56): для комплексных параметров λ_1, λ_2 должно выполнятся равенство

$$4(|\lambda_1| + |\lambda_2|^2) + 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2^* + \lambda_2\lambda_1^* + \lambda_2^*\lambda_1^*) = \Omega = \mathrm{const}.$$

А для уравнения Лапласа должно выполняться условие

$$4(|\lambda_1| + |\lambda_2|^2) + 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_2^* + \lambda_2\lambda_1^* + \lambda_2^*\lambda_1^*) = 0.$$

Все остальные построения выполняются в полном соответствии с общими правилами.

Глава 7

Некоторые прикладные задачи, решаемые с помощью моделей типа Лиувилля и цепочек Тоды

Развитая теория уравнений типа Лиувилля и цепочек Тоды может быть использована для решения ряда прикладных задач теории диспергирующих волн. В данной главе приведены несколько характерных примеров из трех различных разделов физики, где использование полученных результатов приводит к важным результатам.

Первый пример относится к динамике волн, возникающих в идеальной жидкости на плоскости вблизи так называемого критического слоя. Под критическим слоем в волновых гидродинамических задачах обычно понимают область течения, средняя скорость $U(z)$ в котором совпадает при некотором z_0 с фазовой скоростью волн c. Обычно решения для этого класса течений строятся с помощью приближенных методов разложения в ряд по сингулярности $(c - U)^{-1}$. Задачи такого рода связаны с реально наблюдаемыми процессами волнообразования в океане, атмосфере и т.д.

Второй пример касается задач нелинейной оптики.

Третий пример относится к теории динамики гравитационных полей в Общей теории относительности и связан с рассмотрением на базе развитых методов самосогласованной неоднородной космологической модели со скалярным полем и идеальной жидкостью.

7.1 Гидродинамические нелинейные волны в критическом слое

Примером использования решений (7.31) в прикладных задачах, служит подкласс решений динамики несжимаемой жидкости на плоскости, описывающий стационарные волны вблизи критического слоя. Уравнения движения несжимаемой жидкости на вращающейся плоскости при наличии внешнего трения и вязкости, можно записать в виде

$$\begin{gathered} u_t + uu_x + vu_y - f_0 v + p_x - \kappa(t)u - \nu\Delta u = 0, \\ v_t + uv_x + vv_y + f_0 u + p_y - \kappa(t)v - \nu\Delta v = 0, \\ u_x + v_y = 0 \qquad (\Delta = \partial^2/\partial^2 x + \partial^2/\partial^2 y). \end{gathered} \tag{7.1}$$

Здесь $f_0 = const$ - параметр Кориолиса; $\kappa = \kappa(t)$ - коэффициент внешнего трения, $p = p(x, y, t)$- давление, нормированное на плотность $\rho = const$, u, v - компоненты скорости в декартовой системе координат (x, y), ν - коэффициент кинематической вязкости. Вводя функцию тока Ψ: $u = \partial\Psi/\partial y$, $v = -\partial\Psi/\partial x$, традиционно из первых двух уравнений (7.1) исключают давление p перекрестным дифференцированием, что дает в случае стационарных невязких течений одно уравнение относительно функции тока

$$\Delta\Psi = F(\Psi), \tag{7.2}$$

где $F(\Psi)$ - некоторая функция произвольного вида, определяемая граничными условиями. Уравнение (7.2), как правило, является отправной точкой для поисков точных решений уравнений динамики идеальной жидкости [120, 103]. С другой стороны, (7.2) это уравнение Клейна-Гордона, которое, как указывалось в главе 5, эквивалентно условию совместности следующей пары уравнений (соотношение (5.2))

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 A(z,\bar z)}{\partial z^2}\Phi, \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial \bar z^2} = \frac{\partial^2 A(z,\bar z)}{\partial \bar z^2}\Phi,$$

где $A(z, \bar z)$ - некоторая действительная функция, которая и определяет структуру функции $F(\psi)$ в (7.2), а $\Phi = \ln\psi$. В главе 4 было показано, что при специальном выборе функции $A(z, \bar z) = a(z) + \bar a(\bar z)$ уравнение (7.2) сводится к уравнению Лиувилля. Таким образом, для целого класса стационарных течений функция тока Ψ может быть представлена в виде логарифма квадратичной формы: $\Psi = \ln\Phi$, где

$$\Phi = \frac{1}{|w|}\left(a|\phi_1|^2 + b|\phi_2|^2 + c\phi_1\phi_2^* + c^*\phi_1^*\phi_2\right), \tag{7.3}$$

$w = \phi_1\phi_2' - \phi_2\phi_1'$, причем функции ϕ_1, ϕ_2 - произвольные почти всюду аналитические функции комплексного аргумента $z = x + iy$, а функции ϕ_1^*, ϕ_2^* - аргумента $\bar{z} = x - iy$.

Приведем несколько сравнительно простых примеров, которые могут дать общее представление о характере построенных решений.

7.1.1 Пример 1. Волны в критическом слое плоскопараллельного течения

Выберем в качестве независимых решений $\phi_1(z)$ и $\phi_2(z)$ следующие функции $\phi_1(z) = \sin\xi z, \quad \phi_2(z) = \cos\xi z$, и положим $c = 0$. Решение (7.3) в этом случае будет иметь следующий вид:

$$\Phi(z, \bar{z}) = \zeta(x, y) = a\mathrm{ch}\xi y + b\sin\xi x. \tag{7.4}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial}{\partial y}\ln\zeta = \frac{\xi a\mathrm{sh}\xi y}{\zeta(x,y)}, \\ v &= -\frac{\partial}{\partial x}\ln\zeta = -\frac{\xi b\cos\xi x}{\zeta(x,y)}. \end{aligned} \tag{7.5}$$

Таким образом постоянные a и b имеют смысл амплитуд волны в u и v компонентах течения. Вычислим средние скорости

$$U(y) = \frac{\xi}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi/\xi} u(x,y)dx = a\left(a^2\mathrm{ch}^2\xi y - b^2\right)^{-1/2}\mathrm{sh}\xi y, \tag{7.6}$$

$$V(y) = \frac{\xi}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi/\xi} v(x,y)dx = 0. \tag{7.7}$$

При $a > b$ рассматриваемое течение является гладким и представляет собой волну в сдвиговом плоско-параллельном потоке со средней скоростью $U(y)$. Максимум амплитуды волны приходится на критическую точку $y = 0$, где фазовая скорость волны совпадает со скоростью течения. Данное решение получено для системы отсчета, движущейся с фазовой скоростью волны.

При $a = b$ вдоль линии критического слоя появляется периодическая цепочка сингулярных вихрей, перемещающихся с фазовой скоростью волны. Средняя скорость в этом случае постоянна во всем слое жидкости и испытывает конечный скачок в точке $y = 0$:

$$U(y) = \mathrm{sign}(y).$$

Этот режим течения является потенциальным: $\omega = \Delta\psi = 0$.

При $b > a$ сингулярные вихри превращаются в конечные вихревые лакуны, движущиеся с фазовой скоростью волны, на краях которых скорость обращается в бесконечность. Вне области $a^2\mathrm{ch}\xi y < b^2$ средняя скорость описывается той же формулой (7.6). Внутри области средняя скорость не определена.

7.1.2 Пример 2. Волны в критическом слое цилиндрического течения

Аналогичные решения могут найдены в полярной системе координат. Для этого выберем в качестве затравочных функций ϕ_1, ϕ_2 следующие

$$\phi_1 = \sin(æ\mathrm{ln}z), \quad \phi_1 = \cos(æ\mathrm{ln}z), \tag{7.8}$$

где $æ = \alpha + i\beta$. Тогда решение (7.4) и (7.8) при том же выборе постоянных a,b и c примет следующий вид:

$$\Phi = \frac{r}{|æ|}\left(a\,\mathrm{ch}\,Y + bsinX\right),$$

где $r^2 = x^2 + y^2$, $X = Re\{æ\mathrm{lnz}\}, Y = Im\{æ\mathrm{lnz}\}$. Введем обозначение $z = re^{i\varphi}$, тогда $Y = \beta\mathrm{ln}r + \alpha\varphi, X = \alpha\varphi - \beta\mathrm{ln}r$. В случае $\alpha = 0$ получаем

$$\Phi = \frac{2}{|\beta|}\left[a\left(r^{\beta+1} + r^{-\beta+1}\right) + 2rb\sin\beta\varphi\right].$$

В случае, если $a > b$ и β - целое число, течение является гладким всюду вне точки $r = 0$. В точке $r = 0$ течение имеет особенность вида r^{-1}. При этом в единственном случае $\beta = 1$ течение не имеет особенности при $r = 0$. Если $a < b$, вблизи центральной части течения образуются вихревые лакуны. При $a = b$ - имеется цепочка сингулярных вихрей.

При использовании метода Дарбу для обоих классов рассматриваемых течений обратим внимание на то, что в формуле (7.3) при произвольных функциях ϕ_1 и ϕ_2 функции

$$\chi_1 = \frac{\phi_1}{\sqrt{w}}, \quad \chi_2 = \frac{\phi_2}{\sqrt{w}},$$

являются линейно-независимыми решениями обыкновенного дифференциального уравнения

$$\chi'' = (r(z) + k^2)\chi \tag{7.9}$$

для некоторой заданной функции $r(z)$ и произвольного спектрального параметра k. В соответствие с методом Дарбу решения для уравнения (7.9) с новой функцией

$$\tilde{r}(z) = r(z) - 2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\ln W(z),$$

где

$$W(z) = \det\begin{pmatrix} \chi_1 & \chi_1' & \cdots & \chi_1^{[n]} \\ \chi_2 & \chi_2' & \cdots & \chi_2^{[n]} \\ \cdots & & & \\ \chi_n & \chi_n' & \cdots & \chi_n^{[n]} \end{pmatrix},$$

где функции χ_i есть решения уравнения (7.9) с $r(z)$ при различных значениях параметра k: $\chi_i = \chi(k_i, z)$.

7.2 Уравнения генерации второй гармоники

Задачи генерации второй гармоники (Г2Г) или взаимодействия волн первой и второй гармоники в среде с квадратичной нелинейностью относятся к практически важным прикладным задачам нелинейной оптики, и к настоящему времени существует обширная литература (см., например, [4, 61] и библиографию там), посвященная теоретическому анализу основных уравнений, описывающих преобразование волны накачки во вторичную волну с удвоенной частотой гармоники и их взаимодействие. Для многих важных с прикладной точки зрения ситуаций эти уравнения могут быть записаны в виде [4]:

$$\begin{aligned} a_{1z} + \frac{1}{u_1}a_{1t} + \delta_1 a_1 &= -i\gamma_1 a_1^* a_2 \exp\{-i\Delta kz\}, \\ a_{2z} + \frac{1}{u_2}a_{2t} + \delta_2 a_2 &= -i\gamma_2 a_1^2 \exp\{i\Delta kz\}, \end{aligned} \tag{7.10}$$

где a_1, a_2 – амплитуды первой и второй гармоник соответственно, u_1, u_2 – их групповые скорости, коэффициенты γ_1, γ_2 – характеризуют величину квадратичной нелинейности среды для этих гармоник, Δkz – величина фазовой расстройки при нарушении фазового синхронизма, знак * над функциями означает комплексное сопряжение. Наличие диссипации в среде учтено с помощью введения в уравнения (7.10) постоянных коэффициентов затухания первой δ_1 и второй δ_2 гармоник.

В общем случае уравнения (7.10) неинтегрируемы. Поэтому основными способами анализа этих уравнений являются приближенные методы. Часто для расчетов, оценивающих характеристики преобразования частоты, используется, так называемое, приближение заданной волны накачки, при котором из второго уравнения находится амплитуда второй гармоники a_2 в предположении, что a_1 известна [4, 62]. Такой подход дает приемлемую точность лишь в случае малых коэффициентов преобразования энергии первой гармоники во вторую $\eta < 0.5$ [4]. Для современных задач, сопряженных с достижением больших значений коэффициента преобразования, это приближение становится мало пригодным. Точные же решения в задаче генерации получены лишь для специальных условий, также не всегда реализующихся на практике. Например, известны решения для случая

$$Im\{ia_1\} = 0,\ Im\{ia_2\} = 0,\ \delta_1 = 0,\ \delta_2 = 0,\ \Delta k = 0, \tag{7.11}$$

при которых решения сводятся к уравнению Лиувилля [61]. Если ввести функции $\Phi = -\ln a_1$, то для этой функции получим

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\zeta}\Phi = \gamma_1\gamma_2\exp\{-2\Phi\},$$

где ξ и ζ - координаты, вводимые ниже. Этот режим называется обычно режимом фазового синхронизма в бездиссипативной среде. Задача этого раздела - на основе метода квадратичных форм найти точные решения уравнения в случае фазового синхронизма при наличии диссипации в первой гармонике, т.е. при $\delta_1 \neq 0$.

Исследование уравнений (7.10) с целью построения классов их точных решений может быть проведено на основе имеющейся у них совокупности преобразований, оставляющих инвариантными форму этих уравнений.

Для удобства введем новые координаты ξ и ζ:

$$\xi = \frac{u_1}{u_2 - u_1}(-z + u_2 t),\quad \zeta = -\frac{u_2}{u_2 - u_1}(-z + u_1 t)$$

и положим $a_1 = \tilde{a_1}(\xi,\zeta),\ a_2 = \tilde{a_2}(\xi,\zeta)\exp\{i\Delta kz\}$. В этом случае, опуская знак ˜, уравнения (7.10) приводятся к следующему виду:

$$\begin{gathered} a_{1,\xi} + \delta_1 a_1 = -i\gamma_1 a_1^* a_2, \\ a_{2,\zeta} + \delta_2 a_2 + i\Delta k a_2 = -i\gamma_2 a_1^2. \end{gathered} \tag{7.12}$$

Проверяется простыми прямыми вычислениями наличие совокупности из двух классов преобразований, приводящих уравнения (7.12) с параметрами $\delta_1, \Delta k$ к уравнениям с новыми параметрами ${\delta_1}', \Delta k'$. Первый класс определяется следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} &a_1 \to A_1(R,\zeta) = a_1(\xi,\zeta)/f(\xi),\\ &a_2 \to A_2(R,\zeta) = a_2(\xi,\zeta)/f^2(\xi),\\ &\xi \to R(\xi) = \int f^2(\xi)d\xi + R_0, \end{aligned} \tag{7.13}$$

где функция $f(\xi)$ определяется из уравнения

$$\left(\frac{f'}{f} + \delta_1\right)\frac{1}{f^2} = {\delta_1}' \tag{7.14}$$

и имеет следующий вид

$$f(\xi) = \sqrt{\frac{\delta_1}{\tilde{\delta_1}}}\left(1 - Ce^{2\delta_1\xi}\right)^{-1/2}. \tag{7.15}$$

Здесь C – произвольная действительная постоянная. Функция $R(\xi)$ в этом случае будет иметь следующий вид

$$R(\xi) = -\frac{1}{2\tilde{\delta_1}}\ln(e^{-2\delta_1\xi} - C) + R_0. \tag{7.16}$$

В результате этих преобразований уравнения для $A_1(R,\zeta)$ и $A_2(R,\zeta)$ будут иметь тот же самый вид (7.12), но с коэффициентом затухания первой гармоники, равным ${\delta_1}'$ вместо δ_1. Будем называть эти преобразования R-преобразованиями.

Второй класс преобразований существует в случае $\delta_2 = 0$ и определяется соотношениями

$$\begin{aligned} &a_1 \to A_1(\xi,T) = a_1(\xi,\zeta)e^{-i\Theta(\zeta)}/g(\zeta),\\ &a_2 \to A_2(\xi,T) = a_2(\xi,\zeta)e^{-2i\Theta(\zeta)},\\ &\zeta \to T(\zeta) = \int g^2(\zeta)d\zeta + T_0, \end{aligned} \tag{7.17}$$

где функции $g(\zeta)$ и $\Theta(\zeta)$ связаны одним уравнением

$$\Delta k + 2\frac{d}{d\zeta}\Theta = g^2\Delta k'. \tag{7.18}$$

Отсюда

$$\Theta(\zeta) = \frac{1}{2}\left(\Delta k'\int g^2(\zeta)d\zeta - \Delta k\zeta\right) + \Theta_0. \tag{7.19}$$

При этом уравнения для $A_1(\xi,T)$ и $A_2(\xi,T)$ опять будут иметь тот же вид (7.12), но с коэффициентом рассогласования гармоник, равным $\Delta k'$ вместо Δk. Преобразования этого типа будем называть T-преобразованиями.

Рассмотрим в качестве примера решения, соответствующие условиям (7.11), которые могут быть представлены в виде [61, 23]:

$$a_1(\xi,\zeta) = \frac{iW(\xi)V(\zeta)}{\Psi(\xi,\zeta)} = \frac{iP(\xi)Q(\zeta)}{a + bp(\xi)q(\zeta) + cq(\zeta) + dp(\xi)},$$
$$a_2(\xi,\zeta) = -\frac{i}{\gamma_1}\frac{\partial}{\partial\xi}\ln a_1(\xi,\zeta), \tag{7.20}$$

где a, b, c, d – произвольные действительные постоянные, в совокупности удовлетворяющие одному условию $ab - cd = \gamma_1\gamma_2$; $\psi_1(\xi), \psi_2(\xi)$ – произвольные действительные функции переменной ξ, а $\phi_1(\zeta), \phi_2(\zeta)$ – действительные функции переменной ζ, $p(\xi) = \psi_2(\xi)/\psi_1(\xi)$, $q(\zeta) = \phi_2(\zeta)/\phi_1(\zeta)$,

$$W(\xi) = \left(\psi_1\frac{d}{d\xi}\psi_2 - \psi_2\frac{d}{d\xi}\psi_1\right)^{1/2}, \quad V(\zeta) = \left(\phi_1\frac{d}{d\zeta}\phi_2 - \phi_2\frac{d}{d\zeta}\phi_1\right)^{1/2},$$
$$P(\xi) = \left(\frac{d}{d\xi}p(\xi)\right)^{1/2}, \quad Q(\zeta) = \left(\frac{d}{d\zeta}q(\zeta)\right)^{1/2},$$
$$\Psi(\xi,\zeta) = a\psi_1(\xi)\phi_1(\zeta) + b\psi_2(\xi)\phi_2(\zeta) + c\psi_1(\xi)\phi_2(\zeta) + d\psi_2(\xi)\phi_1(\zeta).$$

В качестве конкретного примера несингулярного решения типа уединенных волн в классе гиперболических функций рассмотрим решение, соответствующее следующему выбору функций $\psi_1(\xi), \psi_2(\xi)$ и $\phi_1(\zeta), \phi_2(\zeta)$:

$$\psi_i(\xi) = A_i + B_i\,\mathrm{ch}\{k\xi\}, \quad \phi_i(\zeta) = C_i + D_i\,\mathrm{ch}\{l\zeta\}, \quad i = 1, 2,$$

где $k, l, A_i,\ B_i,\ C_i,\ D_i,\ i = 1, 2$ - действительные постоянные. В этом случае, полагая так же для простоты $c = d = 0,\ b = \gamma_1\gamma_2/a$, имеем:

$$W(\xi) = \sqrt{k}\left[B_1B_2 + A_1B_2\,\mathrm{ch}\,k\xi + A_2B_1\,\mathrm{ch}\,k\xi\right]^{1/2},$$
$$V(\zeta) = \sqrt{l}\left[D_1D_2 + C_1D_2\,\mathrm{ch}\,l\zeta + C_2D_1\,\mathrm{ch}\,l\zeta\right]^{1/2},$$
$$\Psi(\xi,\zeta) = aA_1C_1 + bA_2C_2 + (aA_1D_1 + bA_2D_2)\,\mathrm{ch}\,l\zeta + (aB_1C_1 + bB_2C_2)\,\mathrm{ch}\,k\xi +$$
$$+(aB_1D_1 + bB_2D_2)\,\mathrm{ch}\,k\xi\,\mathrm{ch}\,l\zeta.$$

Эти выражения после подстановки их в (7.20), описывают несингулярные решения для a_1, a_2 при условии

$$A_i > 0,\ B_i > 0,\ C_i > 0,\ D_i > 0; \quad a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ d > 0.$$

Возможен более общий подход к построению точных решений, связанный с решением начальной или граничной задачи. В этом случае функциональный вид $p(\xi),\ q(\zeta)$ определяется целиком начальными или граничными условиями задачи. Например, если заданы амплитуды волн на границе среды $z = 0$, то для нахождения $p(\xi),\ q(\zeta)$ необходимо решать систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$
\begin{aligned}
a_1(t) &= \frac{iP(vt)Q(-vt)}{a + bp(vt)q(-vt) + cq(-vt) + dp(vt)},\\
a_2(t) &= -\frac{i}{\gamma_1}\left(\frac{P'(vt)}{P(vt)} + \frac{bp'(vt)q(-vt) + dp'(vt)}{a + bp(vt)q(-vt) + cq(-vt) + dp(vt)}\right)
\end{aligned}
$$

относительно p и q. Здесь $v = u_1u_2/(u_2 - u_1)$ и $p' = dp(\xi)/d\xi$.

R-преобразование позволяет получить из этих решений решение уравнений с $\delta_1 \neq 0$. Действительно, полагая в (7.14) и (7.13) ${\delta_1}' = 0$ получаем

$$
f(\xi) = Ce^{-\delta_1\xi}, \quad R(\xi) = -\frac{C^2}{2\delta_1}e^{-2\delta_1\xi} + R_0. \tag{7.21}
$$

При этом в переменных R, ζ уравнения (7.12) будут иметь вид уравнений без диссипации, т.е. с $\delta_1 = 0$, а их решения для a_1 и a_2 будут описываться соотношениями (7.20) в тех же переменных R, ζ. Подставляя (7.21) в (7.20), в случае $\delta_1 \neq 0$ получаем

$$
\begin{aligned}
a_1(\xi,\zeta) &= \frac{iCe^{-\delta_1\xi}P(R(\xi))Q(\zeta)}{a + bu(R(\xi))v(\zeta) + cv(\zeta) + du(R(\xi))},\\
a_2(\xi,\zeta) &= -\frac{i}{\gamma_1}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\ln a_1(\xi,\zeta) + \delta_1\right).
\end{aligned}
$$

Аналогично, решения (7.20) преобразуются к решениям уравнений с $\Delta k \neq 0$ с помощью T-преобразований. Для этого в (7.17) и (7.18) необходимо положить $\Delta k' = 0$. В результате

$$
\Theta(\zeta) = -\frac{1}{2}\Delta k\zeta + \Theta_0,
$$

и в переменных ξ, T уравнения имеют вид, соответствующий отсутствию расстройки. Решения в этом случае описываются соотношениями (7.17).

В случае нарушения синхронизма для бездиссипативной среды наиболее общим методом построения точных решений уравнений (7.10) является метод обратной задачи рассеяния (МОЗР) [29]. Система (7.10) имеет представление Захарова-Шабата в форме коммутативности двух матричных операторов [32, 29]. Это представление является редукцией аналогичного представления для системы уравнений трехволнового взаимодействия [32, 29]. Типичным примером такого решения для случая $\Delta k = 0$ является односолитонное решение, имеющее следующий вид

$$a_1(\xi,\zeta) = iC_1 \frac{1}{\operatorname{ch}\theta(\xi,\zeta)}, \quad a_2(x,t) = iC_2 \operatorname{th}\theta(\xi,\zeta), \tag{7.22}$$
$$\theta(\xi,\zeta) = \gamma_1 C_2 \xi + \gamma_2 \frac{C_1^2}{C_2}\zeta,$$

где C_1 и C_2 – действительные постоянные. Однако это решение есть частный случай решений без нарушения фазового синхронизма. Более сложными решениями являются многосолитонные решения, которые строятся с помощью МОЗР или его модификаций. Важным однако является то, что с помощью R-преобразований эти решения могут быть преобразованы в решения уравнений (7.10) с диссипацией первой гармоники и с помощью T-преобразований в решения с $\Delta k \neq 0$.

Таким образом с помощью R- и T-преобразований можно получить новые классы решений, описывающие взаимодействие волн первой и второй гармоник в условиях диссипации первой гармоники и нарушения фазового синхронизма, если известны некоторые затравочные решения. Для изучения взаимодействия волн в случае нарушения фазового синхронизма необходимо искать затравочные классы решений для a_1 и a_2, при которых они являются комплексными функциями общего вида.

7.3 Гравитационное поле и волны в пространстве-времени, заполненном заряженным скалярным полем и идеальной жидкостью

В качестве еще одного примера, относящегося к задачам космологии в Общей теории относительности (ОТО), интересной и важной области современной физики, рассмотрим один класс неоднородных космологических моделей, в котором применение изложенных методов играет существенную роль. Такого типа модели находятся в центре внимания физиков, занимающихся теорией гравитации и космологией, и представляют интерес в связи с рядом старых и новых проблем и достижений в наблюдательной астрономии. К таким сравнительно старым проблемам относится, например, проблема существования "темной материи" ("dark matter"). Эта проблема, как хорошо известно, состоит в том, что существуют значительные расхождения в наблюдательных значения массы звездных систем по динамическим измерениям их относительного движения и по измерениям, полученным по их общей светимости. Эта проблема подробно излагается во многих фундаментальных работах и обзорах (см., например, [42]). В настоящее время отсутствуют надежные способы идентификации этого типа материи и имеется ряд предполагаемых кандидатов на роль такой материи. Например, в качестве кандидата рассматривается нейтрино, в случае, если хотя бы один из сортов нейтрино обладает заметной массой. Новой проблемой космологии, связанной с новейшими измерительными данными (см. [96]) является проблема ускоренного расширения Вселенной в настоящее время. Это ускоренное расширение установлено совсем недавно (1998-1999 годы) по новой методике определения расстояний до удаленных галактик (имеющих красное смещение) с помощью изучения характеристик кривых блеска сверхновых типа Ia, принадлежность которых этим галактикам определяется с достаточной степенью надежности. Смысл проблемы состоит в том, что ускоренное расширение должно вызываться специальной формой материи, отличной от обычной пылевой материи и темной материи, в основном заполняющих космос в настоящую эпоху, которая должна создавать дополнительное отталкивание между частицами материи в противоположность силе гравитационного притяжения. Такая материя получила в литературе название "quintessence" ("квинтэссенция") от греческого слова, обозначающего всепроникающую субстанцию, эквивалентную по сути понятию эфира.

В данной работе мы не будем касаться детально проблем интерпретации темной материи и квинтэссенции, но рассмотрим некоторые модели, в которых присутствуют объекты, по свойствам похожие на эти формы материи. Для данной работы эти модели представляют интерес в первую очередь тем, что в них в явном виде появляются уравнения типа уравнений Лиувилля и цепочек Тоды в трехмерном и четырехмерном пространстве-времени. Мы покажем как методы исследования этих уравнений, развитые в предыдущих главах могут быть применены к космологическим задачам.

Наиболее изученными классами точных решений в различных типах метрик являются решения, в которых структура пространства-времени и распределение материи обладают свойствами симметрии высокого порядка. Это, например, центрально симметричные распределения ([10, 65]), плоско-симметричные распределения (например, [6, 95]) или распределения, обладающие цилиндрической или аксиальной (см. например, [88]) симметрией.

Общий вид метрики, исследуемой в рамках указанных космологических задач, имеет следующий вид:

$$ds^2 = e^{A(x,y,z)+b(t)}dt^2 - e^{-A(x,y,z)+a(t)}\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right), \tag{7.23}$$
$$g_{ik} = \mathrm{diag}\{e^{A+b}, -e^{-A+a}, -e^{-A+a}, -e^{-A+a}\}, \quad i,k = 0,1,2,3,$$

где $A = A(x,y,z)$ - функция координат $x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$ и не зависящая от $x^0 = t$, а $a(t), b(t)$ - некоторые функции времени. Заметим, что этот класс метрик при условии $a(t) = 0, b(t) = 0$ был впервые исследован в работах [80] в связи с задачами вычисления гравитационных полей, создаваемых электростатическим полем. В настоящее время этот класс метрик носит название метрики Мажумдара-Папапетроу. Метрики в случае $a(t) \neq 0, b(t) \neq 0$ являются нестатическим обобщением метрики Мажумдара-Папапетроу и описывают некоторую глобальную динамику Вселенной с локальной квазистатической кривизной, связанной с функцией A. Существует еще один важный подкласс метрик этого типа, имеющий следующую форму:

$$ds^2 = e^{A(x,y,t)+a(z)}\left(dt^2 - dx^2 - dy^2\right) - e^{-A(x,y,t)+b(z)}dz^2, \tag{7.24}$$

который описывает нестатические гравитационные процессы в пространстве с выделенной координатой z. Зависимость от z функций a, b в этом случае связана с некоторой неоднородностью пространства вдоль выделенной оси.

Материя, которая может создавать гравитационное поле, соответствующее (7.24) или (7.23), должна иметь специальную составляющую, похожую на электростатическое поле. Такое поле принято называть заряженным скалярным полем. Кроме этого, в такой модели в качестве других дополнительных форм материи допустима идеальная жидкость и некоторый набор обычных скалярных полей.

Для такой смеси материальных компонент тензор энергии-импульса имеет вид:

$$T_{ik} = T_{ik}^{(h)} - \phi_{,i}\phi_{,k} + \frac{1}{2}g_{ik}g^{lm}\phi_{,l}\phi_{,m} - W(\phi)g_{ik}, \tag{7.25}$$

где
$$T_{00}^{(h)}=\varepsilon,\quad T_{\alpha,\alpha}^{(h)}=p,\quad T_{i,k}^{(h)}=0, i\neq k, \alpha=1,2,3$$
- тензор энергии-импульса идеальной жидкости в синхронной сопутствующей системе отсчета, ε - плотность энергии жидкости, а p - ее давление, ϕ - заряженное самодействующее скалярное поле. Будем предполагать, что уравнение состояния идеальной жидкости имеет вид $p=\gamma\varepsilon$.

Совокупность уравнений Эйнштейна для данной модели сводится к системе из алгебраического условия

$$\phi(x,y,z,t)=\frac{1}{\sqrt{2æ}}\left(A(x,y,z)+a(t)\right) \tag{7.26}$$

и двух дифференциальных уравнений

$$e^{2A}\Delta A=-\left((\dot a)^2-æc^2\rho\right)e^{a-b}+q^2e^{2a}, \tag{7.27}$$

$$e^{-2A}\left[\left(\ddot a+\frac{(\dot a)^2+\dot a\dot b}{2}\right)e^{a-b}-q^2e^{2a}\right]+æp=0, \tag{7.28}$$

одно из которых описывает поле - функцию A, а второе служит для вычисления динамики p и ρ. Здесь Δ - оператор Лапласа

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

К этой системе следует добавить уравнение для поля ϕ, которое с учетом (7.26) имеет в этом случае вид

$$\Delta A=[\sqrt{3æ}\frac{\partial W}{\partial\phi}-(\ddot a+\frac{3a-b}{2}e^{-b-A})]e^{-A+a}. \tag{7.29}$$

Сравнивая это уравнение с (7.27) находим соотношение, которому должен удовлетворять потенциал самодействия. Именно

$$V(\phi,t)=V_1(t)\exp\left\{\frac{\gamma+1}{2\gamma}\sqrt{2æ}\phi\right\}+q(t)\exp\{\sqrt{2æ}\phi\}.$$

В одном из простейших случаев $\gamma=1$ (предельно жесткое уравнение состояния) потенциал самодействия поля приобретает следующий вид:

$$V(\phi)=V_0(t)e^{\sqrt{2æ}\phi}. \tag{7.30}$$

При этом уравнение для функции A удовлетворяет уравнению Лиувилля

$$\Delta A=\sigma e^{-2A}, \tag{7.31}$$

а давление и плотность энергии идеальной жидкости будут равны следующей величине

$$p = \varepsilon = p_0(t)e^{-A}.$$

В этом соотношении

$$p_0(t) = V_0(t)e^a - \frac{1}{æ}(\ddot{a} + \frac{\dot{a}(\dot{a} - \dot{b}}{2}e^{-b}).$$

Кроме этого должно выполнятся условие:

$$\sigma = 2æV_0(t) + \ddot{a} + \frac{\dot{a}(\dot{a} - \dot{b}}{2}e^{-b} = \mathrm{const}.$$

Последнее соотношение описывает космологическую эволюцию Вселенной. В случае $\sigma = 0$ получаем для A уравнение Д'Аламбера

$$\Delta A = 0, \tag{7.32}$$

а в случае $\sigma \neq 0$ - уравнение Лиувилля (7.31).

Аналогичные уравнения для метрики (7.23) описываются следующими формулами:

$$\diamond A = \sigma e^{2A}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Как и раньше, одна из функций $a(z)$ или $b(z)$ - произвольна.

В этих случаях применимы методы решения уравнения Лиувилля, Лапласа и Д'Аламбера, развитые в предыдущих главах. Наиболее просто применять разработанные в главе 6 методы к случаю метрики с выделенной координатой z. В этом случае можно воспользоваться уже найденными в главе 6 решениями. Случай с выделенной координатой t оказывается более сложным для анализа. Основная сложность состоит в построении вещественных решений уравнения Лиувилля для случая трехмерного оператора Лапласа. Внедиагональное представление трехмерного оператора Лапласа строится простым образом только из производных по трем комплексным координатам. Две такие координаты могут выбраны комплексно сопряженными, а третья в этом случае, тоже комплексная не образует сопряженной пары. В результате разработанным в главе 6 методом легко построить только комплексные решения. Однако последнее не относится к случаю, когда уравнение для A есть уравнение Лапласа. В силу линейности этого уравнения каждому комплексному решению можно подобрать комплексно сопряженное, сумма которых будет вещественным решением уравнения Лапласа. В заключении заметим, что для уравнения Лиувилля с оператором Лапласа в нечетномерных пространствах получать вещественные решения можно с помощью погружения решений в четномерное пространство большей размерности.

ЧАСТЬ II

Модели нелинейных волн в средах с диффузией

Глава 8

Диффузионные цепочки Тоды

8.1 Общие свойства самоорганизующихся открытых систем и способы их описания

Теория автоволн тесно связана с понятием активной или возбудимой среды. Подразумевается, что среда, в которой происходит волновой процесс, содержит в скрытой форме внутренние запасы энергии, которые могут при определенных условиях высвобождаться и расходоваться на создание и поддержание когерентных структур или волновых движений, либо среда может под действием внешних источников энергии существенно менять свои свойства перераспределяя поступающую энергию опять же на поддержание волн и когерентных структур. Поскольку в этом случае волновое движение (или когерентная структура) возникают за счет внутренних механизмов перераспределения поступающей энергии, без навязывания извне определенной динамики, то такие волновые движения называют автоволнами.

Любая долго живущая открытая система, в которую извне поступает энергия, должна иметь механизмы трансформации поступающей энергии в некоторые другие ее формы и механизмы пространственного или модового ее перераспределения, которые гарантируют отвод “лишней” энергии из системы. Открытая система должна сохранять энергетический баланс с окружающим миром хотябы в среднем. В противном случае за конечное время система теряет устойчивость (эффект взрыва). С другой стороны, в системе должны имеется и механизмы, приводящие к локализации в ней энергии. Под локализацией подразумевается возникновение и поддержание некоторой ее наблюдаемой структуры, что и является, собственно говоря, идентификатором самой системы. В противном случае система за конечное время деградирует или вырождается. Исчезновение характерной структуры системы фактически означает ее физическое исчезновение. Оба типа механизмов важны с точки зрения продолжительного существования любой открытой системы. Например, в рассмотренном выше случае диспергирующих сред локализованные волновые структуры (уединенные волны, солитоны) возникают за счет баланса их дисперсионного расплывания и нелинейного перераспределения энергии. Это общее требование относится и к активным или возбудимым системам и даже в более значительной степени к ним, чем к другим системам. В большинстве реальных активных систем роль процесса перераспределения энергии или эквивалентной ей субстанции обычно выполняет процесс диффузии. Диффузия представляет собой специфический процесс пространственного перераспределения энергии, концентрации, импульса и т.д. При наличии нелинейной трансформации субстанций и их диффузии в системе могут возникать долгоживующие образования и структуры. Большинство реальных физических, химических, биологических систем - это системы с активными распределенными источниками энергии, обладающие сложными нелинейными механизмами трансформации субстанций и одновременно наличием диффузионного механизма их пространственного перераспределения. Именно это обстоятельство играет решающую роль в возникновении явления самоорганизации сложных многокомпонентных систем и, в конечном итоге, в возникновении жизни. Поэтому в практических целях развития теории самоорганизации и в частном ее случае - теории автоволн, значительный интерес представляет изучение и моделирование процессов в активных (возбудимых) средах с диффузией.

Обычной моделью для таких систем является модель, описывающаяся уравнениями типа “реакция-диффузия” (РД)

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{U}) + \mathbf{D}\Delta\mathbf{U}, \tag{8.1}$$

где $\mathbf{U}$ - вектор состояния элемента среды, например, концентрации вступающих в реакцию химических веществ или концентрации популяций отдельных видов в регионе, а $\mathbf{D}$ - матрица коэффициентов диффузии компонент системы. Нелинейные функции $F(\mathbf{U})$ описывают взаимодействие компонент системы, например, химические превращения в реакциях, влияние одного вида на другой и т.д. Классификация этих моделей обычно проводится, исходя из вида нелинейного источника в правой части по форме, так называемых нуль-изоклин источника [102, 116].

Вид нуль-изоклины и соответствующая ей классификация отражает характер равновесного состояния в среде и способы его достижения при заданной форме нелинейного источника. Согласно [102, 116] имеются следующие основные типы систем “V'', “N'', “Λ'' и “$''$-системы. Вид первой буквы в названии отражает характерный вид графика 0-изоклины.

Наиболее простой формой систем реакция-диффузия являются двухкомпонентные системы, называемые часто системами активатор-ингибитор, имеющие следующий общий вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(u,v) + D_1\Delta u, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = G(u,v) + D_2\Delta v, \tag{8.2}$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}. \tag{8.3}$$

Здесь Δ - оператор Лапласа ($\varepsilon_i = 1$) или Д'Аламбера ($\varepsilon_i = \pm 1$). Условно, u - концентрация активатора, а v - ингибитора, что определяется формой 0-изоклин $F(u,v) = 0$, $G(u,v) = 0$ и связано с возможной практической реализацией таких систем в химических реакциях. Хотя в большинстве приложений $n = 2$ и рассматриваются в основном модели с оператором Лапласа, однако, рассматриваются и модели в трехмерном координатном пространстве и модели с оператором Д'Аламбера, что соотвествует диффузионным моделям с нарушением локального равновесия, а диффузионные уравнения превращаются в простейшем случае в уравнения телеграфного типа. В случае $n > 3$ такие модели в принципе могут иметь значение для развития многомерных теорий физического пространства.

Еще одним важным классом систем такого типа являются системы типа Фитц Хью-Нагумо (ФХН) [134, 102, 119], в которых отсутствует диффузия одной или нескольких компонент при том, что другие компоненты системы диффундируют в среде. Такие системы являются частным случаем систем (8.1) и (8.2) при условии, что некоторые коэффициенты диффузии обращаются в ноль: $D_i = 0$. Двухкомпонентная система ФХН описывается уравнениями [134, 102, 119]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(u,v) + D_1\Delta u, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = G(u,v). \tag{8.4}$$

Разнообразие моделей типа (8.1) весьма велико. Однако, в большинстве своем эти модели не имеют богатых классов точных решений, что, как указывалось во Введении, затрудняет теоретический анализ волновых структур в системах, описываемых этими уравнениями, условий их возникновения и устойчивости. Однако, как было показано в работах [111, 112], среди систем (8.1) существует класс моделей, который допускает существование пространственных волновых структур с простой динамикой и функциональной формой, представимой в виде точных решений в классе элементарных функций. Системы этого типа отличаются от других РД-систем наличием специальной зависимости нелинейных источников от компонент вектора состояния среды. Именно, эта зависимость подобна нелинейности ДЦТ (см. главу 5). Общий вид этой нелинейности следующий

$$F(u_1, \ldots, u_n) = \sum_{i=1}^{k} C_i \exp\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j\}. \tag{8.5}$$

Такая нелинейность соотвествует обобщенным ДЦТ (см. например, [63, 17, 117]). Естественно, не все модели с нелинейностями такого типа допускают богатые классы точных решений. Однако, совокупность моделей, имеющих такие классы решений в действительности достаточно обширна. Это позволяет находить применение этим моделям в ряде конкретных задач описания автоволн и когерентных структур.

Системы типа (8.1),(8.2) или (8.4) с экспоненциальной нелинейностью (8.5), повидимому, до недавнего времени в явном виде не рассматривались в теории автоволн. Это связано с тем, что большинство примеров модельных уравнений для автоволн, например, уравнения Жаботинского [110, 102, 116] (описывающие реакцию Белоусова-Жаботинского), уравнения модели “брюсселятора” [135, 124, 102, 132] и “орегонатора” и т.п. (см. [102, 116, 133]), включают нелинейность степенного вида. Степенная нелинейность часто не является очевидным следствием каких-либо строгих физических законов, а диктуется общими соображениями, например, простотой вида нелинейного источника, удовлетворяющего некоторым ограничениям типа закона действующих масс для равновесного состояния многокомпонентной химической системы. В случае моделей типа моделей Лотки-Вольтерра, описывающих конкуренцию видов в одном регионе, степенная нелинейность появляется как следствие некоторых простых соображений относительно вероятностного характера взаимодействия видов. Исходя из этого, можно вполне найти подходящие мотивы введения нелинейных источников (8.5), удовлетворяющих тем же общим соображениям, что и источники со степенной нелинейностью. Некоторые из таких соображений будут представлены далее. Однако, модели вида (8.5) могут иметь и непосредственное отношение к моделям автоволн с термодиффузией или турбулентного тепломассопереноса, когда коэффициенты диффузии вещества и коэффициенты теплопроводности становятся нелинейными функциями параметров системы, т.е. u_i [102, 116].

8.2 Классификация моделей типа диффузионных цепочек Тоды

8.2.1 Классификация по форме 0-изоклин

Наиболее интересным следствием представления решений ДЦТ в форме квадратичных форм является возможность их использования при построении точных решений моделей типа (8.1), (8.2), (8.4) со специальным видом нелинейного источника в форме, характерной для обобщенных цепочек Тоды. В качестве первого примера в данной главе рассмотрим системы типа (8.2) с функциями $F(u,v)$ и $G(u,v)$, имеющими вид нелинейности, аналогичный уравнению Лиувилля или двумеризованной цепочке Тоды (ДЦТ) и многокомпонентные системы РД с аналогичного вида нелинейностью. Наиболее детально будут исследованы две системы. Первая из них имеет вид:

$$F(u,v) = \mu + \frac{\nu_1 e^{u+v} - \lambda_1}{e^{2u}}, \quad G(u,v) = -\mu - \frac{\nu_2 e^{u+v} + \lambda_2}{e^{2v}}, \tag{8.6}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \mu, \nu_1, \nu_2$ - некоторые постоянные. В дальнейшем будем называть ее системой активатор-ингибитор Тоды типа V (АИTV). Вторая система тесно связана с первой и имеет похожий вид:

$$\begin{aligned} F(u,v) &= 2\mu + \nu_1 e^{-u} - \nu_2 e^{u} - \lambda_1 e^{-u-v} - \lambda_2 \frac{D_1}{D_2} e^{u-v}, \\ G(u,v) &= \nu_1 e^{-u} + \nu_2 e^{u} + \lambda_2 e^{u-v} - \lambda_1 \frac{D_2}{D_1} e^{-u-v}, \end{aligned} \tag{8.7}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2$ - те же, что и в (8.6) постоянные. Эту систему будем называть системой активатор-ингибитор Тоды типа N (АИTN). Тип системы определяется с точки зрения общей классификации возбудимых систем, проведенной в [116]. Так система АИTV принадлежит к системам типа V или Λ, что определяется тремя основными типами асимптотического поведения кривых 0-изоклин $F(u,v)=0$:

$$v=\ln\{\frac{\lambda_1}{\nu_1}e^{-u}-\frac{\mu_1}{\nu_1}e^{u}\}.$$

В случае $\lambda_1/\nu_1 > 0$, $\mu_1/\nu_1 < 0$ (8.6) это V - система, в случаях $\lambda_1/\nu_1 > 0$, $\mu_1/\nu_1 > 0$ и $\lambda_1/\nu_1 < 0$, $\mu_1/\nu_1 < 0$ - Λ-система, а в случае $\lambda_1/\nu_1 < 0$, $\mu_1/\nu_1 > 0$ 0-изоклина комплексная и система не имеет действительных точек равновесия.

Аналогичные кривые имеют место и для уравнения $G(u,v)=0$ с поворотом осей на 90^o. Уравнение для стационарных точек системы имеет вид:

$$\mu(\mu^2-\nu_1\nu_2)U^4+\left[\lambda_1(\nu_1\nu_2-2\mu^2)+\lambda_2\nu_1^2\right]U^2+\mu\lambda_1^2=0,\quad V=\lambda_1U^{-1}-\mu U, \tag{8.8}$$

где $U=e^u$, $V=e^v$. Система АИТN принадлежит к системам типа N или в зависимости от параметров системы, что также определяется видом 0-изоклины $F(u,v)=0$:

$$v=\ln\frac{\lambda_1e^{-u}+\lambda_2\frac{D_1}{D_2}e^u}{\nu_1e^{-u}-\nu_2e^u+2\mu}.$$

Таким образом рассматриваемые системы (8.6) и (8.7) образуют набор простейших моделей, который содержит все основные типы моделей, соответствующих классификации по 0-изоклинам. При этом, как будет показано, их точные решения строятся одинаковым образом и отличаются лишь асимптотическим поведением друг от друга. Отсюда следует, что классификация по 0-изоклинам во многих отношениях оказывается слишком грубой и не чувствительной к более тонким характеристикам решений, которыми может обладать каждая из этих систем.

8.2.2 Классификация по модовой структуре систем

Еще одним признаком того, что классификация по 0-изоклинам оказывается не всегда полезной, служат и следующие соображения. Более общим классом моделей ДфЦТ, которые возникают в рамках метода квадратичных форм, являются многокомпонентные системы, функции $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ которых (8.1) имеют вид аналогичный следующему:

$$F_i(u_1,u_2,\ldots,u_n)=e^{-2u_i}\left(\lambda_i+e^{u_i}\sum_{k=1}^{n}\mu_{ik}e^{u_k}\right) \tag{8.9}$$

или виду, являющемуся некоторой линейной комбинацией таких функций. Здесь λ_i, μ_{ij} - постоянные параметры модели. В случае таких многокомпонентных систем классификация с помощью 0-изоклин становится вообще мало прозрачной, поскольку в одной и той же модели, могут существовать функции $F_i(\mathbf{U})$, принадлежащие разным типам 0-изоклин. Поэтому такая классификация систем типа реакция-диффузия, полезная с точки зрения отличия моделей по некоторым общим признакам, характеризующим физические процессы в целом, мало чувствительна к форме допустимых структур и их динамики в таких моделях, что определяется более тонкими характеристиками моделей.

Изложенная в главе 2, теория ДЦТ, основанная на методе квадратичных форм, позволяет описать в общем несколько различных классов моделей ДфЦТ. Все такие модели возникают как модели, допускающие решения в виде квадратичных форм

$$\Psi_a = \sum_{i=1}^{N} h_{aij}(t)\psi_i(z)\psi_j^*(\bar{z}), \quad a = 1, \ldots, M, \tag{8.10}$$

с коэффициентами $h_{aij}(t)$, зависящими теперь от времени, при условии автономности систем уравнений этих моделей. Согласно (8.10) модели очевидно будут различаться по размерности N квадратичных форм и числу компонент M независимых неизвестных функций Ψ_a, описывающих физические компоненты модели. Для ДЦТ эти числа жестко связаны, если на функции $\psi_i(z)$ не накладываются дополнительные ограничения. В этом случае $N = M$. В случае редукции ДЦТ число независимых компонент может уменьшится. Например, такими редуцирующими условиями, важными для дальнейшего, являются условия периодичности ДЦТ. Таким образом, в общем случае $M \leq N$.

Размерность квадратичных форм, равная числу линейно-независимых функций $\psi_i(z)$, из которых они строятся, определяет число независимых пространственных структур (мод) одновременно эволюционирующих в системе. Эту размерность поэтому логично назвать числом пространственных мод или просто мод в системе. Число же независимых квадратичных форм определяет число различных физических компонент в системе, эволюционирующих одновременно. В случае интерпретации таких моделей с точки зрения моделей реакция-диффузия число M фактически равно числу различных компонент, участвующих в химических реакциях. В дальнейшем это число будем называть просто числом компонент системы.

В последующих главах будут изложены результаты исследований, касающихся многомерных уравнений типа ДфЦТ. Отметим сразу, что предложенная здесь классификация переносится и на многомерные модели. Сопоставляя ее со структурой представления решений ДЦТ предыдущей главы, можно сделать следующее дополнительное замечание. Число мод N в системе определяется размерностью комплексного пространства $\mathbf{C}^N$, на котором определены вектор-функции $\mathbf{R}_0 = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_N)$, $\mathbf{R}_0^* = (\psi_1^*, \phi_2^*, \ldots, \phi_N^*)$, скалярное эрмитово произведение которых и есть действительная квадратичная форма, представляющая решение ДфЦТ:

$$\Psi(z, \bar{z}) = (\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_0^*).$$

Как в случае ДЦТ вектор функции $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}_0(z)$ и $\mathbf{R}_0^* = \mathbf{R}_0^*(\bar{z})$ определяют параметрически две кривые в $\mathbf{C}^N$. В многомерных ДфЦТ решения представляются n-формами, где n - размерность координатного пространства модели с оператором Д‘Аламбера и удвоенная размерность координатного пространства - для моделей с оператором Лапласа. Размерность пространства n в этом случае совпадает с числом кривых в $\mathbf{C}^N$, на которых определено решение как n-форма. На самом деле, как было показано в Главе 6, число кривых m в общем случае для данной размерности n координатного пространства может быть больше чем n (или $2n$). Поэтому классификация решений может быть дополнена параметром равным числу кривых, на которых определена n-форма.

8.3 Простейшие диффузионные цепочки Тоды

Сформулировав общие принципы классификации моделей по модовой структуре, обратимся к исследованию систем (8.2)-(8.6) и (8.2)-(8.7). Будем искать решение системы (8.2)-(8.6) в виде:

$$\begin{aligned}
&u = \ln \Psi(z, \bar{z}, t), \quad v = \ln \Phi(z, \bar{z}, t), \qquad (8.11)\\
&\Psi = |g(z)|^2 \left\{ a_1(t)|\psi_1|^2 + b_1(t)|\psi_2|^2 + c_1(t)\psi_1(z)\psi_2^*(\bar{z}) + c_1^*(t)\psi_2(z)\psi_1^*(\bar{z}) \right\},\\
&\Phi = |g(z)|^2 \left\{ a_2(t)|\psi_1|^2 + b_2(t)|\psi_2|^2 + c_2(t)\psi_1(z)\psi_2^*(\bar{z}) + c_2^*(t)\psi_2(z)\psi_1^*(\bar{z}) \right\},
\end{aligned}$$

где $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, $\Delta = 4\frac{\partial}{\partial z \partial \bar{z}}$, знак * - означает комплексное сопряжение, функции $a_1(t), b_1(t), a_2(t), b_2(t)$ - действительные, а $c_1(t), c_2(t)$ - комплексные функции t, функции $\psi_1(z), \psi_2(z), g(z)$ - аналитические функции комплексной переменной z. Подставляя (8.11) в (8.2), получаем следующие тождества:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D_1 \Delta u = -D_1 \frac{|g(z)|^4 (a_1 b_1 - |c_1|^2)|W_{12}(z)|^2}{\Psi^2} + \tag{8.12}$$
$$+ \frac{|g(z)|^2 (\{\dot{a}_1 |\psi_1(z)|^2 + \dot{b}_1 |\psi_2(z)|^2 + \dot{c}_1 \psi_1(z)\psi_2^*(\bar{z}) + \dot{c}_1^* \psi_2(z)\psi_1^*(\bar{z})\}}{\Psi};$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} - D_2 \Delta v = -D_2 \frac{|g(z)|^4 (a_2 b_2 - |c_2|^2)|W_{12}(z)|^2}{\Phi^2} + \tag{8.13}$$
$$+ \frac{|g(z)|^2 (\{\dot{a}_2 |\psi_1(z)|^2 + \dot{a}_2 |\psi_2(z)|^2 + \dot{c}_2 \psi_1(z)\psi_2^*(\bar{z}) + \dot{c}_2^* \psi_2(z)\psi_1^*(\bar{z})\}}{\Phi},$$

здесь

$$W_{12}(z) = \psi_1 \frac{d}{dz}\psi_2 - \psi_2 \frac{d}{dz}\psi_1$$

- определитель Вронского для двух функций $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$. Определитель Вронского отличен от нуля, когда функции $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ - линейно независимы. Поэтому будем предполагать линейную независимость этих функций. Для того, чтобы выражения в правых частях тождеств (8.12) совпадали с (8.6) необходимо потребовать выполнение следующих условий:

$$a_2(t) = \dot{a}_1 - \mu_1 a_1,\ b_2(t) = \dot{b}_1 - \mu_1 b_1,\ c_2(t) = \dot{c}_1 - \mu_1 c_1, \tag{8.14}$$
$$(a_1 b_1 - |c_1|^2) D_1 = \lambda_1 = \mathrm{const}, \quad (a_2 b_2 - |c_2|^2) D_2 = \lambda_2 = \mathrm{const},$$
$$|W_{12}|^2 |g|^4 = 1, \quad \mu_1 = \mathrm{const}, \quad \mu_2 = \mathrm{const},$$
$$\frac{d}{dt}(\dot{a_1} - \mu_1 a_1) = -\nu_1 \nu_2 a_1 + \mu_2(\dot{a}_1 - \mu_1 a_1),$$
$$\frac{d}{dt}(\dot{b_1} - \mu_1 b_1) = -\nu_1 \nu_2 b_1 + \mu_2(\dot{b}_1 - \mu_1 b_1), \tag{8.15}$$
$$\frac{d}{dt}(\dot{c_1} - \mu_1 c_1) = -\nu_1 \nu_2 c_1 + \mu_2(\dot{c}_1 - \mu_1 c_1).$$

Три уравнения (8.15) имеют один и тот же общий вид уравнения затухающих колебаний

$$\ddot{F} - (\mu_1 + \mu_2)\dot{F} + (\mu_1 \mu_2 + \nu_1 \nu_2) F = 0 \tag{8.16}$$

с декрементом затухания $\gamma = (\mu_1 + \mu_2)/2$, и собственной частотой колебаний
$\Omega = \sqrt{(\mu_1 \mu_2 + \nu_1 \nu_2)}$. Имеется три основных типа решений уравнения

(8.16)

$$F(t) = \begin{cases} e^{-\gamma t}(F_1 \cos(\omega t) + F_2 \sin(\omega t)), & \omega^2 > 0; \\ e^{-\gamma t}(F_1 \mathrm{ch}(\omega t) + F_2 \mathrm{sh}(\omega t)), & \omega^2 < 0; \\ e^{-\gamma t}(F_1 t + F_2), & \omega^2 = 0, \end{cases} \tag{8.17}$$

где F_1, F_2 - постоянные интегрирования, $\omega^2 = \Omega^2 - \gamma^2$. В случае $\omega^2 > 0$ можно положить

$$\begin{aligned} a_1(t) &= e^{-\gamma t}(A_1 \cos(\omega t) + A_2 \sin(\omega t)), \\ b_1(t) &= e^{-\gamma t}(B_1 \cos(\omega t) + B_2 \sin(\omega t)), \\ c_1(t) &= e^{-\gamma t}(C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)), \end{aligned}$$

где A_1, A_2, B_1, B_2 - произвольные действительные, а C_1 и C_2 - произвольные комплексные постоянные. Тогда

$$\begin{aligned} a_1 b_1 - |c_1|^2 = e^{-2\gamma t} \big(&(A_1 B_2 + A_2 B_1 - C_1 C_2^* - C_2 C_1^*) \cos(\omega t) \sin(\omega t) + \\ &+ (A_1 B_1 - |C_1|^2) \cos^2(\omega t) + (A_2 B_2 - |C_2|^2) \sin^2(\omega t) \big). \end{aligned}$$

Аналогичное выражение имеет место и для a_2, b_2, c_2. Для того, чтобы параметры λ_1 и λ_2 были постоянными, необходимо потребовать

$$\begin{aligned} &\gamma = (\mu_1 + \mu_2)/2 = 0, \quad A_1 B_2 + A_2 B_1 - C_1 C_2^* - C_2 C_1^* = 0, \\ &(A_1 B_1 - |C_1|^2) = (A_2 B_2 - |C_2|^2). \end{aligned} \tag{8.18}$$

При этом

$$\omega = \Omega, \quad \lambda_1 = D_1(A_1 B_1 - |C_1|^2), \quad \lambda_2 = D_2(A_1 B_1 - |C_1|^2)(\Omega^2 + \mu^2),$$

где $\mu = \mu_1 = -\mu_2$ и $\Omega^2 = \nu_1 \nu_2 - \mu^2$.

Соответствующий класс точных решений модели АИТV можно представить в виде:

$$\begin{aligned} u(z, \bar z, t) &= \ln P^+(z, \bar z) + \ln\cos(\Omega t - \Theta_1(z, \bar z)), \\ v(z, \bar z, t) &= \ln Q^+(z, \bar z) + \ln\cos(\Omega t + \Theta_2(z, \bar z)), \\ P^+(z, \bar z) &= \sqrt{H_1^2 + H_2^2}, \\ Q^+(z, \bar z) &= \frac{1}{\nu_1} \sqrt{(\Omega H_2 - \mu H_1)^2 + (\mu H_2 + \Omega H_1)^2}, \\ \mathrm{tg}\Theta_1(z, \bar z) &= \frac{H_1(z, \bar z)}{H_2(z, \bar z)}, \quad \mathrm{tg}\Theta_2(z, \bar z) = \frac{\mu H_2 + \Omega H_1}{\Omega H_2 - \mu H_1}, \end{aligned} \tag{8.19}$$

где

$$H_1(z,\bar z) = \frac{A_1|\psi_1|^2 + B_1|\psi_2|^2 + C_1\psi_1\psi_2^* + C_1^*\psi_2\psi_1^*}{|W_{12}|}, \qquad (8.20)$$
$$H_2(z,\bar z) = \frac{A_2|\psi_1|^2 + B_2|\psi_2|^2 + C_2\psi_1\psi_2^* + C_2^*\psi_2\psi_1^*}{|W_{12}|}$$

и постоянные $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ удовлетворяют соотношениям (8.18). При этом функции Ψ и Φ связаны простым соотношением

$$\Phi = \frac{1}{\nu_1}\left(\dot\Psi - \mu\Psi\right), \qquad (8.21)$$

а $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ - произвольные аналитические функции.

Полученные решения системы АИТV представляют собой общее решение задачи Коши для системы (8.2)-(8.6) с начальным распределением функций $u = u(z,\bar z,0),\ v = v(z,\bar z,0)$ в виде квадратичных форм, зависящих от двух произвольных аналитических функций $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$. Это позволяет удовлетворять широкому классу начальных условий задачи при некоторых общих свойствах решений на бесконечности, например, $u \to const, v \to const$ при $r = \sqrt{x^2+y^2} \to \infty$ - среда находится в равновесии на бесконечности.

Решения системы АИТN (8.2)-(8.7) получаются из решений системы (8.19) с помощью простейшего преобразования

$$\tilde u = u - v = \ln\{\frac{\Psi}{\Phi}\}, \quad \tilde v = u + v = \ln\{\Psi\Phi\}, \qquad (8.22)$$

где $\tilde u,\ \tilde v$ - решения системы АИТN, а u, v - решения системы АИТV (8.19).

Среди всех типов решений особый интерес представляют периодические по времени решения типа спиральных волн. Решения типа спиральных волн можно получить в явном виде, если специальным образом выбрать функции $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$, например,

$$\psi_1(z) = p_1 z^m, \quad \psi_2(z) = p_2 z^n,$$

где $p_1, p_2, m \neq n$ - произвольные комплексные постоянные. Периодические по времени решения существуют при условии $\Omega^2 > 0$. Однако как легко видеть такие решения в любой точке пространства через конечный промежуток времени перестают быть ограниченными (функции Ψ и Φ меняют знак).

Несингулярные решения существуют при $\Omega^2 < 0$ и $\Omega = 0$. Для случая $\Omega^2 < 0$ решения могут быть представлены в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
&u(z,\bar{z},t) = \ln P^-(z,\bar{z}) + \ln\{\mathrm{ch}(\Omega t + \Theta_1(z,\bar{z}))\},\\
&v(z,\bar{z},t) = \ln Q^-(z,\bar{z}) + \ln\{\mathrm{ch}(\Omega t + \Theta_2(z,\bar{z}))\},\\
&P^-(z,\bar{z}) = \sqrt{H_1^2 - H_2^2},\\
&Q^-(z,\bar{z}) = \frac{1}{\nu_1}\sqrt{(\Omega H_2 - \mu H_1)^2 - (\mu H_2 - \Omega H_1)^2},\\
&\mathrm{th}\Theta_1(z,\bar{z}) = \frac{H_2(z,\bar{z})}{H_1(z,\bar{z})}, \quad \mathrm{th}\Theta_2(z,\bar{z}) = \frac{\Omega H_1 - \mu H_2}{\Omega H_2 - \mu H_1}.
\end{aligned}
\tag{8.23}
$$

Среди непериодических существует еще один важный класс решений типа переключения среды (пропущенный в [111]), соответствующий значению $\Omega = 0$. В этом случае решения описываются следующими соотношениями

$$
\begin{aligned}
&u(z,\bar{z},t) = \ln\{(H_2 e^{-\gamma t}) + H_1\},\\
&v(z,\bar{z},t) = \ln\{(\delta H_2 e^{-\gamma t} - \mu_1 H_1\},
\end{aligned}
\tag{8.24}
$$

где функции H_1 и H_2 те же, что и в (8.20), но с параметрами, удовлетворяющими следующим алгебраическим соотношениям:

$$
\begin{aligned}
&\gamma = (\mu_1 + \mu_2)/2, \delta = (\mu_2 - \mu_1)/2, \quad \Omega^2 = \nu_1\nu_2 + \mu_1\mu_2 = 0,\\
&(A_2B_2 - |C_2|^2) = 0, \quad A_1B_2 + A_2B_1 - C_1C_2^* - C_2C_1^* = 0,
\end{aligned}
\tag{8.25}
$$

причем $\mu_1 \neq -\mu_2$. Эти решения описывают переход распределения концентраций n_1 и n_2 в пространстве из состояния

$$n_1(x,y,0) = \frac{1}{H_1 + H_2}, \quad n_2(x,y,0) = \frac{1}{-\mu_1 H_1 + \delta H_2}$$

в момент времени $t = 0$ в состояние

$$n_1(x,y,\infty) = \frac{1}{H_1}, \quad n_2(x,y,\infty) = \frac{1}{-\mu_1 H_1}$$

при $t \to \infty$. Таким образом, эти решения в пределе описывают невырожденное состояние при $t \to \infty$ и, если функции H_1 и H_2 не обращаются нигде в ноль, то и не содержат “взрывного” поведения концентраций в пространстве.

Функциональная зависимость концентраций от времени в каждой точке среды для последнего класса решений представляет собой логистическую кривую. Логистический закон эволюции характерен для множества явлений и процессов протекающих в биологических и социальных системах (см. например, [121, 122]). С этой точки зрения данная модель может быть использована в качестве базовой модели эволюции распределенных биологических и социальных сообществ с миграцией особей диффузионного типа и, соответственно, населения,. Более детально о такой модели речь пойдет в следующих разделах данной работы.

8.4 Многокомпонентные модели с двухмодовым возбуждением и простым условием автономности

Двухкомпонентные двухмодовые модели, рассмотренные в предыдущем разделе были исследованы в [111]. Как было показано эти модели не имеют не сингулярных периодических решений в виде двухкомпонентных квадратичных форм. Однако не сингулярные периодические решения существуют для многокомпонентных двухмодовых систем [112].

Рассмотрим диффузионные уравнения следующего общего вида:

$$C_i(u_i)\frac{\partial}{\partial t}q_i - D_i\Delta \ln u_i = J_i(\mathbf{u}), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{8.26}$$

среди которых выделим два основных класса:

$$\frac{\partial}{\partial t}u_i - D_i\Delta u_i = F_i(\mathbf{u}), \quad i = 1, \ldots, N; \tag{8.27}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}u_i - D_i\Delta \ln u_i = G_i(\mathbf{u}), \quad i = 1, \ldots, N. \tag{8.28}$$

Все эти уравнения могут рассматриваться как уравнения эволюции состояния многокомпонентной среды с диффузией, заданного в каждой точке пространства и времени вектором $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, \ldots, u_N\}$. Первый класс уравнений будем называть уравнениями с линейной диффузией, а второй - с нелинейной диффузией. Для первого класса систем коэффициент диффузии постоянен для каждого элемента состояния среды, а для второго - является функцией данного элемента среды: $D_i u_i^{-1}$. Основная идея использования представления решений уравнений Лиувилля в форме (8.10) в задачах, связанных с автоволнами в двумерных средах с диффузией сводится к следующему.

Рассмотрим набор из N квадратичных форм Ψ_i вида:

$$\Psi_i(z,\bar{z},t) = |g(z)|^2 \left\{a_i(t)|\psi_1|^2 + b_i(t)|\psi_2|^2 + c_i(t)\psi_1\psi_2^* + c_i^*(t)\psi_2\psi_1^*\right\}, \quad i = 1,\dots,n \tag{8.29}$$

у которых в общем случае координатные функции ψ_1, ψ_2 и коэффициенты a_i, b_i, c_i являются функциями времени. Введем функции $u_i = \ln\Psi_i$ и рассмотрим действие оператора линейной диффузии на эти функции. Имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}u_i - D_i\Delta u_i &= \frac{1}{\Psi_i^2}\left[\Psi_i\frac{\partial}{\partial t}\Psi_i - D_i(a_ib_i - |c_i|^2)\right] = \\ &= e^{-2u_i}\left[e^{u_i}\frac{\partial}{\partial t}\Psi_i - D_i(a_ib_i - |c_i|^2)\right].\end{aligned} \tag{8.30}$$

Одно из важных требований, которое накладывается на нелинейный источник в теории автоволн - это его автономность, т.е. источник должен зависеть только от элементов состояния самой среды. Отсюда следует, что если найти условия автономности правой части последнего тождества, то это тождество можно рассматривать как уравнение автоволн с источником в правой части. Легко заметить, что условие автономности (8.30) эквивалентно двум условиям:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi_i = \sum_{j=1}^{N} M_{ij}\Psi_j, \quad i = 1,\dots,N; \tag{8.31}$$

$$D_i[a_i(t)b_i(t) - |c_i(t)|^2] = \lambda_i = \text{const}, \tag{8.32}$$

$$|W_{12}|^2|g|^4 = 1 \tag{8.33}$$

при дополнительном требовании, что коэффициенты матрицы $\mathbf{M} = \{M_{ij}\}$ - постоянные. Здесь, как и раньше $W_{12}(z) = [\psi_1, \psi_2(z)]$. Матрицу $\mathbf{M}$ в дальнейшем будем называть матрицей взаимодействия. При выполнении этих условий уравнения автоволн в многокомпонентной среде примут вид

$$\frac{\partial}{\partial t}u_i - D_i\Delta u_i = e^{-2u_i}\left[e^{u_i}\sum_{j=1}^{N} M_{ij}e^{u_j} - \lambda_i\right], \quad i,j = 1,\dots,N. \tag{8.34}$$

Чтобы получить модели с уравнениями второго типа (8.28), функции u_i выберем в следующем виде: $u_i = \Psi_i^n$, n - некоторое вещественное число, Ψ_i - снова квадратичные формы вида (8.10), коэффициенты которых a_i, b_i, c_i являются функциями времени. Тогда имеем следующее тождество:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}u_i - D_i\Delta\mathrm{ln}u_i = \frac{\partial}{\partial t}\Psi_i^n - D_i n\Delta\mathrm{ln}\Psi_i = \\
&= n\Psi_i^{n-1}\left[\frac{\partial}{\partial t}\Psi_i - D_i(a_ib_i - |c_i|^2)\Psi_i^{-n-1}\right] = \\
&= nu_i^{(n-1)/n}\left[\frac{\partial}{\partial t}\Psi_i - D_i(a_ib_i - |c_i|^2)u_i^{-(n+1)/n}\right].
\end{aligned} \tag{8.35}$$

Очевидно, условия автономности правой части этого тождества, эквивалентны условиям (8.31)-(8.32). Если эти условия выполнены, то уравнения модели будут выглядеть так:

$$\frac{\partial}{\partial t}u_i - D_i\Delta\mathrm{ln}u_i = nu_i^{(n-1)/n}\left[\sum_{j=1}^{N} M_{ij}u_j^{1/n} - \lambda_i u_i^{-(n+1)/n}\right], \quad i,j = 1,\ldots,N. \tag{8.36}$$

Примеры моделей типа (8.36) для некоторых значений n приведены ниже:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{n=1}: \quad \frac{\partial}{\partial t}u_i - D_i\Delta\mathrm{ln}u_i = \left[\sum_{j=1}^{N} M_{ij}u_j - \lambda_i u_i^{-2}\right], \\
&\mathbf{n=-1}: \quad \frac{\partial}{\partial t}u_i - D_i\Delta\mathrm{ln}u_i = -u_i^2\left[\sum_{j=1}^{N} M_{ij}u_j^{-1} - \lambda_i\right], \\
&\mathbf{n=-1/2}: \quad \frac{\partial}{\partial t}u_i - D_i\Delta\mathrm{ln}u_i = -\frac{1}{2}u_i^3\left[\sum_{j=1}^{N} M_{ij}u_j^{-2} - \lambda_i u_i\right], \\
&\mathbf{n=1/2}: \quad \frac{\partial}{\partial t}u_i - D_i\Delta\mathrm{ln}u_i = \frac{1}{2}u_i^{-1}\left[\sum_{j=1}^{N} M_{ij}u_j^{2} - \lambda_i u_i^{-3}\right].
\end{aligned}$$

Пользуясь тем, что при любом n тождества (8.35) относятся к одной и той же квадратичной форме Ψ_i, можно получить более общий тип модели, чем (8.36). Действительно, складывая почленно тождества (8.35), предварительно умножив их на постоянные $a_n = V^{[n]}(0)/n!$, где $V(x)$ - некоторая аналитическая в нуле функция, приходим к следующему тождеству

$$\frac{\partial}{\partial t}V(\Psi_i) - D_iV'(1)\Delta\mathrm{ln}\Psi_i = V'(\Psi_i)\sum_j M_{ij}\Psi_j - l_iV'(1)\Psi_i^{-2}, \tag{8.37}$$

где l_i и $\mathbf{M}$ - те же, что и в (8.31) и (8.32), а $V'(1) = [dV(x)/dx]_{x=1}$. Совокупность тождеств (8.37), рассматриваемых как уравнения относительно Ψ, представляет наиболее общий класс моделей с “простыми” условиями автономности (8.31) и (8.32).

8.5 Решение уравнений автономности

Существует два подхода к построению точных решений моделей с условиями автономности (8.31),(8.32). В первом подходе полагается, что функции ψ_1 и ψ_2 не зависят от t и вся зависимость от времени сосредоточена в коэффициентах квадратичной формы $a_i(t), b_i(t), c_i(t)$. Второй способ основан на требовании, что ψ_1 и ψ_2 от времени зависят, в то время как a_i, b_i, c_i - постоянные. Во втором случае условия (8.32) выполняются автоматически, но решение уравнений (8.31) следует согласовывать с пространственной структурой функций ψ_1, ψ_2, которая ограничивается условием (8.33). В первом же случае решение (8.31) сводится к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $a_i(t), b_i(t), c_i(t)$. Получить решения этих уравнений не сложно, но на эти решения накладываются дополнительные алгебраические условия (8.32). При этом условие (8.33) ограничивает лишь выбор одной из функций $\psi_1(z)$ или $\psi_2(z)$ при произвольной второй. Рассмотрим оба способа построения решений найденных выше моделей.

8.5.1 Метод собственных векторов

Условия автономности системы (8.37), в случае когда ψ_1, ψ_2 не зависят от t, сводятся к следующей системе уравнений

$$\dot{a}_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} a_j, \quad \dot{b}_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} b_j, \quad \dot{c}_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} c_j, \quad i = 1, \dots, n; \tag{8.38}$$

$$(a_i(t) b_i(t) - |c_i(t)|^2) f_i^2 D_i = l_i = \text{const.} \tag{8.39}$$

Условие (8.33) лишь накладывает ограничения на совместный выбор ψ_1 и ψ_2 как функций z. Исходя из требования действительности $\Psi_i(z, \bar{z}, t)$, функции $a_i(t)$ и $b_i(t)$ должны быть действительными, а $c_i(t)$ могут быть комплексными.

Пусть $\mathbf{n}^{(a)},\ a = 1, \dots, n$ - совокупность собственных векторов действительной матрицы $\mathbf{M} = (m_{ij})$, соответствующих собственным числам λ_a:

$$m_{ij} = \sum_{a=1}^{n} \lambda_a \bar{n}_j^{(a)} n_i^{(a)}. \tag{8.40}$$

Здесь $\bar{n}_i^{(a)}$ - компоненты сопряженных собственных векторов. Собственные и сопряженные им вектора удовлетворяют следующим соотноше-

ниям
$$\sum_{i=1}^{n} \bar{n}_i^{(a)} n_i^{(b)} = \delta^{ab}.$$
В силу действительности матрицы $\mathbf{M}$ каждому комплексному ее собственному числу λ_a соответствует комплексно-сопряженное число $\lambda_b = \lambda_a^*$. Соответствующие собственные вектора также будут комплексно сопряжены. Тогда решения для коэффициентов можно представить в виде:
$$a_i(t) = \sum_{a=1}^{n} A_a n_i^{(a)} e^{\{\lambda_a t\}}, \quad b_i(t) = \sum_{a=1}^{n} B_a n_i^{(a)} e^{\{\lambda_a t\}}, \quad c_i(t) = \sum_{a=1}^{n} C_a n_i^{(a)} e^{\{\lambda_a t\}}. \tag{8.41}$$
Постоянные A_a, B_a, C_a должны выбираться таким образом, чтобы функции $a_i(t)$ и $b_i(t)$ были действительными и выполнялись n соотношений (8.39). Подстановка этих соотношений в (8.41) приводит, вообще говоря, к совокупности из n^2 алгебраических уравнений на постоянные A_a, B_a, C_a. В соотношениях
$$\sum_{a,b=1}^{n} D_i n_i^{(a)} n_i^{(b)} e^{\{\lambda_a+\lambda_b\}t} (A_a B_b - C_a C_b^* - C_a^* C_b) = l_i = const, \quad i = 1, \ldots, n$$
коэффициенты при экспонентах, у которых показатель $\lambda_a + \lambda_b$ отличен от нуля, должны обращаться в ноль. Однако, в некоторых случаях число уравнений меньше, чем n^2, и в этом случае имеются решения с постоянными параметрами модели l_i.

Рассмотрим в качестве примера случай $n = 3$. Потребуем, чтобы собственные числа матрицы $\mathbf{M}$ имели значения $(0, -i\Omega, +i\Omega)$. Пусть $\mathbf{n}^{(1)}, \mathbf{n}^{(2)}, \mathbf{n}^{(3)} = \mathbf{n}^{(2)*}$ - соответствующие им собственные вектора. Вектор $\mathbf{n}^{(1)}$ имеет действительные компоненты. Вектора $\bar{\mathbf{n}}^{(2,3)}$, сопряженные собственным векторам матрицы $\mathbf{M}$ равны просто комплексно сопряженным векторам: $\bar{\mathbf{n}}^{(2,3)} = \mathbf{n}^{(2,3)*}$, причем
$$\sum_{i=1}^{3} n_i^{a*} n_i^{a} = 0, \quad a = 2, 3.$$
Поэтому
$$m_{ij} = i\Omega (n_j^{(2)*} n_i^{(2)} - n_i^{(2)*} n_j^{(2)}), \quad i, j = 1, 2, 3,$$
и функции $a_i(t), b_i(t), c_i(t)$ можно представить в виде:
$$a_i(t) = a_0 n_i^{(1)} + A n_i^{(2)} e^{i\Omega t} + A^* (n_i^{(2)})^* e^{-i\Omega t},$$

$$
\begin{aligned}
&b_i(t) = b_0 n_i^{(1)} + B n_i^{(2)} e^{i\Omega t} + B^*(n_i^{(2)})^* e^{-i\Omega t},\\
&c_i(t) = c_0 n_i^{(1)} + C_1 n_i^{(2)} e^{i\Omega t} + C_2(n_i^{(2)})^* e^{-i\Omega t},\\
&c_i^*(t) = c_0^* n_i^{(1)} + C_2^* n_i^{(2)} e^{i\Omega t} + C_1^*(n_i^{(2)})^* e^{-i\Omega t}.
\end{aligned}
$$

Числа a_0, b_0 - действительные, A, B, c_0, C_1, C_2 - комплексные. Подставляя эти решения в соотношения (8.39) получаем следующую систему алгебраических уравнений:

$$
\begin{aligned}
&a_0 B + b_0 A = c_0 C_2^* + c_0^* C_1,\\
&AB = C_1 C_2^*,\\
&D_i\Big((a_0 b_0 - |c_0|^*)(n_i^{(1)})^2 + (A^*B + AB^* - |C_1|^2 - |C_2|^2) n_i^{(2)} (n_i^{(2)})^*\Big) = l_i,\\
&\qquad\qquad i = 1, 2, 3.
\end{aligned}
$$

Из первых двух уравнений этой системы находятся, например, комплексные постоянные A и B:

$$
B = \frac{1}{2a_0}(c_0 C_2^* + c_0^* C_1) \pm \sqrt{\frac{1}{4a_0^2}(c_0 C_2^* + c_0^* C_1)^2 - C_1 C_2^* \frac{b_0}{a_0}}, \quad A = \frac{C_1 C_2^*}{B}. \tag{8.42}
$$

После этого остается еще восемь действительных постоянных, три из которых при заданных значениях D_i и l_i находятся из последних трех действительных алгебраических условий. Для того, чтобы соответствующие решения системы (8.37) не были сингулярными (необходимое условие) требуется, чтобы функции a_i, b_i, c_i одновременно не обращались в ноль. Достаточными условиями являются требования:

$$
|a_0| > |A|, \quad |b_0| > |B|, \quad |c_0|^2 > \frac{1}{2}(|C_1|^2 + |C_2|^2)
$$

и требования на функции ψ_1, ψ_2: a) эти функции не имеют полюсов и b) эти функции одновременно не обращаются в ноль.

Таким образом показано, что трехкомпонентные модели ДфЦТ с двухмодовым возбуждением имеют точные периодические несингулярные решения.

Применяя аналогичную технику, можно строить решения двухмодовых многокомпонентных систем общего вида (8.37). Отметим следующие общие требования к несингулярности решений таких систем. Общее необходимое условие состоит в том, что все три функции $a_i(t), b_i(t), c_i(t)$ при каждом фиксированном $i = 1, \ldots, n$ не обращались одновременно в ноль. Это условие накладывает ограничения на соотношение фаз колебаний в каждой из функций $a_i(t), b_i(t), c_i(t)$ или на собственные частоты этих колебаний и соответствующие им амплитуды, как в рассмотренном трехкомпонентном случае.

8.5.2 Метод, зависящих от времени координатных функций

Для построения решений в случае, когда a_i, b_i, c_i - постоянные, представим решения (8.37) в виде квадратичных форм вида:

$$\Psi_i(z, \bar{z}, t) = \left\{a_i|\psi_1|^2 + b_i|\psi_2|^2 + c_i\psi_1\psi_2^* + c_i^*\psi_2\psi_1^*\right\} =$$
$$= \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} h_{i,\alpha\beta}\psi_\alpha^*\psi_\beta, \quad i = 1, \ldots, n \tag{8.43}$$

при условии, что $\psi_1 = \psi_1(z,t)$, $\psi_2 = \psi_2(z,t)$. В этом случае условия автономности (8.37) будут иметь несколько другой вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi_\alpha = \sum_{\beta=1}^{2} \Lambda_{\alpha\beta}\psi_\beta, \quad |W_{12}|^2 = 1, \tag{8.44}$$

$$(a_i b_i - |c_i|^2) f_i^2 D_i = l_i = \mathrm{const}, \tag{8.45}$$

$$\mathbf{h}_i\Lambda + \Lambda^{+}\mathbf{h}_i - \sum_{i=1}^{N} m_{ij}\mathbf{h}_j = 0, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{8.46}$$

Здесь $\Lambda = (\Lambda_{\alpha\beta})$ и $\mathbf{h}_i = (\mathbf{h}_{i,\alpha\beta})$ матрицы 2×2, причем матрицы $\mathbf{h}_i$ - эрмитовы и составлены из элементов $h_{i11} = a_i$, $h_{i22} = b_i$, $h_{i12} = c_i$, $h_{i21} = c_i^*$.

Глава 9

Трехмодовые модели типа диффузионных цепочек Тоды

9.1 Общая постановка задачи

В качестве примеров многокомпонентных моделей с трехмодовым возбуждением рассмотрим модели, описывающиеся уравнениями двух типов. Первая из них соответствует уравнениям следующего типа:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi_j^{-1} - D_j\Delta\ln\Psi_j = F_j(\Psi_1, \Psi_2, \ldots), \tag{9.1}$$

а вторая более привычным уравнениям:

$$\frac{\partial}{\partial t}\ln\Psi_j - D_j\Delta\ln\Psi_j = G_j(\Psi_1, \Psi_2, \ldots). \tag{9.2}$$

Для удобства первый тип моделей (9.1) будем называть моделями с нелинейной диффузией, а второй - с линейной. После замены переменных по формулам $u_j = \ln\Psi_j$, эти уравнения приобретают вид ДфЦТ:

$$\frac{\partial}{\partial t}u_j + D_j e^{u_j}\Delta u_j = e^{u_j}F_j(e^{u_1}, e^{u_2}, \ldots),$$
$$\frac{\partial}{\partial t}u_j - D_j\Delta u_j = G_j(e^{u_1}, e^{u_2}, \ldots)$$

соответственно. Заметим, что уравнения типа (9.1) с помощью замены $\Psi_j \to 1/\Psi_j$, могут быть записаны и в несколько иной форме, а именно

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi_j + D_j\Delta\ln\Psi_j = F_j(1/\Psi_1, 1/\Psi_2, \ldots). \tag{9.3}$$

Уравнения этого типа приводятся к еще к одной форме следующего вида:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi_j + \nabla(\frac{D_j}{q_j + \Psi_j}\nabla\Psi_j) = F_j(1/(\Psi_1 - q_1), 1/(\Psi_2 - -q_2), \ldots), \tag{9.4}$$

где q_j - некоторые постоянные. Такие уравнения встречаются в системах с турбулентным переносом вещества и тепла и нелинейными их источниками.

Задача данного раздела - вычислить тип нелинейности и построить классы точных решений для некоторых из этих моделей.

Решения для трехмодовых моделей имеют согласно общей классификации, предложенной в главе 8, представление в виде трехмерных квадратичных форм:

$$\Psi_j(z,\bar{z},t) = (a_j(t)|\psi_1|^2 + b_j(t)|\psi_2|^2 + c_j(t)|\psi_3|^2) \tag{9.5}$$

относительно линейно независимых дифференцируемых функций $\psi_1(z), \psi_2(z), \psi_3(z)$. Для этих функций согласно общим соотношениям, рассмотренным в главе 8, имеются следующее тождества

$$\Delta \ln \Psi_j = \frac{a_j b_j |W_{12}|^2 + b_j c_j |W_{23}|^2 + a_j c_j |W_{13}|^2}{\Psi_j^2}, \tag{9.6}$$

где

$$W_{\alpha\beta}(z) = [\psi_\alpha, \psi_\beta], \quad \alpha \neq \beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3.$$

Введем дополнительно функции вида

$$\begin{aligned}\Phi_j(z,\bar{z},t) = a_j b_j |W_{12}|^2 + b_j c_j |W_{23}|^2 + a_j c_j |W_{13}|^2 = \\ = A_j |W_{23}|^2 + B_j |W_{31}|^2 + C_j |W_{12}|^2,\end{aligned} \tag{9.7}$$

где

$$A_j(t) = c_j b_j = \frac{Q_j}{a_j}, \quad B_j(t) = a_j c_j = \frac{Q_j}{b_j}, \quad C_j(t) = a_j b_j = \frac{Q_j}{c_j}, \tag{9.8}$$

и $Q_j(t) = a_j(t) b_j(t) c_j(t)$. Согласно (5.12) для произвольных $\psi_1(z), \psi_2(z), \psi_3(z)$ функции Φ_j удовлетворяют тождеству

$$\Delta \ln \Phi_j = a_j b_j c_j |W_{123}|^2 \frac{a_j |\psi_1|^2 + b_j |\psi_2|^2 + c_j |\psi_3|^2}{\Phi_j^2}, \tag{9.9}$$

где

$$W_{123}(z) = det \begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_1' & \psi_1'' \\ \psi_2 & \psi_2' & \psi_2'' \\ \psi_3 & \psi_3' & \psi_3'' \end{pmatrix}.$$

Функция $W_{123}(z)$ - определитель Вронского функций ψ_i. Исходя из этих тождеств, можно получить общие соотношения на функции

$a_j(t),\ b_j(t),\ c_j(t)$, при которых функции Ψ_j и Φ_j удовлетворяют уравнениям типа (9.1) или (9.2).

Если не накладывать ни каких ограничений на вид функций $\psi_i(z)$, то сложно найти такие условия, при которых в правой части уравнений (9.1) или (9.2) не будет функций, явным образом зависящих от времени. Действительно, в общем случае функции $|\psi_i|^2$ и $|W_{ij}|^2$ линейно независимы. Поэтому производные по времени функций Ψ_j могут зависеть только от Ψ_j, а производные функций Φ_j - только от Φ_j. Следствием этого и условия постоянства коэффициентов исходных уравнений являются уравнения

$$\dot{a}_j = \sum_{k=1}^{L} m_{jk} a_k, \quad \dot{b}_j = \sum_{k=1} m_{jk} b_k \quad \dot{c}_j = \sum_{k=1}^{L} m_{jk} c_k, \tag{9.10}$$

где $m_{ik} = \text{const}$, а L - число компонент исходной системы. Соотношения для A_j, B_j, C_j теперь автоматически следуют из (9.10). Форма (линейность) и размерность систем уравнений для A_j, B_j, C_j должна быть такой же как и (9.10). Поэтому число различных собственных чисел системы характеристических уравнений для A_j, B_j, C_j не должно превышать L. Поскольку функции A_j, B_j, C_j выражаются через парные произведения функций a_j, b_j, c_j, то число их различных собственных чисел в общем случае удваивается. Последнее накладывает существенные ограничения на матрицу коэффициентов (m_{ik}) в (9.10), удовлетворить которым оказывается сложно.

Другой способ построить разрешимую систему уравнений динамики мод состоит в принятии некоторых ограничений на вид функций $\psi_i(z)$, которые носят характер условий периодичности двумеризованных цепочек Тоды.

Потребуем, чтобы выполнялись соотношения

$$W_{12} = k_3 g(z)\psi_3, \quad W_{23} = k_1 g(z)\psi_1, \quad W_{31} = k_2 g(z)\psi_2, \tag{9.11}$$

где k_1, k_2, k_3 - комплексные постоянные, а $g(z)$ - некоторая произвольная функция. В результате функции Φ будут иметь тот же общий вид (9.5), что и функции Ψ.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (9.11) относительно функций ψ_1, ψ_2, ψ_3 имеет общее решение вида

$$\psi_1(z) = q_1 f(z)\cos\xi(z),\ \ \psi_2(z) = q_2 f(z)\sin\xi(z),$$
$$\psi_3(z) = f(z),\ \ \frac{d}{dz}\xi(z) = \frac{q_3}{g(z)f(z)},$$

где

$$q_1 = i\sqrt{\frac{k_3}{k_1}},\ q_2 = i\sqrt{\frac{k_3}{k_2}},\ q_3 = \sqrt{k_1k_2},$$

а функция $f(z)$ - произвольна. Представление более общее, чем (9.11), и решения соответствующих ему уравнений рассмотрены в главе 12.

9.2 Модели с нелинейной диффузией

Рассмотрим сначала простейшую однокомпонентную модель типа (9.1). Подстановка (9.11) в (9.9) приводит к следующим тождествам:

$$\Delta \ln\Psi = \frac{ab|k_3|^2|\psi_3|^2 + bc|k_1|^2|\psi_1|^2 + ac|k_2|^2|\psi_2|^2}{\Psi^2}. \qquad (9.12)$$

В однокомпонентной модели требование, что нелинейность имеет вид функции, зависящей только от самой неизвестной функции, приводит к следующим уравнениям для функций $a(t), b(t), c(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{a} - D_1bc|k_1|^2 &= \lambda a,\\ \dot{b} - D_1ac|k_2|^2 &= \lambda b,\\ \dot{c} - D_1ab|k_3|^2 &= \lambda c. \end{aligned} \qquad (9.13)$$

Эта система подобна уравнениям, встречающимся в задачах трехволнового взаимодействия, и интегрируется в квадратурах. Ее общее решение строится из следующих соотношений, получающихся прямо из (9.13):

$$\begin{aligned} a^2 &= (\alpha_0 + 2D_1|k_1|^2\int e^{-2\lambda t'}Qdt')e^{2\lambda t},\\ b^2 &= (\beta_0 + 2D_1|k_2|^2\int e^{-2\lambda t'}Qdt')e^{2\lambda t},\\ c^2 &= (\gamma_0 + 2D_1|k_3|^2\int e^{-2\lambda t'}Qdt')e^{2\lambda t}, \end{aligned}$$

где $Q(t) = a(t)b(t)c(t)$, а $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ -постоянные. Перемножая эти уравнения, находим, что $Q(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} Q^2 = {} & (\alpha_0 + 2D_1|k_1|^2\int e^{-2\lambda t'}Qdt') \times \\ & \times(\beta_0 + 2D_1|k_2|^2\int e^{-2\lambda t'}Qdt')(\gamma_0 + 2D_1|k_3|^2\int e^{-2\lambda t'}Qdt')e^{6\lambda t}. \end{aligned}$$

Если ввести функцию $P = \int e^{-2\lambda t'}Qdt'$, то для нее получаем следующее уравнение

$$\left(\frac{d}{dt}P\right)^2 = (\alpha_0 + 2D_1|k_1|^2P)(\beta_0 + 2D_1|k_2|^2P)(\gamma_0 + 2D_1|k_3|^2P)e^{2\lambda t},$$

которое сводится к эллиптическому интегралу

$$\int \frac{dP}{\sqrt{(\alpha_0 + 2D_1|k_1|^2 P)(\beta_0 + 2D_1|k_2|^2 P)(\gamma_0 + 2D_1|k_3|^2 P)}} = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda t} + C_0.$$

Здесь C_0 - постоянная интегрирования.

Два частных решения этих уравнений можно записать в элементарных функциях. Одно - в тригонометрических функциях:

$$a(t) = \frac{a_0 e^{\lambda t}}{\cos\theta}, \quad b(t) = \frac{b_0 e^{\lambda t}}{\cos\theta}, \quad c(t) = c_0 e^{\lambda t} \operatorname{tg}\theta, \tag{9.14}$$

где

$$\theta(t) = \theta_0 \pm D_1 c_0 |k_1||k_2| \frac{e^{\lambda t}}{\lambda}, \ a_0 = \pm c_0 \frac{|k_1|}{|k_3|}, \ b_0 = \pm c_0 \frac{|k_2|}{|k_3|}, \tag{9.15}$$

c_0 - произвольная действительная постоянная. Второе - в гиперболических функциях:

$$a(t) = \frac{a_0 e^{\lambda t}}{\operatorname{sh}\theta}, \quad b(t) = \frac{b_0 e^{\lambda t}}{\operatorname{sh}\theta}, \quad c(t) = c_0 e^{\lambda t} \operatorname{cth}\theta, \tag{9.16}$$

где все постоянные и функция $\theta(t)$ удовлетворяют темже соотношениям (9.15). Заметим, что оба эти решения подбором постоянных могут быть сделаны не сингулярными на любом интервале времени $t > t_0$, поскольку функция $\theta(t)$, играющая роль фазы колебаний в среде, подбором постоянных может быть сделана ограниченной функцией на этом интервале времени.

Построенные точные решения соответствуют однокомпонентной диффузионной модели одного из следующих типов:

$$\begin{aligned}
&-\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \Psi^2 D_1 \Delta \ln\Psi + \lambda\Psi;\\
&-\frac{\partial}{\partial t}u = D_1 e^u \Delta u + \lambda, \qquad u = \ln\Psi;\\
&\frac{\partial}{\partial t}v = -D_1 \nabla\left(\frac{1}{v}\nabla v\right) + \lambda v, \qquad v = \Psi^{-1}.
\end{aligned}$$

Форма этих уравнений объясняет название соответствующих моделей - “модели с нелинейной диффузией”. Уравнение однокомпонентной модели этого типа будет подробно изучено в главе 9, где будет построен более широкий класс точных решений этого уравнения и, в частности, будет рассмотрен специальный принцип суперпозиции выполняющийся для данного уравнения.

Для двухкомпонентной модели типа (9.1) с компонентами вида

$$\Psi(z,\bar{z},t) = |w(z)|^2\left(a(t)|\psi_1|^2 + b(t)|\psi_2|^2 + c(t)|\psi_3|^2\right),$$
$$\Phi(z,\bar{z},t) = |w(z)|^2\left(A(t)|\psi_1|^2 + B(t)|\psi_2|^2 + C(t)|\psi_3|^2\right)$$

условия замыкания модели сводятся к условию $g(z) = 1/w(z)$ и системе обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов квадратичных форм следующего вида:

$$\begin{aligned} \dot{a} + D_1 bc|k_1|^2 &= \mu_1 A + \lambda_1 a, \\ \dot{b} + D_1 ac|k_2|^2 &= \mu_1 B + \lambda_1 b, \\ \dot{c} + D_1 ab|k_3|^2 &= \mu_1 C + \lambda_1 c, \end{aligned} \tag{9.17}$$

$$\begin{aligned} \dot{A} + D_2 BC|k_1|^2 &= \mu_2 A + \lambda_2 a, \\ \dot{B} + D_2 AC|k_2|^2 &= \mu_2 B + \lambda_2 b, \\ \dot{C} + D_2 AB|k_3|^2 &= \mu_2 C + \lambda_2 c. \end{aligned} \tag{9.18}$$

Эта система по-видимому не является полностью интегрируемой и допускает сложное поведение решений. Уравнения этой модели при этом следующие:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi_1^{-1} - D_1\Delta\ln\Psi_1 = \frac{\mu_1\Psi_2 + \lambda_1\Psi_1}{\Psi_1^2}, \tag{9.19}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi_2^{-1} - D_2\Delta\ln\Psi_2 = \frac{\mu_2\Psi_2 + \lambda_2\Psi_1}{\Psi_2^2} \tag{9.20}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}u + D_1\nabla\left(\frac{1}{u}\nabla u\right) = \frac{u}{v}(\mu_1 u + \lambda_1 v), \tag{9.21}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}v + D_2\nabla\left(\frac{1}{v}\nabla v\right) = \frac{v}{u}(\mu_2 u + \lambda_2 v), \tag{9.22}$$

где $u = \Psi_1^{-1},\ v = \Psi_2^{-1}$.

Многокомпонентные системы типа (9.1) в случае условий (9.11) имеют уравнения замыкания, сводящиеся к совокупности уравнений вида, аналогичного (9.17):

$$\dot{a}_j + D_j b_j c_j |k_1|^2 = \sum_{k=1}^{L}\mu_{jk}a_k,$$

$$
\begin{aligned}
&\dot{b}_j + D_j a_j c_j |k_2|^2 = \sum_{k=1}^{L} \mu_{jk} b_k,\\
&\dot{c}_j + D_j a_j b_j |k_3|^2 = \sum_{k=1}^{L} \mu_{jk} c_k,\\
&j = 1, 2, \ldots, L
\end{aligned}
$$

где L - число компонент в системе. Соответствующие уравнения модели имеют следующую форму:

$$
\frac{\partial}{\partial t}\Psi_j^{-1} - D_j \Delta \ln \Psi_j = \frac{\sum\limits_{k=1}^{L} \mu_{jk}\Psi_k}{\Psi_j^2}, \quad j = 1, 2, \ldots, L.
$$

9.3 Трехмодовые модели с линейной диффузией

Рассмотрим теперь модели типа (9.2). Однокомпонентная модель этого типа в рассматриваемом классе решений имеет тривиальную временную динамику. Пусть функция Ψ имеет вид (9.5), тогда условия замыкания модели сводятся к уравнениям

$$
a(t) = a_0 e^{\lambda t}, \quad b(t) = b_0 e^{\lambda t}, \quad c(t) = c_0 e^{\lambda t},
$$

где a_0, b_0, c_0 - постоянные, а сама модель описывается уравнением

$$
\frac{\partial}{\partial t}\ln\Psi - D_1 \Delta \ln\Psi = \lambda + D_1 q_0 \frac{e^{\lambda t}}{\Psi}
$$

при некоторых дополнительных условиях на постоянные k_1, k_2, k_3, q_0.

Двухкомпонентные модели обладают более сложной динамикой, аналогичной динамике моделей типа (9.1), рассмотренной выше. Пусть первой компоненте соответствует квадратичная форма (9.5), а второй - (9.7). Тогда условия замыкания системы уравнений этой модели с учетом (9.12) и (9.11) сводятся к переопределенной системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$
\begin{aligned}
&\dot{a} = \lambda a + \mu A(t), \quad D_1 bc|k_1|^2 = \nu a + \kappa A(t),\\
&\dot{b} = \lambda b + \mu B(t), \quad D_1 ac|k_2|^2 = \nu b + \kappa B(t),\\
&\dot{c} = \lambda c + \mu C(t), \quad D_1 ab|k_3|^2 = \nu c + \kappa C(t).
\end{aligned}
\tag{9.23}
$$

К этой системе следует еще добавить уравнения на коэффициенты A, B, C, которые следуют из условий замыкания модели и должны иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\dot{A} = \lambda_1 a + \mu_1 A, \quad D_2 BC|k_1|^2 = \lambda_2 a + \mu_2 A,\\
&\dot{B} = \lambda_1 b + \mu_1 B, \quad D_2 AC|k_2|^2 = \lambda_2 b + \mu_2 B,\\
&\dot{C} = \lambda_1 c + \mu_1 C, \quad D_2 AB|k_3|^2 = \lambda_2 c + \mu_2 C.
\end{aligned} \tag{9.24}$$

Однако совокупность уравнений (9.23) уже полностью определяет как вид функций a, b, c, так и вид функций A, B, C. Поэтому из этой системы можно вычислить и явный вид коэффициентов $\lambda_{1,2}$ и $\mu_{1,2}$, теперь уже функций времени. Действительно, из (9.23) следует, что функции a, b, c удовлетворяют той же системе уравнений (9.13)

$$\dot{a} = \Lambda a + R_1 bc|k_1|^2, \quad \dot{b} = \Lambda b + R_1 ac|k_2|^2, \quad \dot{c} = \Lambda c + R_1 ab|k_3|^2, \tag{9.25}$$

где $\Lambda = \lambda - \nu\mu/\kappa$, $\quad R_1 = \mu D_1/\kappa$. Следствием этой системы являются соотношения

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(bc) = 2\Lambda bc + R_1 a(|k_2|^2 c^2 + |k_3|^2 b^2),\\
&\frac{d}{dt}(ac) = 2\Lambda ac + R_1 b(|k_3|^2 a^2 + |k_1|^2 c^2),\\
&\frac{d}{dt}(ab) = 2\Lambda ab + R_1 c(|k_2|^2 a^2 + |k_1|^2 b^2).
\end{aligned}$$

Из тех же уравнений получаем:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(|k_2|^2 c^2 + |k_3|^2 b^2) - 2\Lambda(|k_2|^2 c^2 + |k_3|^2 b^2) = 2R_1|k_2 k_3|^2 Q,\\
&\frac{d}{dt}(|k_3|^2 a^2 + |k_1|^2 c^2) - 2\Lambda(|k_3|^2 a^2 + |k_1|^2 c^2) = 2R_1|k_1 k_3|^2 Q,\\
&\frac{d}{dt}(|k_2|^2 a^2 + |k_1|^2 b^2) - 2\Lambda(|k_2|^2 a^2 + |k_1|^2 b^2) = 2R_1|k_1 k_2|^2 Q,
\end{aligned}$$

где $Q(t) = a(t)b(t)c(t)$. Решения этих уравнений можно записать в следующей форме

$$\begin{aligned}
&|k_2|^2 c^2 + |k_3|^2 b^2 = (\alpha_0 + 2R_1|k_2 k_3|^2 \int e^{-2\Lambda t'} Q dt')e^{2\Lambda t},\\
&|k_3|^2 a^2 + |k_1|^2 c^2 = (\beta_0 + 2R_1|k_1 k_3|^2 \int e^{-2\Lambda t'} Q dt')e^{2\Lambda t},\\
&|k_2|^2 a^2 + |k_1|^2 b^2 = (\gamma_0 + 2R_1|k_2 k_1|^2 \int e^{-2\Lambda t'} Q dt')e^{2\Lambda t}.
\end{aligned}$$

Для замыкания системы постоянные интегрирования $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ следует выбрать равными

$$\alpha_0 = \frac{\sigma_0}{|k_1|^2}, \quad \beta_0 = \frac{\sigma_0}{|k_2|^2}, \quad \gamma_0 = \frac{\sigma_0}{|k_3|^2}.$$

Объединяя полученные соотношения, окончательно находим

$$\lambda_1(t) = (\lambda - 2\frac{\mu\nu}{\kappa})\frac{\nu}{\kappa} + \frac{D_1^2\mu e^{2\Lambda t}}{\kappa^2}\left(\sigma_0 + 2R_1|k_1k_2k_3|^2P(t)\right),$$
$$\mu_1(t) = 2\lambda - 3\frac{\mu\nu}{\kappa} = \mathrm{const},$$
$$\lambda_2(t) = \frac{\nu^3D_2}{\kappa^2D_1} - \frac{D_1D_2\nu}{\kappa^2}(\sigma_0 + 2R_1|k_1k_2k_3|^2P)e^{2\Lambda t} + \frac{D_1^2D_2}{\kappa^2}|k_1k_2k_3|^2Q(t),$$
$$\mu_2(t) = \frac{\nu^2D_2}{\kappa D_1} = \mathrm{const}.$$

Здесь $P(t) = \int e^{-2\Lambda t'}Qdt'$. Уравнения модели принимают следующий вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\ln\Psi - D_1\Delta\ln\Psi = \frac{\Psi(\lambda\Psi + \mu\Phi) + \nu\Psi + \kappa\Phi}{\Psi^2},$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\ln\Phi - D_2\Delta\ln\Phi = \frac{\Phi(\lambda_1(t)\Psi + \mu_1\Phi) + \lambda_2(t)\Psi + \mu_2\Phi}{\Phi^2} \tag{9.26}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}u - D_1\Delta u = e^{-2u}\left(\lambda e^{2u} + \mu e^{u+v} + \nu e^u + \kappa e^v\right), \tag{9.27}$$
$$\frac{\partial}{\partial t}v - D_2\Delta v = e^{-2v}\left(\lambda_1(t)e^{2v} + \mu_1(t)e^{u+v} + \lambda_2(t)e^u + \mu_2 e^v\right),$$

где $u = \ln\Psi,\ v = \ln\Phi$.

Как видно из приведенных примеров, условия замыкания однокомпонентных и двухкомпонентных моделей типа (9.2) приводят к нелинейностям, явно зависящим от времени специальным образом. По всей видимости этот факт относится и к многокомпонентным моделям этого типа. Поэтому такие модели могут показаться менее полезными в качестве базовых для процессов распространения волн в активных средах и образования в них регулярных структур, чем модели типа (9.1) или модели с двухмодовым возбуждением. Однако, на себя обращает внимание тот факт, что коэффициенты в уравнениях (9.26) и (9.27), явно зависящие от времени, имеют порядок величин D_1D_2 и $D_1^2D_2$. Поэтому в тех ситуациях, когда обезразмеренные коэффициенты диффузии являются малыми величинами, зависимостью коэффициентов от времени можно пренебречь. Таким образом, эти модели не менее полезны, чем модели (9.1) во многих реально встречающихся системах.

Глава 10

Конструирование и общий анализ моделей типа ДфЦТ

10.1 Общие свойства моделей типа ДфЦТ

Как было продемонстрировано в предыдущей главе (см. также [111]), модели ДфЦТ, допускающие точные решения в квадратичных формах, представляют собой достаточно богатый класс моделей. Этот класс моделей может быть расширен рассмотрением многокомпонентных систем и систем с многомодовым возбуждением, отталкиваясь от более общей теории точных периодических двумеризованных цепочек Тоды (Глава 6), которая также может быть сформулирована на основе квадратичных форм (см. также [86, 41]). Решения, допускаемые моделями ДфЦТ, образуют классы точных решений, которые зависят от произвольных функциональных параметров. Хотя анализ устойчивости решений не проводился в данной работе, однако, в силу произвольности функциональных параметров, от которых зависят решения, можно надеяться, что построенные классы решений достаточно устойчивы. Все это указывает на определенную выделенность рассмотренных моделей среди других базовых моделей. Поэтому представляет интерес найти те общие физические свойства ДфЦТ, отличающие их других базовых моделей, которые бы объяснили существование особых условий в них, приводящих к образованию регулярных структур с простой эволюцией во времени. В связи с этим возникает также вопрос о физических принципах их конструирования и использования в качестве базовых моделей.

Обычным средством конструирования моделей автоволн являются кинетические уравнения или уравнения баланса физических параметров систем, дополненные членами, ответственными за диффузию отдельных компонент в этих системах и нелинейными источниками, учитывающими взаимовлияние отдельных компонент друг на друга. Вид нелинейности, как уже указывалось во введении к предыдущей главе, обычно диктуется некоторыми простыми физическими соображениями, например, вероятностного характера для моделей типа Вольтерра-Лотке, или формой закона действующих масс, а также требованиями обращения источника в ноль в точках равновесия среды для моделей реакция-диффузия. Эти соображения чаще всего не носят абсолютно строгого характера и позволяют свободно менять форму нелинейного источника в достаточно широких пределах. Указанная неопределенность в форме нелинейности, по-видимому, присуща самим автоволновым системам из-за наличия одновременно множества механизмов взаимодействия между собой их отдельных компонент и вероятностного характера доминирования одних механизмов над другими. Например, в химических системах одновременно идет множество различных реакций, в которые вступают различные количества молекул разных химических веществ, и в зависимости от ситуации доминировать могут различные реакции.

Наиболее характерной особенностью моделей типа ДфЦТ является наличие у них специального нелинейного коэффициента диффузии компонент системы, обратно пропорционального неизвестным функциям. Непосредственно это относится к моделям, названным в предыдущих главах моделями с нелинейной диффузией (8.36). К моделям с линейной диффузией это относится лишь косвенно, хотя для них также существует запись с указанной обратной зависимостью коэффициента диффузии от концентраций. Модели такого типа на практике встречаются. В качестве примера можно привести работы [97, 98, 99]. Имеются и другие примеры. Поэтому для объяснения свойств моделей ДфЦТ следует сконцентрировать усилия именно на анализе этой особенности. Однако прежде чем перейти к ее анализу, попытаемся дать некоторые соображения относительно применения моделей типа ДфЦТ с линейной диффузией для исследования базовых моделей автоволн со степенной нелинейностью.

10.2 Локальная сводимость уравнений ДфЦТ к уравнениям со степенной нелинейностью

Основная особенность моделей с линейной диффузией типа (8.34) состоит в наличии у них нелинейностей экспоненциального типа. Обычно в теории автоволн нелинейности такого типа встречаются. Исключение составляют модели, в которых для вычисления констант скоростей химических реакций используется закон Аррениуса:

$$k = k_0 e^{-E_\alpha/kT},$$

(E_α -энергия активации), а температура входит в модель как одна из диффундирующих компонент. Поэтому для моделей ДфЦТ с линейной диффузией необходимо прибегать к некоторым процедурам редукции уравнений моделей ДфЦТ к моделям со степенной нелинейностью. Наиболее простой способ совершить такую редукцию - это рассмотреть такие решения уравнений ДфЦТ, которые описывают сравнительно малые отклонения системы от равновесия. В этом случае с той или иной степенью точности экспоненциальные нелинейности можно представить первыми членами ряда Тейлора в точке равновесных значений концентраций компонент системы. В результате уравнения приобретут вид уравнений со степенной нелинейностью, а ограниченные сверху и снизу решения уравнений ДфЦТ будут давать сравнительно неплохую аппроксимация решений этих уравнений. Имеются и более общие идеи интерпретации такой редукции, основанные на возможности интерпретировать каждый член разложения в ряд Тейлора уравнений ДфЦТ.

Начнем с анализа общей системы типа активатор-ингибитор (8.2). Представим функцию источника $F(v,u)$ в виде формального ряда Тейлора в точке $u = 0$ и $v = 0$:

$$F(u,v) = F(0,0) + F'_{0u}u + F'_{0v}v + \tag{10.1}$$

$$+\frac{1}{2!}\left(F''_{0uu}uu + 2F''_{0uv}uv + F''_{0vv}vv\right) + \tag{10.2}$$

$$+\frac{1}{3!}\left(F'''_{0uuu}u^3 + 3F'''_{0uuv}u^2v + 3F'''_{0uvv}uv^2 + F'''_{0vvv}v^3\right) + \dots . \tag{10.3}$$

Аналогичное разложение имеется и у функции $G(u,v)$. Предположим, что исследуется модель химических реакций. Как известно [121, 129], каждой химической реакции вида:

$$nA + mB \rightarrow C \tag{10.4}$$

с помощью закона действующих масс можно сопоставить источник вида

$$J = K u^n v^m,$$

где u, v - концентрации компонент A, B соответственно, n, m - стехиометрические коэффициенты соответствующих компонент в реакции (10.4), K - постоянная скорости реакции. Поэтому каждый член в приведенном разложении можно сопоставить с источником, соответствующим определенного типа химической реакции вида:

$$nA + mB \to A.$$

Химические же реакции вида

$$nA + mB \to B$$

соответствуют разложению функции $G(u, v)$ в ряд Маклорена. Такие реакции возможны в случае присутствия катализатора, который в окончательных продуктах не присутствует. Реакции с большими величинами стехиометрических коэффициентов могут соответствовать появлению больших конгломератов молекул и их последующему распаду.

В биологической интерпретации указанных моделей каждый член разложения отвечает определенному эффекту взаимодействия между особями одного или разных видов. В зависимости от знака коэффициента соответствующей компоненты источника это может быть эффект поддержки (кооперации) при положительном знаке и эффект подавления (конкуренции) при отрицательном. Степень, с которой концентрации входят в компоненту источника, соответствуют числу особей каждого вида, участвующих в процессе взаимодействия данного типа.

В обоих интерпретациях можно утверждать, что в реальности при большом числе молекул или особей возможны процессы с большими n и m при возможно малом значении постоянных скоростей реакций.

10.3 Энтропийная интерпретация моделей ДфЦТ

Нетрудно убедится, что уравнения ДфЦТ, записанные относительно неизвестных функций Ψ_i вместо $\Phi_i = \ln\Psi$, оказываются похожими на кинетические уравнения с диффузией относительно концентраций веществ с нелинейностями в форме рациональных функций, например, (9.19), (9.26). Однако, диффузионный оператор при такой форме записи хотя и превращается вновь в диффузионный, но с появлением дополнительных членов, описывающих физические процессы, которых при другой форме записи, соответствующей общей форме ДфЦТ, нет. Например,

$$\Psi_i \Delta \ln \Psi_i = \Delta \Psi_i - \frac{(\nabla \Psi_i)^2}{\Psi_i}.$$

Последний член в правой части этого выражения может быть интерпретирован как перенос вещества с концентрацией Ψ_i течением, имеющим поле скорости $\mathbf{v} = \Psi_i^{-1} \nabla \Psi_i$. Хотя на самом деле адвекции в модели нет, тем не менее, дополнительный источник таков, что он полностью эквивалентен адвективному переносу. Таким образом модели ДфЦТ содержат некоторые дополнительные физические механизмы переноса вещества по отношению к обычно рассматриваемым механизмам в базовых моделях [102].

Для того, чтобы продемонстрировать роль этих дополнительных механизмов в динамике моделей ДфЦТ, рассмотрим формальный способ построения моделей этого типа, исходя из стандартных кинетических моделей. В качестве такой модели рассмотрим модель Вольтерра-Лотке (хищник-жертва) без диффузии, уравнения которой имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{N}_1 &= \kappa_1 N_1 - \alpha N_1 N_2, \\ \dot{N}_2 &= \beta N_1 N_2 - \kappa_2 N_2. \end{aligned}$$

Здесь $\kappa_1, \kappa_2, \alpha, \beta$ - постоянные. Следуя общей идеологии ДфЦТ, вместо концентраций N_1 и N_2 следует ввести условные энтропии каждой компоненты системы по формуле

$$S_1 = -\ln N_1, \quad S_2 = -\ln N_2. \tag{10.5}$$

Тогда уравнения модели примут вид уравнений производства энтропии каждой компоненты системы

$$\begin{aligned} \dot{S}_1 &= -\kappa_1 + \alpha e^{-S_2}, \\ \dot{S}_2 &= -\beta e^{-S_1} + \kappa_2. \end{aligned} \tag{10.6}$$

Постоянные κ_1 и κ_2, описывающие естественную рождаемость жертв и естественную смертность хищников, в такой постановке соответствуют естественному постоянному приросту энтропии в компоненте 1 (жертвы), и постоянной убыли энтропии в компоненте 2 (хищники). В этом случае энтропию следует понимать скорее как меру числа доступных состояний системы, а не как меру ее неупорядоченности. При такой ее интерпретации оставшиеся элементы уравнений описывают также производство компонент энтропии, связанное со взаимовлиянием подсистем друг на друга. Таким образом система уравнений (10.6); уже имеет форму, соответствующую моделям типа цепочки Тоды и имеет смысл уравнений производства компонент энтропии. Очевидно, что в кинетических моделях без диффузии с рациональными нелинейностями замены типа (10.5) будут всегда приводить к уравнениям типа цепочек Тоды.

Рассмотрим теперь переход от кинетических моделей без диффузии к моделям с диффузией. При таком переходе уравнения (10.5) дополняют диффузионным потоком "вещества". В результате получаются уравнения следующего типа:

$$\begin{aligned} \dot{N}_1 - D_1\Delta N_1 &= \kappa_1 N_1 - \alpha N_1 N_2, \\ \dot{N}_2 - D_2\Delta N_2 &= \beta N_1 N_2 - \kappa_2 N_2. \end{aligned} \tag{10.7}$$

Здесь D_1 и D_2 коэффициенты диффузии каждой из компонент системы. Других механизмов переноса "вещества" данная модель не содержит.

Если теперь воспользоваться подстановкой (10.5), то в уравнениях для условных энтропий компонент системы появятся члены, которые по форме можно интерпретировать как адвективный перенос вещества:

$$\begin{aligned} \dot{S}_1 - D_1\Delta S_1 - D_1(\nabla S_1)^2 &= -\kappa_1 + \alpha e^{-S_2}, \\ \dot{S}_2 - D_2\Delta S_2 - D_2(\nabla S_2)^2 &= -\beta e^{-S_1} + \kappa_2, \end{aligned} \tag{10.8}$$

со скоростями среды, соответственно $\mathbf{v}_1 = -D_1\nabla S_1$, для первой компоненты и $\mathbf{v}_2 = -D_2\nabla S_2$ - для второй. В исходной модели эти члены отсутствуют, поэтому, чтобы избежать их появления при построении модели ДфЦТ, следует уравнения (10.6) дополнить диффузионным потоком именно энтропии. Тогда (10.6) приобретают следующую форму

$$\begin{aligned} \dot{S}_1 - D_1\Delta S_1 &= -\kappa_1 + \alpha e^{-S_2}, \\ \dot{S}_2 - D_2\Delta S_2 &= -\beta e^{-S_1} + \kappa_2. \end{aligned} \tag{10.9}$$

Эта система уравнений уже имеет форму двухкомпонентных ДфЦТ и подобна моделям, рассмотренным здесь и в [111].

Отличие уравнений (10.8) от (10.9) состоит в дополнительном источнике энтропии, величина которого во всем пространстве всегда положительна:

$$J_1 = D_1(\nabla S_1)^2 > 0, \quad J_2 = D_1(\nabla S_2)^2 > 0.$$

Влияние этих источников можно понять, опираясь на их аналогичность адвективному переносу энтропии обусловленному течением среды со скоростями

$$\mathbf{u}_1 = -D_1 \nabla S_1, \quad \mathbf{u}_2 = -D_2 \nabla S_2.$$

Как видно скорости адвективного переноса соответствуют переносу энтропии в направлении обратном ее градиенту, т.е. эти источники ускоряют выравнивание контрастов энтропий. Отсутствие этих источников в (10.9) означает, что в этой модели контрасты и энтропий и концентраций выравниваются медленнее. Именно это указывает на причину, по которой в моделях с диффузией энтропии типа ДфЦТ более "легко" возникают регулярные структуры: специфическое замедление процесса диффузионного размывания контрастов благоприятствует формированию регулярных структур.

Этот факт, в свою очередь, указывает общий путь для конструирования базовых моделей типа ДфЦТ, описывающих процессы возникновения регулярных структур в активных средах с диффузией. Действительно, если имеется некоторая модель вида

$$\frac{\partial}{\partial t} N_i - D_i \Delta N_i = R(N_1, \ldots, N_n), \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $R(N_1, \ldots, N_n)$ - рациональная функция своих аргументов, то на ее основе можно с помощью подстановки $N_i \to S_i = -\ln N_i$ перейти к уравнениям типа ДфЦТ

$$\frac{\partial}{\partial t} S_i - D_i \Delta S_i = R(e^{-S_1}, \ldots, e^{-S_n}), \quad i = 1, \ldots, n,$$

в которых дополнительно осуществлен переход от диффузии концентраций к диффузии энтропий.

10.4 Физические и биологические основания моделей с диффузией энтропии

В связи с проведенным анализом систем типа ДфЦТ возникает вопрос: существуют ли в реальности системы в которых происходит диффузия не вещества, а именно энтропии, в том смысле как это было сформулировано в предыдущем разделе?

Основное явление, которое следует объяснять - это возникновение компенсирующего потока типа адвективного, обратного направлению диффузии концентрации вещества (или особей в биологической интерпретации), которое замедляет процесс диффузии и, поэтому, как указывалось в предыдущем разделе, благоприятствует возникновению упорядоченных структур.

10.4.1 Физические модели

Первое возможное происхождение диффузии энтропии в физических и химических системах может быть связано со следующим эффектом. Обычно, когда говорят о диффузии какого-либо конкретного вещества, подразумевают (явно или неявно), что диффузия этого вещества происходит в некоторой среде. Примером могут служить растворы. Основой раствора служит другое вещество - растворитель, которое является "проводником" диффузии, но при описании диффузии не рассматривается. Однако, диффузионный поток вещества связан с выносом его из области с повышенной его концентрацией. При этом в каждой точке пространства должно выполняться уравнение непрерывности среды - закон сохранения массы, который обязан включать и растворитель. Вследствие этого можно ожидать, что при определенных условиях для компенсации ухода массы из области должен возникать обратный упорядоченный поток растворителя, скорость которого должна быть пропорциональна диффузионному потоку:

$$\mathbf{v} = Df(\mathbf{x}, t)\nabla n.$$

Здесь n - концентрация диффундирующего вещества, D - коэффициент диффузии, а $f(\mathbf{x}, t)$ - функция, характеризующая способность растворителя создавать обратный направленный компенсационный поток. Этот направленный поток, в свою очередь, переносит и диффундирующее вещество, поток которого в результате будет равен

$$\mathbf{J} = Df(\mathbf{x}, t)|\nabla n|^2.$$

Таким образом, вместо стандартного диффузионного уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}n - D\Delta n = I,$$

в рассматриваемом случае следует использовать следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t}n + Df(\mathbf{x}, t)|\nabla n|^2 - D\Delta n = I.$$

Если $f(\mathbf{x}, t) = n^{-1}$, то последнее уравнение может быть приведено к виду

$$\frac{\partial}{\partial t}\ln n + D|\nabla \ln n|^2 - Dn^{-1}\Delta n \equiv \frac{\partial}{\partial t}\ln n - D\Delta \ln n = In^{-1}.$$

Обоснование выбора $f(\mathbf{x}, t) = n^{-1}$ может состоять в предположении, что скорость направленного компенсационного потока из одной точки в другую должна определяться относительной разностью концентраций в этих точках. Переходя к пределу, можно предположить, что $\mathbf{v} = Dn^{-1}|\nabla n|^2$.

Имеются и другие типы физических моделей, которые приводят к уравнениям с диффузией энтропии типа диффузии в уравнениях нелинейной диффузии (8.26). Типичным классом таких моделей, в которых может появиться диффузия энтропии являются модели с различного рода турбулентными механизмами перемешивания. В моделях турбулентности часто рассматривают коэффициенты турбулентной диффузии, степенным образом зависящие от концентрации. Уравнения теплопроводности также часто содержат коэффициенты теплопроводности, зависящие от температуры степенным образом.

Рассмотрим в качестве примера уравнение

$$T_t = D\nabla\left(T^k \nabla T\right) + I(T), \tag{10.10}$$

встречающееся в задачах тепло-массопереноса. Частные случаи его рассмотрены в [123]. Сделаем замену переменных (см. [123]) следующего вида $U = T^{-k}$. Тогда уравнение (10.10) можно переписать следующим образом:

$$U_t + D\frac{k+1}{k}\left|\nabla U\right|^2 = D\Delta \ln U - kU^{(k+1)/k} I\left(U^{-1/k}\right).$$

Это уравнение уже имеет форму уравнения с диффузией энтропии. Другие соображения приводящие к уравнению нелинейной диффузии приведены в [97, 99, 104, 125]. Исследованию свойств и методов решения двумерного уравнения нелинейной диффузии посвящена следующая глава 11.

10.4.2 Биологические модели

В биологических моделях возможен аналогичный механизм возникновения обратного потока, но имеющий иную природу. В биологических моделях диффузионный поток описывает "случайную" миграцию особей данного вида в пределах его ареала. Рассмотрим виды, которые способны к самостоятельному перемещению в пространстве в поисках пищи и партнера для продолжения рода. Нетрудно понять, что поиску пищи соответствует характерная стратегия хаотического блуждания в пространстве ареала с дополнительной возможной ориентацией поиска по градиенту концентрации пищевого ресурса. Именно такая стратегия создает диффузионный поток особей и дополнительный направленный поток по градиенту пищевого ресурса. Аналогично, стратегия поиска партнера должна быть сопряжена не со случайным блужданием, а с направленным потоком в сторону роста градиента числа особей данного вида. Отсюда следует, что общий вид уравнений динамики популяций в пространстве должен быть следующим

$$\frac{\partial}{\partial t}n + D(R,n)Q(R,n)(\nabla R, \nabla n) + D(R,n)F(n)|\nabla n|^2 - \\ -\nabla(D(R,n)\nabla n) = I(R,n), \qquad (10.11)$$

где n - концентрация особей данного вида, R - концентрация пищевого ресурса, $Q(R,n)$ и $F(n)$ - функции, характеризующие "интенсивность" направленного поиска ресурса и партнера, соответственно, коэффициент диффузии $D(R,n)$, характеризующий диффузную подвижность особей, $I(R,n)$ - источник, характеризующий воспроизводство и смертность особей данного вида. Если опять $F(n) = n^{-1}$, то уравнение (10.11) может быть представлено в форме уравнения диффузии энтропии

$$\frac{\partial}{\partial t}\ln n + DQ(\nabla R, \nabla \ln n) + D|\nabla \ln n|^2 - n^{-1}\nabla(D\nabla n) \equiv \\ \equiv \frac{\partial}{\partial t}\ln n + DQ(\nabla R, \nabla \ln n) - \nabla(D\nabla \ln n) = n^{-1}I(R,n). \qquad (10.12)$$

В общем случае к этому уравнению следует добавить уравнения, описывающие динамику ресурса R и, возможно, динамику популяций других видов, конкурирующих и сотрудничающих с данным.

Выбор интенсивности поиска $F(n)$ в форме $F(n) = n^{-1}$ можно обосновать, исходя из следующих элементарных соображений. Чем меньше концентрация особей данного вида в некоторой области, тем интенсивней борьба за партнера и тем интенсивней должен быть его поиск. Наоборот, увеличение концентрации популяции снижает требования к поиску, и его интенсивность может быть снижена. Поэтому следует полагать, что интенсивность поиска обратно-пропорциональна концентрации. Следует однако сделать следующее общее уточнение. Если полагать $F(n) = n^{-1}$, то в области с очень малой концентрацией интенсивность поиска может в данной модели превысить все разумные пределы. Поэтому, можно предполагать, что в реальности при $n = 0$ интенсивность достигает максимального значения, но не бесконечного, т.е. $F(n) = n + {n_0}^{-1}$ и при $n = 0$ имеем $F(0) = n_0^{-1}$. В этом случае уравнение (10.12) можно переписать в следующем виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\ln(n+n_0)+DQ(\nabla R, \nabla\ln(n+n_0))-\nabla(D\nabla\ln(n+n_0)) = (n+n_0)^{-1}I(R,n).$$

Таким образом, существует целый ряд соображений, указывающих на то, что во многих физических, химических и биологических системах реализуется диффузия энтропии. Вообще, можно сформулировать гипотезу о том, что в самоорганизующихся системах должна осуществляться диффузия энтропии, а не концентрации. Именно в этом случае могут возникать долгоживущие когерентные структуры и автоволны.

Глава 11

Уравнения нелинейной диффузии

11.1 Физические модели, связанные с уравнением нелинейной диффузии

Уравнение
$$u_t = D\Delta \mathrm{ln} u + \lambda u \tag{11.1}$$
является элементом ряда моделей процессов в средах с нелинейной диффузией (см. например [97, 99, 104, 125]). Одной из характерных ситуаций, в которых встречается уравнение (11.1), является перенос пассивной примеси, например тепла, в турбулентной среде с нелинейным турбулентным коэффициентом теплопроводности (турбулентной диффузии) вида
$$K(T) = \frac{D}{T_0 + T}, \tag{11.2}$$
где $u = T_0 + T$, а T_0 - некоторая постоянная. Уравнение для функции T (температуры, концентрации) выглядит следующим образом:
$$T_t = \nabla(K(T)\nabla T) + \lambda(T + T_0) \equiv \nabla\left(\frac{D}{T_0 + T}\nabla T\right) + \lambda(T + T_0).$$

Другие примеры систем рассмотрены в [97, 99, 104, 125]. Например, интерес представляет использование уравнения (11.1) в качестве модели, описывающей эволюцию глубины сезонного термоклина [99] или растекания вязкой жидкости [104]. В связи с тем, что это уравнение важно с точки зрения прикладных задач гидромеханики и теории переноса, в ряде работ предпринимались исследования по отысканию классов точных решений этого уравнения в двумерном и трехмерном координатном пространстве [97, 125]. В работе [111] был предложен, а в [112] более детально развит метод построения точных решений нелинейных уравнений типа диффузионных цепочек Тоды в двумерном координатном пространстве. Среди этого класса уравнений есть и уравнение (11.1). В настоящей работе на основе метода, изложенного в [112], строятся и исследуются точные решения (11.1), принадлежащие классу квадратичных форм. Как показано, уравнение (11.1) представляет интерес не только с прикладной точки зрения, но и с точки зрения общей теории уравнений диффузионного типа, поскольку допускает специальный принцип суперпозиции, позволяющий строить из простых решений более сложные. В работе описывается указанный принцип суперпозиции, и на его основе строятся новые точные решения уравнения (11.1).

11.1.1 Пространственная структура точных решений

Точные решения уравнения согласно схеме, предложенной в [111, 112], имеют представление в виде

$$u(x, y, t) = \frac{1}{\Psi(z, \bar{z}, t)}, \tag{11.3}$$

где $\Psi(z, \bar{z}, t)$ - квадратичная форма:

$$\Psi(z, \bar{z}, t) = \sum_{i<j=1}^{N} h_{ij}(t)\psi_i(z)\psi_j^*(\bar{z}), \tag{11.4}$$

где N - размерность квадратичной формы относительно линейно независимых дифференцируемых функций $\psi_i(z)$ комплексного аргумента $z = x + iy$, а $h_{ij}(t)$ - элементы квадратной эрмитовой матрицы $\mathbf{H}$ размерности N, зависящей от t. В простейших случаях $N = 2$ и $N = 3$, которые подробно изучаются в данной работе, имеем

$$\Psi(z, \bar{z}, t) = a(t)|\psi_1|^2 + b(t)|\psi_2|^2 + c(t)\psi_1\psi_2^* + c^*(t)\psi_1^*\psi_2 \tag{11.5}$$

для $N = 2$ и

$$\Psi(z, \bar{z}, t) = a(t)|\psi_1|^2 + b(t)|\psi_2|^2 + c(t)|\psi_3|^2 \tag{11.6}$$

для $N = 3$. Эти оба представления для $N = 2$ и $N = 3$ имеют сходную структуру. Единственное отличие состоит в том, что в первом случае структура определяется двумя отдельными пространственными структурами, эволюционирующими в пространстве со временем, а во втором

- тремя. Эти отдельные структуры будем называть модами, а число N - модовой размерностью решения. То, что для (11.3) и (11.4) число мод равно N, следует из того, что в каждый момент времени квадратичную форму (11.4) можно диагонализировать так, что она будет иметь следующую структуру

$$\Psi(z,\bar{z},t)=\sum_{i=1}^{N}A_i(t)|\phi_i(z,t)|^2, \tag{11.7}$$

при этом $\phi_i(t)=\sum\limits_{i=1}^{N}u_{ij}(t)\psi_j(z)$, где $\mathbf{U}=(u_{ij})$ - унитарная матрица: $\sum\limits_{i=1}^{N}u_{ki}^*u_{ji}=\delta_{kj}$. Это выражение можно интерпретировать как совокупность N отдельных структур, которые описываются функциями $\phi_i(z,t)$, при этом функции $A_i(t)$, являющиеся собственными числами эрмитовой матрицы h_{ij}, можно рассматривать как амплитуды этих структур. Именно эти структуры и будут называться модами. Такое представление для (11.4) позволяет так же говорить о том, что динамика мод сводится к динамике амплитуд и внутреннего вращения мод, которое описывается унитарной матрицей $\mathbf{U}$. С этой точки зрения представление (11.5) ($N=2$) соответствует наличию динамики не только амплитуд, но и вращению мод, а для $N=3$ представление (11.6) - отсутствию вращению.

Для функции $\Psi(z,\bar{z},t)$ в общем случае имеется следующее тождество (см. [23, 112]):

$$\Delta\ln\Psi=4\frac{\sum\limits_{i<j=1}^{N}\sum\limits_{k<l=1}^{N}(h_{ik}h_{jl}^*-h_{il}h_{jk}^*)W_{ij}W_{kl}^*}{\Psi^2}, \tag{11.8}$$

где

$$W_{ij}(z)=[\psi_i,\psi_j]=\psi_i\frac{d}{dz}\psi_j-\psi_j\frac{d}{dz}\psi_i \;\; i\neq j, \;\; i,j=1,\ldots,N.$$

Соответственно для $N=2$

$$\Delta\ln\Psi=\frac{4(ab-|c|^2)|W_{12}|^2}{\Psi^2}, \tag{11.9}$$

и

$$\Delta\ln\Psi=4\frac{ab|W_{12}|^2+bc|W_{23}|^2+ac|W_{13}|^2}{\Psi^2} \tag{11.10}$$

для $N=3$. Заметим, что множитель 4 в правой части этих выражений возникает вследствие того, что

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}.$$

Рассмотрим сначала случай $N=2$. Потребуем выполнения соотношений

$$W_{12} = \psi_1 \frac{d}{dz}\psi_2 - \psi_2 \frac{d}{dz}\psi_1 = (A\psi_1 + B\psi_2), \tag{11.11}$$

где A, B - комплексные постоянные. Это соотношение определяет допустимую связь ψ_1 и ψ_2 и представляет собой дифференциальное уравнение относительно одной из функций. Решение этого уравнения относительно ψ_2 при заданной ψ_1 имеет вид

$$\psi_2(z) = \psi_1(z)\left(C\exp\{B\theta(z)\} - \frac{A}{B}\right) = \psi_1(z)C\eta(z), \tag{11.12}$$

где

$$\theta(z) = \int \frac{dz}{\psi_1(z)}, \quad \eta(z) = \exp\{B\theta(z)\} - \frac{A}{CB},$$

а C - постоянная интегрирования. В случае модовой размерности $N=2$ решение (11.12) полностью фиксирует пространственную структуру решений исходного уравнения, которая определяется одной произвольной аналитической функцией $\psi_1(z)$ комплексного аргумента.

В случае модовой размерности $N=3$ следует потребовать выполнения уже использованных ранее соотношений

$$W_{12} = k_3\psi_3, \quad W_{23} = k_1\psi_1, \quad W_{31} = k_2\psi_2, \tag{11.13}$$

где k_1, k_2, k_3 - комплексные постоянные. В этом случае подстановка (11.13) в (11.10) приводит к следующему тождеству

$$\Delta\ln\Psi = 4\frac{ab|k_3|^2|\psi_3|^2 + bc|k_1|^2|\psi_1|^2 + ac|k_2|^2|\psi_2|^2}{\Psi^2}.$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (11.13) относительно функций ψ_1, ψ_2, ψ_3 имеет общее решение вида

$$\psi_1(z) = q_1\psi_3(z)\cos\theta(z),\ \psi_2(z) = q_2\psi_3(z)\sin\theta(z),\ \frac{d}{dz}\theta(z) = \frac{q_3}{\psi_3(z)} \tag{11.14}$$

где

$$q_1 = i\sqrt{\frac{k_3}{k_1}},\ q_2 = i\sqrt{\frac{k_3}{k_2}},\ q_3 = \sqrt{k_1k_2},$$

а функция $\psi_3(z)$ - произвольна.

11.1.2 Динамика мод для $N = 2$

Для случая $N = 2$ уравнения для функций $a(t), b(t)$ и $c(t)$ в силу (11.9) и (11.11) могут бы представлены в виде:

$$\begin{aligned} &\dot{a} + 4D(ab - |c|^2)|A^2| = \lambda a, \\ &\dot{b} + 4D(ab - |c|^2)|B^2| = \lambda b, \\ &\dot{c} + 4D(ab - |c|^2)AB^* = \lambda c. \end{aligned} \tag{11.15}$$

Эта система нелинейных уравнений разрешается точно. Обозначим через $Q(t) = ab - |c|^2$. Тогда

$$\begin{aligned} a(t) &= e^{\lambda t}\left(-4D|A|^2 P(t) + \alpha\right), \\ b(t) &= e^{\lambda t}\left(-4D|B|^2 P(t) + \frac{\beta}{|C|^2}\right), \\ c(t) &= e^{\lambda t}\left(-4DAB^* P(t) + \frac{\gamma}{C^*}\right), \end{aligned} \tag{11.16}$$

где α, β - действительные, а γ - комплексная постоянные, а $P(t) = \int^t e^{-\lambda t'} Q(t') dt'$. Для функции P получаем уравнение

$$\frac{dP}{dt} e^{-\lambda t} = \mu P + \frac{\alpha\beta - |\gamma|^2}{|C|^2},$$

в котором

$$\mu = -4D\left(\beta\frac{|A|^2}{|C|^2} + \alpha|B|^2 - \frac{\gamma^*}{C}AB^* - \frac{\gamma}{C^*}BA^*\right) = \text{const}.$$

Решением его является функция

$$P(t) = P_0 e^{\mu u(t)} + P_1, \tag{11.17}$$

где

$$u(t) = u_0 + \frac{e^{\lambda t}}{\lambda},$$

u_0, P_0 - произвольные постоянные, а $P_1 = (\alpha\beta - |\gamma|^2)/|C|^2\mu$. В случае $\lambda = 0$

$$Q(t) = Q_0 e^{\mu t}.$$

Совместно (11.16) и (11.17) дают полное решение задачи о динамике мод. В представлении (11.7) амплитуды мод описываются выражениями

$$A_1(t) = -\frac{a+b}{2} + \sqrt{\frac{(a-b)^2}{4} + |c|^2}, \quad A_2(t) = -\frac{a+b}{2} - \sqrt{\frac{(a-b)^2}{4} + |c|^2},$$

а сами функции ϕ_1 и ϕ_2 могут быть представлены в виде

$$\phi_1(z,t) = \psi_1(z) + \frac{A_1(t) - a(t)}{c(t)}\psi_2(z), \quad \phi_2(z,t) = \psi_1(z) + \frac{A_2(t) - a(t)}{c(t)}\psi_2(z).$$

Заметим также, что после объединения (11.12) и (11.16) выражение для Ψ может быть представлено в виде

$$\Psi(z,\bar{z},t) = f(t)|C|^2|g(z)|^2 + e^{\lambda t}\Phi(z,\bar{z}), \tag{11.18}$$

где

$$\begin{aligned} &g(z) = \psi_1(z)\exp\{B\theta(z)\}, \quad f(t) = -4D|B|^2 e^{\lambda t}P(t), \quad \xi = \frac{A}{CB}. \\ &\Phi(z,\bar{z}) = |\psi_1|^2\left(\alpha + \beta|\eta|^2 + \gamma\eta^* + \gamma^*\eta\right). \end{aligned} \tag{11.19}$$

При этом

$$\mu = -4D|B|^2(\beta|\xi|^2 + \alpha - \gamma^*\xi^* - \gamma\xi).$$

11.1.3 Динамика мод без вращения для $N = 3$

В случае $N = 3$ для (11.6) (в отсутствие вращения мод) имеем следующие уравнения для функций $a(t), b(t), c(t)$

$$\begin{aligned} \dot{a} + 4Dbc|k_1|^2 &= \lambda a, \\ \dot{b} + 4Dac|k_2|^2 &= \lambda b, \\ \dot{c} + 4Dab|k_3|^2 &= \lambda c. \end{aligned} \tag{11.20}$$

Эта система подобна уравнениям, встречающимся в задачах трехволнового взаимодействия, и интегрируется в квадратурах. Ее общее решение строится из следующих соотношений, получающихся прямо из (11.20):

$$\begin{aligned} a^2 &= (\alpha_0 - 8D|k_1|^2\int e^{-2\lambda t'}Qdt')e^{2\lambda t}, \\ b^2 &= (\beta_0 - 8D|k_2|^2\int e^{-2\lambda t'}Qdt')e^{2\lambda t}, \\ c^2 &= (\gamma_0 - 8D|k_3|^2\int e^{-2\lambda t'}Qdt')e^{2\lambda t}, \end{aligned}$$

где $Q(t) = a(t)b(t)c(t)$, а $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ -постоянные. Перемножая эти уравнения, находим, что $Q(t)$ удовлетворяет уравнению

$$Q^2 = (\alpha_0 - 8D|k_1|^2P(t))(\beta_0 - 8D|k_2|^2P(t))(\gamma_0 - 8D|k_3|^2P(t))e^{6\lambda t},$$

где $P(t) = \int e^{-2\lambda t'} Q dt'$. Для последней функции получаем следующее уравнение

$$\left(\frac{d}{dt}P\right)^2 = (\alpha_0 - 8D|k_1|^2 P)(\beta_0 - 8D|k_2|^2 P)(\gamma_0 - 8D|k_3|^2 P)e^{2\lambda t}. \quad (11.21)$$

Общее решение (11.21) представимо в виде функции Вейерштрасса $\wp(u)$ [106, 127]:

$$P(u) = p_0 + \wp(u; g_2, g_3), \quad u(t) = \frac{e^{\lambda t}}{d_0 \lambda} + u_0$$

где

$$\begin{aligned} &g_2 = -4(e_1 e_2 + e_3 e_2 + e_1 e_3), \quad g_3 = 4 e_1 e_2 e_3, \quad e_1 + e_2 + e_3 = 0, \\ &d_0 = \frac{1}{8}|k_1||k_2||k_3| p_0^{3/2}, \quad p_0 = -\frac{1}{3}\left(\frac{\alpha_0}{|k_1|^2} + \frac{\beta_0}{|k_2|^2} + \frac{\gamma_0}{|k_3|^2}\right), \\ &e_1 = -\frac{\alpha_0 + |k_1|^2 p_0}{|k_1|^2 p_0}, \quad e_2 = -\frac{\beta_0 + |k_2|^2 p_0}{|k_2|^2 p_0}, \quad e_3 = -\frac{\gamma_0 + |k_3|^2 p_0}{|k_3|^2 p_0}. \end{aligned}$$

Отсюда решение для a, b, c можно представить в виде:

$$\begin{aligned} a(t) &= \pm\sqrt{8D}|k_1| e^{\lambda t}\sqrt{e_1 p_0 - \wp(u(t); g_2, g_3)}, \\ b(t) &= \pm\sqrt{8D}|k_2| e^{\lambda t}\sqrt{e_2 p_0 - \wp(u(t); g_2, g_3)}, \quad (11.22) \\ c(t) &= \pm\sqrt{8D}|k_3| e^{\lambda t}\sqrt{e_3 p_0 - \wp(u(t); g_2, g_3)}. \end{aligned}$$

Два частных решения этих уравнений можно записать в элементарных функциях. Одно - в тригонометрических функциях:

$$a(t) = \frac{a_0 e^{\lambda t}}{\cos\chi}, \quad b(t) = \frac{b_0 e^{\lambda t}}{\cos\chi}, \quad c(t) = c_0 e^{\lambda t}\operatorname{tg}\chi, \quad (11.23)$$

где

$$\chi(t) = \theta_0 \pm 4Dc_0|k_1||k_2|\frac{e^{\lambda t}}{\lambda}, \; a_0 = \pm c_0\frac{|k_1|}{|k_3|}, \; b_0 = \pm c_0\frac{|k_2|}{|k_3|}, (11.24)$$

c_0 - произвольная действительная постоянная, а второе - в гиперболических функциях:

$$a(t) = \frac{a_0 e^{\lambda t}}{\operatorname{sh}\chi}, \; b(t) = \frac{b_0 e^{\lambda t}}{\operatorname{sh}\chi}, \; c(t) = c_0 e^{\lambda t}\operatorname{cth}\chi,$$

где все постоянные и функция $\chi(t)$ удовлетворяют тем же соотношениям (11.24). Заметим, что оба эти решения подбором постоянных могут быть сделаны не сингулярными на любом интервале времени $t > t_0$, поскольку функция $\chi(t)$, играющая роль фазы колебаний в среде, подбором постоянных может быть сделана ограниченной функцией на этом интервале времени.

Более общий класс частных решений обоих типов соответствует следующим значениям параметров e_1, e_2, e_3 ([106]):

$$
\begin{aligned}
&e_1 = e_2 \neq e_3: \quad \wp(u) = \mu_-^2\left(-\frac{2}{3} + \mathrm{cth}^2(\mu_- u)\right),\\
&e_1 \neq e_2 = e_3: \quad \wp(u) = \mu_+^2\left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{\sin^2(\mu_+ u)}\right),\\
&\mu_\pm^2 = \pm\frac{9g_3}{2g_2}.
\end{aligned}
$$

11.1.4 Динамика мод с вращением для $N = 3$

Исследование общей динамики мод в случае $N = 3$ при выполнении соотношений (11.13) и (11.14) сводится к исследованию системы уравнений для эрмитовой матрицы $\mathbf{H}$ с компонентами $h_{ij}(t)$ (11.4):

$$
\dot{\mathbf{H}} = -4DQ(t)\mathbf{K}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{K}^* + \lambda\mathbf{H}. \tag{11.25}
$$

Здесь $\mathbf{K} = \mathrm{diag}\{k_1, k_2, k_3\}$, $Q(t) = \det\mathbf{H}$. Форма уравнения связана с тем, что при выполнении условий (11.13) тождество (11.8) приобретает вид:

$$
\begin{aligned}
\Delta\ln\Psi &= \frac{\sum\limits_{i<j=1}^{N}\sum\limits_{k<l=1}^{N}\sum\limits_{m<n=1}^{N}(h_{ik}h_{jl}^* - h_{il}h_{jk}^*)\varepsilon_{ijm}\varepsilon_{kln}k_m\psi_m k_n^*\psi_n^*}{\Psi^2} =\\
&= \det\mathbf{H}\frac{\sum\limits_{i<j=1}^{N}\tilde{h}_{ij}k_i k_j^*\psi_i\psi_j^*}{\Psi^2},
\end{aligned} \tag{11.26}
$$

где $\tilde{h}_{ij}(t)$ - элементы матрицы $\mathbf{H}^{-1}$, обратной к матрицы $\mathbf{H}$.

Введем матрицу $\mathbf{R} = e^{-2\lambda t}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{H}$. Тогда матричное уравнение для $\mathbf{R}$ может быть представлено в виде

$$
\frac{d}{dt}\mathbf{R}^2 = -8De^{-2\lambda t}Q(t)\mathbf{K}^{-1}\mathbf{K}^*.
$$

Решение этого уравнения можно записать в виде

$$
\mathbf{R}^2 = -8D\mathbf{K}^{-1}\mathbf{K}^*P(t) + \mathbf{R}_0, \tag{11.27}
$$

где $\mathbf{R}_0$ - произвольная постоянная матрица (ее структура должна быть лишь согласована с требованием, что $\mathbf{H}$ - эрмитова матрица), $P(t) = \int e^{-2\lambda t'} Q dt'$. Отсюда решение для $\mathbf{H}$ может быть компактно записано в матрично-функциональной форме

$$\mathbf{H} = \mathbf{K}\left(-8D\mathbf{K}^{-1}\mathbf{K}^* P(t) + \mathbf{R}_0\right)^{1/2} = \left(\mathbf{C}P(t) + \mathbf{K}\mathbf{R}_0\right)^{1/2}. \qquad (11.28)$$

где

$$\mathbf{C} = -8D\mathbf{K}\mathbf{K}^* = -8D\mathrm{diag}\{|k_1|^2, |k_2|^2, |k_3|^2\}.$$

Отсюда следует, что $\mathbf{M}_0 = \mathbf{K}\mathbf{R}_0$ должна быть эрмитовой матрицей. Полученное решение может быть представлено в более удобной форме:

$$\mathbf{H} = l_0(t)\mathbf{I} + l_1(t)\left(\mathbf{C}P(t) + \mathbf{M}_0\right) + l_2(t)\left(\mathbf{C}P(t) + \mathbf{M}_0\right)^2, \qquad (11.29)$$

где $\mathbf{I}$ - единичная матрица, а $l_m(t),\ m = 0, 1, 2$ - решения системы трех линейных алгебраических уравнений

$$\Lambda_\alpha(t)^{1/2} = \sum_{m=0}^{2} l_m(t)[\Lambda_\alpha(t)]^m, \quad \alpha = 1, 2, 3, \qquad (11.30)$$

где $\Lambda_\alpha(t)$ - собственные числа матрицы $\mathbf{C}P(t) + \mathbf{M}_0$.

Функциональная зависимость решения (11.28) от t определяется одной функцией $P(t)$, уравнение для которой следует из (11.27):

$$\left(\frac{dP}{dt}\right)^2 = \frac{e^{2\lambda t}}{k_1^2 k_2^2 k_3^2} \det\{\mathbf{C}P(t) + \mathbf{M}_0\}. \qquad (11.31)$$

Так как $\det\{\mathbf{C}P(t) + \mathbf{M}_0\}$ - полином третьей степени с действительными постоянными коэффициентами, то решением последнего уравнения является функция Вейерштрасса: $P(t) = \wp(u; g_2; g_3)$ при некоторых значениях ее инвариантов g_2 и g_3, выражающихся через элементы постоянных матриц $\mathbf{K}$ и $\mathbf{R}_0$. В совокупности соотношения (11.31),(11.30) и (11.29) полностью описывают решения, соответствующие $N = 3$ с вращением мод.

Все частные решения, приведенные для случая $N = 3$, демонстрируют общее свойство, состоящее в том, что динамика мод (с вращением и без вращения) в случае $\lambda = 0$ оказывается сингулярной, т.е. за конечное время решение всюду обращается в бесконечность. Последнее есть следствие свойств функции Вейерштрасса (см. [106, 127]). Время обращения в бесконечность определяется периодами функции Вейерштрасса, через которую выражаются амплитуды мод. В случае же $\lambda \neq 0$ существуют такие значения λ и значения инвариантов функции Вейерштрасса g_2 и g_3, при которых решение не достигает сингулярного состояния на полуоси времени, поскольку аргумент функции Вейерштрасса в этом случае меняется в конечных пределах.

11.1.5 Принцип суперпозиции

Построенные решения представляют собой классы частных решений исходного уравнения (11.1), зависящие от одного функционального параметра в виде функции комплексного аргумента. Каждый вид функционального параметра выделяет специальный класс начальных условий. Выше рассмотрены решения, соответствующие двум случаям $N = 2$ и $N = 3$, что в терминологии работы [112] и данной работы определяет число мод, эволюционирующих в системе одновременно. Вообще говоря, можно рассматривать задачу о существовании решений с числом мод $N > 3$. Прямое решение этой задачи оказывается весьма сложным. Однако, имеется другой способ построения решения с $N > 3$. Этот способ связан с существованием специального принципа суперпозиции, выполняющегося для построенных решений классов $N = 2$ и $N = 3$. Именно, пусть согласно (11.3) $u_1 = \Psi_1^{-1}$ и $u_2 = \Psi_2^{-1}$ - два решения уравнения (11.1), одного из рассмотренных классов. Тогда, складывая два уравнения, соответствующие этим решениям, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\Psi_1 + \Psi_2}{\Psi_1 \Psi_2}\right) = -D\Delta \ln(\Psi_1 \Psi_2) + \lambda \frac{\Psi_1 + \Psi_2}{\Psi_1 \Psi_2}. \qquad (11.32)$$

Потребуем, чтобы коэффициенты квадратичных форм Ψ_1 и Ψ_2 были такими, чтобы выполнялось соотношение

$$\Psi_1(z, \bar{z}, t) + \Psi_2(z, \bar{z}, t) = G(z, t)[G(\bar{z}, t)]^*, \qquad (11.33)$$

где $G(z, t)$ - некоторая комплексная функция аргументов z и t. В этом случае, вводя новую функцию

$$U(z, \bar{z}, t) = \frac{\Psi_1 + \Psi_2}{\Psi_1 \Psi_2} = \frac{G(z, t)[G(\bar{z}, t)]^*}{\Psi_1 \Psi_2}, \qquad (11.34)$$

находим, что она удовлетворяет исходному уравнению (11.1):

$$U_t = D\Delta \ln U + \lambda U.$$

Таким образом, функция $U = u_1 + u_2 = G(z, t)[G(\bar{z}, t)]^* u_1 u_2$ при условии (11.33) - новое решение исходного уравнения. С точки зрения модовой классификации функция $\Psi_0 = U^{-1}$ - квадратичная форма размерности $N \geq 3$.

Этот принцип суперпозиции можно обобщить, полагая

$$U = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \frac{1}{\Psi_1} + \frac{1}{\Psi_2} + \cdots + \frac{1}{\Psi_n} \qquad (11.35)$$

и требуя, чтобы выполнялось соотношение

$$\sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \Psi_j(z, \bar{z}, t) = G(z,t)[G(\bar{z},t)]^* \qquad (11.36)$$

при некоторой функции $G(z,t)$. При этом функция U - вновь решение исходного уравнения (11.1).

Покажем, что соотношения (11.33) и (11.36) для $n = 2, 3$ действительно приводят к новым нетривиальным решениям (11.34) и (11.35).

Рассмотрим несколько экземпляров решений Ψ_i, $i = 1, \ldots, n$ с $N = 2$. Эти решения можно представить в следующем виде:

$$\Psi_i(z, \bar{z}, t) = f(t)|C_i|^2|g(z)|^2 + e^{\lambda t}\Phi_i(z, \bar{z}), \quad i = 1, \ldots, n, \qquad (11.37)$$

где $f(t), g(z)$ определяются соотношениями (11.18),

$$\Phi_i(z, \bar{z}) = |\psi_1|^2 \left(\alpha_i + \beta_i|\eta|^2 + \gamma_i\eta^* + \gamma_i^*\eta\right), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Таким образом, Ψ_i отличаются друг от друга значением постоянных параметров $_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ при фиксированных значениях ξ,B и P_1. Заметим, что фиксация $P_1 = (\alpha_i\beta_i - |\gamma_i|^2)/|C_i|^2\mu$ (11.17) накладывает ограничение на выбор постоянных $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$. При этом решения (11.16) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} a_i(t) &= |\xi|^2|C_i|^2 f(t) + \alpha_i e^{\lambda t}, \quad i = 1, \ldots, n, \\ b_i(t) &= f(t) + \frac{\beta_i}{|C_i|^2}e^{\lambda t}, \quad i = 1, \ldots, n, \\ c_i(t) &= \xi C_i f(t) + \frac{\gamma_i}{C_i^*}e^{\lambda t}, \quad i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \qquad (11.38)$$

Новые решения с $N = 3$. Начнем с построения суперпозиционного решения из двух решений с $N = 2$, что соответствует $n = 2$. В этом случае условие (11.33) сводится к требованию

$$\Phi_1 + \Phi_2 = F(t)|g(z)|^2 = F(t)|\psi_1|^2 \exp\{B\theta(z) + B^*[\theta(z)]^*\},$$

где $F(t) = 2f(t)(|C_1|^2 + |C_2|^2) + e^{\lambda t}(\beta_1 + \beta_2)$. Последнее соотношение выполняется, если параметры функций связаны соотношениями

$$\gamma_1 + \gamma_2 = (\beta_1 + \beta_2)\xi, \quad (\alpha_1 + \alpha_2) = (\beta_1 + \beta_2)|\xi|^2. \tag{11.39}$$

Таким образом, условие (11.33) выполняется, если коэффициенты квадратичных форм Ψ_1 и Ψ_2 удовлетворяют условию (11.39). В этом случае функция

$$U = \frac{F(t)|g(z)|^2}{[f^2(t)|C_1C_2|^2|g(z)|^4 + e^{\lambda t}f(t)(|C_1|^2\Phi_2 + |C_2|^2\Phi_1) + e^{2\lambda t}\Phi_1\Phi_2]}$$

является решением уравнения (11.1) с $N = 3$, поскольку функция $\Psi = \Psi_1\Psi_2$ - квадратичная форма, координатами которой являются три функции $\psi_1^2, \psi_2^2, \psi_1\psi_2$.

Комплексифицированные решения. Заметим так же, что принцип суперпозиции позволяет расширить динамический класс решений, вводя в рассмотрение решения, соответствующие комплексным квадратичным формам. Рассмотрим две квадратичные формы со взаимно сопряженными комплексными коэффициентами $a(t), b(t), c(t), d(t)$:

$$\Psi_1 = \Psi(z, \bar{z}, t) = a(t)|\psi_1|^2 + b(t)|\psi_2|^2 + c(t)\psi_1\psi_2^* + d(t)\psi_1^*\psi_2,$$

и $\Psi_2 = \Psi^*$. Динамические решения для функций $a_i(t), b_i(t), c_i(t), d_i(t)$ имеют тот же вид (11.15), в котором $c^*(t)$ заменена на $d(t)$ и все параметры - комплексные (за исключением λ). Решение этой системы имеет вид:

$$a(t) = e^{\lambda t}\left(-4D|A|^2P(t) + \alpha\right), \quad b(t) = e^{\lambda t}\left(-4D|B|^2P(t) + \frac{\beta}{|C|^2}\right),$$
$$c(t) = e^{\lambda t}\left(-4DAB^*P(t) + \frac{\gamma}{C^*}\right), \quad d(t) = e^{\lambda t}\left(-4DA^*BP(t) + \frac{\delta}{C}\right),$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ - комплексные постоянные. Решение же теперь для комплексной функции $P(t)$ будет иметь вид, аналогичный (11.17):

$$P(t) = P_0e^{\mu u(t)} + P_1, \tag{11.40}$$

где теперь

$$\mu = -4D|B|^2(\beta|\xi|^2 + \alpha - \gamma^*\xi^* - \delta\xi) = \text{const},$$

комплексная постоянная, u_0, P_0 - произвольные комплексные постоянные. Комплексной теперь является и $P_1 = (\alpha\beta - \gamma\delta)/\mu$. В результате функция $P(t)$ - также комплексная. В отличие от (11.17) решение (11.40) теперь может быть периодическим. Это возможно, например, в случае $\lambda = 0$ и $\mathrm{Re}\{\mu\} = 0$. Представим решение для Ψ в форме, аналогичной (11.18):

$$\Psi(z, \bar{z}, t) = f(t)|C|^2|g(z)|^2 + e^{\lambda t}\Phi(z, \bar{z}), \qquad (11.41)$$

где

$$\Phi(z, \bar{z}) = |\psi_1|^2 \left(\alpha + \beta|\eta|^2 + \gamma\eta^* + \delta\eta\right), \qquad (11.42)$$

а все остальные обозначения совпадают с (11.19). Рассмотрим условие (11.33) в следующей форме

$$\Psi_1 + \Psi_2 = \Psi + \Psi^* = |C|^2|g(z)|^2(f(t) + f^*(t)) + e^{\lambda t}(\Phi + \Phi^*) = F(t)|g(z)|^2.$$

Отсюда находим, что комплексные постоянные $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ должны быть связаны соотношениями, аналогичными (11.39):

$$\gamma + \delta^* = (\beta + \beta^*)\xi, \quad (\alpha + \alpha^*) = (\beta + \beta^*)|\xi|^2,$$

первое из которых - комплексное, а второе - действительное. В результате получаем

$$F(t) = |C|^2(f(t) + f^*(t)) + e^{\lambda t}(\beta + \beta^*).$$

Решение исходного уравнения в этом случае имеет вид

$$U = \frac{F(t)|g(z)|^2}{[|f(t)|^2|C|^4|g(z)|^4 + e^{\lambda t}|C|^2(f^*(t)\Phi + f(t)\Phi^*) + e^{2\lambda t}\Phi\Phi^*]}.$$

В случае $\lambda = 0$ и $\mathrm{Re}\{\mu\} = 0$ это решение - периодическое по времени и соответствует $N = 3$, как и предыдущее.

Решения с $N > 3$. Рассмотрим теперь три экземпляра функций (11.37) (n=3). Условие (11.36) в этом случае сводится к системе алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
&C_1(\alpha_2 + \alpha_3) + C_2(\alpha_1 + \alpha_3) + C_3(\alpha_2 + \alpha_1) = \nu_0|\xi|^2,\\
&C_1(\beta_2 + \beta_3) + C_2(\beta_1 + \beta_3) + C_3(\beta_2 + \beta_1) = \nu_0, \qquad (11.43)\\
&C_1(\gamma_2 + \gamma_3) + C_2(\gamma_1 + \gamma_3) + C_3(\gamma_2 + \gamma_1) = \nu_0\xi,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_2 + \alpha_3\alpha_1 = |\xi|^4\mu_0, \quad \beta_1\beta_2 + \beta_3\beta_2 + \beta_3\beta_1 = \mu_0,\\
&\gamma_1\gamma_2 + \gamma_3\gamma_2 + \gamma_3\gamma_1 = \xi^2\mu_0,\\
&\beta_1(\gamma_2 + \gamma_3) + \beta_2(\gamma_3 + \gamma_1) + \beta_3(\gamma_2 + \gamma_1) = 2\xi\mu_0,\\
&\alpha_1(\gamma_2 + \gamma_3) + \alpha_2(\gamma_3 + \gamma_1) + \alpha_3(\gamma_2 + \gamma_1) = 2\xi|\xi|^2\mu_0, \qquad (11.44)\\
&\gamma_1(\gamma_2^* + \gamma_3^*) + \gamma_2(\gamma_3^* + \gamma_1^*) + \gamma_3(\gamma_2^* + \gamma_1^*) +\\
&+\alpha_1(\beta_2 + \beta_3) + \alpha_2(\beta_3 + \beta_1) + \alpha_3(\beta_2 + \beta_1) = 4|\xi|^2\mu_0.
\end{aligned}$$

Последняя система девяти нелинейных алгебраических уравнений (пять действительных и четыре комплексных) относительно одиннадцати действительных и четырех комплексных параметров невырождена и недоопределена и поэтому имеет бесконечное число решений. Эти решения находятся без особого труда, но имеют достаточно громоздкий явный вид. Поэтому не будем их здесь приводить. Следствием выполнения (11.43) является тождество

$$\Psi_1\Psi_2 + \Psi_2\Psi_3 + \Psi_3\Psi_1 =$$
$$= |g(z)|^4 \left(f(t)^2(C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1) + e^{\lambda t} f(t)\nu_0 + e^{2\lambda t}\mu_0\right),$$

и суперпозиционное решение можно записать в виде

$$U = \frac{|g(z)|^4 \left(f(t)^2(C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1) + e^{\lambda t} f(t)\nu_0 + e^{2\lambda t}\mu_0\right)}{\Psi_1\Psi_2\Psi_2}.$$

Это решение соответствует $N = 4$, поскольку $\Psi_0 = \Psi_1\Psi_2\Psi_2$ - квадратичная форма с координатами $\{\psi_1^3, \psi_2^3, \psi_1^2\psi_2, \psi_2^2\psi_1\}$.

По аналогии с этими примерами можно построить решения, соответствующие большим значениям N, подбирая подходящее число функций Ψ_i $i = 1, \ldots, n$. В случае $n = 2k$ существуют периодические решения, если $\Psi_{i+k} = \Psi_i^*, i = 1, \ldots, k$. Однако доказательство применимости данного принципа суперпозиции для произвольных N остается открытым.

В качестве еще одного примера рассмотрим решение, получающееся с помощью суперпозиции двух решений с $N = 3$ типа (11.6),(11.22). Для построения этих решений можно воспользоваться тем обстоятельством, что в (11.22) функции a, b, c определены с точностью до знака, т.е. если a, b, c - решения, то и $\varepsilon_1 a, \varepsilon_2 b, \varepsilon_3 c$ - вновь решения, где $\varepsilon_i = \pm 1$. Выберем в качестве Ψ_1 и Ψ_2 функции следующего вида

$$\Psi_1(z, \bar{z}, t) = a(t)|\psi_1|^2 + b(t)|\psi_2|^2 + c(t)|\psi_3|^2,$$
$$\Psi_2(z, \bar{z}, t) = a(t)|\psi_1|^2 - b(t)|\psi_2|^2 - c(t)|\psi_3|^2.$$

Тогда условие (11.33) выполняется автоматически: $\Psi_1 + \Psi_2 = 2a(t)|\psi_1|^2$. Отсюда получаем, что

$$U = \frac{2a(t)|\psi_1|^2}{\Psi_1\Psi_2}$$

решение исходного уравнения. Модовая размерность этого решения - $N = 6$. Аналогично можно строить и более сложные решения.

Заключение. Существование нелинейного принципа суперпозиции для решений исходного уравнения (11.1) имеет следствием наличие у него многомодовых решений, зависящих от одного функционального параметра. Это напоминает явление существования многосолитонных решений для уравнений, имеющих представление Лакса. Существенным отличием уравнения (11.1) от уравнений, допускающих многосолитонные решения, является его диффузионный характер. Как и в случае бездиссипативной дисперсионной динамики, соответствующей солитонным уравнениям типа КдВ, уравнение (11.1) должно иметь достаточно богатый набор дифференциальных законов сохранения (в чистом виде для $\lambda = 0$). Если следовать идеологии теории солитонов, то можно сказать, что для изучаемого здесь уравнения (11.1) наличие точных решений с "простой" динамикой и структурой является следствием баланса нелинейности и диффузии, наподобие того баланса, который существует в нелинейных диспергирующих средах для солитонов. Это наблюдение и результаты работ [111, 112] показывают, что диффузионные уравнения, допускающие многомодовые решения представляют собой класс, по-видимому, не менее богатый, чем солитонные уравнения. Метод квадратичных форм, использованный в данной работе и работах [111, 112], а так же обобщенный в работе [19], представляется достаточно естественным способом построения многомодовых решений для этого класса уравнений и, по-видимому, является для них удобной заменой метода обратной задачи рассеяния, используемого в теории солитонных уравнений.

Глава 12

Математические дополнения

12.1 А. Метод преобразований Дарбу для уравнения КдВ

Рассмотрим вначале метод преобразований Дарбу на примере наиболее простого уравнения, имеющего представление Лакса - уравнения КдВ. Представление Лакса для этого уравнения имеет вид:

$$[\mathbf{L}, \mathbf{M}] = 0, \tag{12.1}$$

где операторы $\mathbf{L}$ и $\mathbf{M}$ имеют следующий вид

$$\mathbf{L} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x,t),$$
$$\mathbf{M} = \frac{\partial}{\partial t} + 4\frac{\partial^3}{\partial x^3} + 6u\frac{\partial}{\partial x} + 3u_x.$$

Пусть имеется обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_0(\lambda,x) + u_0(x)\psi_0(\lambda,x) = \lambda^2\psi_0(\lambda,x) \tag{12.2}$$

с заданной функцией $u_0(x)$, для которого известно решение $\Psi_0(x) = \psi_0(\lambda_0, x)$ при некотором значении параметра λ_0. Тогда уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_1(\lambda,x) + u_1(x)\psi_1(\lambda,x) = \lambda^2\psi_1(\lambda,x) \tag{12.3}$$

с функцией

$$u_1(x) = u_0(x) - 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\{\Psi_0(x)\} \tag{12.4}$$

будет иметь решения

$$\psi_1(\lambda,x) = \frac{\partial}{\partial x}\psi_0(\lambda,x) - \psi_0(\lambda,x)\frac{\partial}{\partial x}\ln\{\Psi_0(x)\} \tag{12.5}$$

для всех λ. Соотношения (12.4) и (12.5) называются преобразованием Дарбу. Преобразование можно теперь повторить для уравнения (12.3) и т.д.

Обобщенный вариант метода преобразований Дарбу для построения солитонных решений уравнения КдВ, а затем и других уравнений был предложен в работах [81] (см. также [66]). Опишем его в обобщенной форме для уравнения КдВ.

Пусть $u_0(x,t)$ - некоторое известное решение уравнения КдВ, $\mathbf{L_0}$ и $\mathbf{M_0}$ - соответствующие ему операторы представления Лакса, а $\psi_0(\lambda,x,t)$ - их общая собственная функция:

$$\mathbf{L_0} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + u_0(x,t), \tag{12.6}$$

$$\mathbf{M_0} = \frac{\partial}{\partial t} + 4\frac{\partial^3}{\partial x^3} + 6u_0\frac{\partial}{\partial x} + 3u_{0,x}. \tag{12.7}$$

Операторы $\mathbf{L_0}$ и $\mathbf{M_0}$ коммутируют между собой.

Задача заключается в построении нового решения $u(x,t)$ КдВ по известному решению $u_0(x,t)$ и функции $\psi_0(\lambda,x,t)$. Решение этой задачи в рамках обобщенного метода преобразований Дарбу состоит в построении таких операторов $\mathbf{L}$ и $\mathbf{M}$ общего вида (12.6), что их собственные функции $\psi(\lambda,x,t)$ связаны с $\psi_0(\lambda,x,t)$ преобразованием

$$\psi(\lambda,x,t) = \mathbf{A}\psi_0(\lambda,x,t), \tag{12.8}$$

где $\mathbf{A}$ - некоторый дифференциальный оператор.

Вид оператора $\mathbf{A}$ и решение поставленной задачи в целом определяются следующими соображениями. Представим неизвестную функцию $u(x,t)$ и соответствующие ей операторы $\mathbf{L}$ и $\mathbf{M}$ в виде:

$$\begin{aligned} &u(x,t) = u_0(x,t) - r(x,t), \\ &\mathbf{L} = \mathbf{L_0} - r(x,t), \quad \mathbf{M} = \mathbf{M_0} - \mathbf{D}, \\ &\mathbf{D} = 6r\frac{\partial}{\partial x} + 3r_x. \end{aligned}$$

Подставляя (12.8) в (12.1), получаем уравнения, которым должен удовлетворять оператор $\mathbf{A}$

$$[\mathbf{L_0},\mathbf{A}] = r(x,t)\mathbf{A}, \qquad [\mathbf{M_0},\mathbf{A}] = \mathbf{DA}. \tag{12.9}$$

Для того, чтобы оператор $\mathbf{A}$ удовлетворял одновременно этим двум уравнениям, необходимо и достаточно, чтобы его собственные функции, отвечающие его нулевому собственному числу, были собственными функциями операторов $\mathbf{L_0}$ и $\mathbf{M_0}$. Следовательно, для того, чтобы $\mathbf{A}$ при N-кратном вырождении его нулевого собственного числа удовлетворял уравнениям (12.9), достаточно, чтобы существовала совокупность из N линейно-независимых функций $\psi_i(x,t)$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\mathbf{A}\psi_i = 0, \tag{12.10}$$

$$\mathbf{L_0}\psi_i = \lambda_i^2\psi_i, \tag{12.11}$$

$$\mathbf{M_0}\psi_i = R(\lambda_i)\psi_i, \tag{12.12}$$

$$i = 1, \ldots, N. \tag{12.13}$$

Для построения солитонных и квазисолитонных решений уравнения КдВ достаточно рассматривать в качестве $\mathbf{A}$ дифференциальные операторы конечного порядка по x

$$\mathbf{A_N} = \sum_{i=0}^{N} \xi_i(x,t)\frac{\partial^i}{\partial x^i}, \quad \xi_N = 1. \tag{12.14}$$

Эти операторы имеют N-кратно вырожденное нулевое собственное значение, т.е. уравнение $\mathbf{A_N}\psi(x,t) = 0$ имеет ровно N линейно-независимых решений.

Подставляя (12.14) в (12.10), приходим к замкнутой системе алгебраических уравнений для вычисления коэффициентов $\xi_i(x,t)$, $i = 0, \ldots, N-1$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \xi_k(x,t)\psi_i^{[k]} = -\xi_N\psi_i^{[N]}$$

где $\psi^{[k]} \equiv \partial^k\psi_i/\partial x^k$. Эта система не вырождена, если функции ψ_i линейно-независимы и следовательно определитель Вронского

$$\Delta_N = det||\psi_i^{[j]}|| = \begin{vmatrix} \psi_1^{[N-1]} & \psi_1^{[N-2]} & \ldots & \psi_1^{[1]} & \psi_1 \\ \psi_2^{[N-1]} & \psi_2^{[N-2]} & \ldots & \psi_2^{[1]} & \psi_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \psi_N^{[N-1]} & \psi_N^{[N-2]} & \ldots & \psi_N^{[1]} & \psi_N \end{vmatrix} \not\equiv 0 \tag{12.15}$$

отличен от нуля. Решая эту систему методом Крамера, в частности, приходим к соотношению

$$\xi_{N-1} = -\partial \ln \Delta_N/\partial x.$$

Действительно

$$\xi_N(x,t) = -\frac{\Delta_{N-1}}{\Delta_N},$$

где

$$\Delta_{N-1} = \begin{vmatrix} \psi_1^{[N]} & \psi_1^{[N-2]} & \dots & \psi_1^{[1]} & \psi_1 \\ \psi_2^{[N]} & \psi_2^{[N-2]} & \dots & \psi_2^{[1]} & \psi_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_N^{[N]} & \psi_N^{[N-2]} & \dots & \psi_N^{[1]} & \psi_N \end{vmatrix}.$$

Но последний определитель может быть записан в виде

$$\Delta_{N-1} = \frac{\partial}{\partial x}\Delta_N.$$

Если уравнения (12.10-12.12) решены, то это гарантирует выполнение соотношений (12.9). При этом функция $r(x,t)$ может быть найдена с помощью прямого вычисления коммутатора $[\mathbf{L_0}, \mathbf{A}_N]$ в (12.9) для оператора $\mathbf{A}_N$. Вид функции $r(x,t)$ устанавливается видом множителя у коэффициента при производной любого порядка оператора $\mathbf{A}_N$ в выражении для коммутатора $[\mathbf{L_0}, \mathbf{A}_N]$, например, у старшей производной:

$$[\mathbf{L_0}, \mathbf{A_N}] = 2\partial_x\xi_{N-1}\partial_x^N + O(\partial_x^{N-1}) = 2\partial_x\xi_{N-1}\xi_N^{-1}\mathbf{A}_N \tag{12.16}$$

Здесь $O(\partial_x^{N-1})$ обозначает все члены в выражении справа, при производных по переменной x порядка $N-1$ и ниже. Отсюда

$$r(x,t) = 2\partial_x\xi_{N-1}\xi_N^{-1}, \quad u(x,t) = u_0(x,t) - 2\partial^2 \ln\Delta_N/\partial x^2 \tag{12.17}$$

Эти соотношения в совокупности с (12.8) и реализуют обобщенное преобразование Дарбу для уравнения КдВ, которое, в свою очередь, является одним из способов реализации процедуры “одевания голых операторов” $\mathbf{L}_0$ и $\mathbf{M}_0$.

Рассмотрим более подробно соотношение (12.16). Полное выражение для коммутатора $[\mathbf{L_0}, \mathbf{A_N}]$ имеет вид

$$[\mathbf{L_0}, \mathbf{A_N}] = 2\partial_x\xi_{N-1}\partial_x^N + \sum_{k=1}^{N-1}\Big(2\partial_x\xi_{k-1} + \partial_x^2\xi_k\Big)\partial_x^k + \partial_x^2\xi_0.$$

Сравним его с полным выражением для правой части $r(x,t)\mathbf{A}_N$ в (12.9), которое согласно (12.14) и (12.17) имеет вид

$$r(x,t)\mathbf{A}_N = 2\partial_x\xi_{N-1}\sum_{k=0}^{N}\xi_k\frac{\partial^k}{\partial x^k}$$

Отсюда получаем следующий набор соотношений, которые связывают между собой функции ξ_k:

$$2\partial_x\xi_{k-1} + \partial_x^2\xi_k = 2\xi_k\partial_x\xi_{N-1}, \quad k = 1,\dots,N-1, \tag{12.18}$$

$$\partial_x^2\xi_0 = 2\xi_0\partial_x\xi_{N-1}. \tag{12.19}$$

Заметим также, что прямое вычисление коммутатора $[\mathbf{M_0}, \mathbf{A_N}]$ позволяет вычислить вид оператора $\mathbf{D}$ в (12.9), который будет соответствовать (12.9), если воспользоваться формулой (12.17) для $r(x,t)$. По аналогии с (12.16) имеем

$$[\mathbf{M}_0, \mathbf{A_N}] = 12(\partial_x^2 \xi_{N-1} + \partial_x \xi_{N-2} + \partial_x \xi_{N-1} \partial_x) \partial_x^N + O(\partial_x^{N-1}). \qquad (12.20)$$

Выражение справа в этой формуле должно теперь иметь вид $\mathbf{DA}$, где $\mathbf{D}$ - дифференциальный оператор первого порядка по переменной x: $6r\partial_x + 3r_x$. Докажем это. Пусть $\mathbf{D} = q_1 \partial_x + q_0$. Тогда

$$\mathbf{DA} = (q_0 + q_1 \xi_{N-1} + q_1 \partial_x) \partial_x^N + O(\partial_x^{N-1}).$$

Сравнивая это соотношение с (12.20) находим

$$\begin{aligned} q_1 &= 12 \partial_x \xi_{N-1} = 6r(x,t), \\ q_0 &= 12(\partial_x^2 \xi_{N-1} + \partial_x \xi_{N-2}) - q_1 \xi_{N-1} = 6\partial_x^2 \xi_{N-1} = 3r_x \end{aligned}$$

Здесь использована связь между ξ_{N-1} и ξ_{N-2}, следующая из (12.16)

$$2\partial_x \xi_{N-2} + \partial_x^2 \xi_{N-1} = 2\xi_{N-1} \partial_x \xi_{N-1}$$

Таким образом $\mathbf{D} = 6r\partial_x + 3r_x$, что и требовалось доказать.

12.2 B. Общая структура функций трехмодовых решений

Структура функций $\psi_i(z),\ i = 1, 2, 3$, относительно которых определены трехмодовые квадратичные формы, определяются в самом общем случае тремя обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} \psi_1 \psi_2' - \psi_2 \psi_1' &= f(z) \sum_{k=1}^{3} \Lambda_{3k} \psi_k, \\ \psi_2 \psi_3' - \psi_3 \psi_2' &= f(z) \sum_{k=1}^{3} \Lambda_{1k} \psi_k, \\ \psi_3 \psi_1' - \psi_1 \psi_3' &= f(z) \sum_{k=1}^{3} \Lambda_{2k} \psi_k. \end{aligned} \qquad (12.21)$$

Эта система совместна, если функции $\psi_i(z)$ связаны одним алгебраическим соотношением

$$\sum_{k=1}^{3} \Lambda_{ik} \psi_k \psi_i = 0. \qquad (12.22)$$

Общее решение этого алгебраического уравнения может быть представлено в виде

$$\psi_i = g(z)\left(C_i + A_i \sin\theta(z) + B_i \cos\theta(z)\right), \quad i = 1, 2, 3.$$

Подставляя эти соотношения в (12.21) получаем

$$\begin{aligned}
&g(z)\theta'(z) = f(z), \\
&\sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} A_j B_k = -\sum_{k=1}^{3} \Lambda_{ik} C_k, \\
&\sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} B_j C_k = \sum_{k=1}^{3} \Lambda_{ik} A_k, \\
&\sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} C_j A_k = \sum_{k=1}^{3} \Lambda_{ik} B_k, \\
&i = 1, 2, 3.
\end{aligned}$$

Здесь ε_{ijk} - полностью антисимметричный символ, заданный соотношением $\varepsilon_{123} = -1$.

Рассмотрим квадратичную форму

$$\Psi(z, \bar{z}) = |w|^2 \left(a|\psi_1|^2 + b|\psi_2|^2 + c|\psi_3|^2\right) = |w|^2 \left(\sum_{ik} h_{ik} \psi_i^* \psi_k\right)$$

и тождество, с ней связанное:

$$\Delta \ln \Psi(z, \bar{z}) = |w|^4 \frac{ab|W_{12}|^2 + bc|W_{23}|^2 + ac|W_{31}|^2}{\Psi^2}.$$

В случае, если функции ψ_i удовлетворяют уравнениям (12.21), то в последнем тождестве справа числитель принимает следующий вид

$$ab|W_{12}|^2 + bc|W_{23}|^2 + ac|W_{31}|^2 = ab|\Lambda_{3i}\psi_i|^2 + bc|\Lambda_{1i}\psi_i|^2 + ac|\Lambda_{2i}\psi_i|^2.$$

Последнее соотношение должно переходить в исходную квадратичную форму. Поэтому

$$ab\Lambda_{3i}\Lambda_{3k}^* + bc\Lambda_{1i}\Lambda_{1k}^* + ac\Lambda_{2i}\Lambda_{2k}^* = h_{ik}.$$

Литература

[1] Адлер В.Э., Шабат А.Б. // ТМФ, **111**, N 3, с. 323 (1997)

[2] Алексеев Г.А., Андреев В.А. *Итоги науки и техники. Сер. “Классическая теория поля и теория гравитации.”*, **4**, 4 (1992).

[3] Антонов Д.И., Журавлев В.М. //Ученые записки УлГУ, сер. физическая, N 2(9), с. 68-70 (2000)

[4] Ахманов С.А.,Выслоух В.А.,Чиркин А.С. *Оптика фемтосекундных лазерных импульсов.* М:Наука, (1988), 310 с.

[5] Багров В., Самсонов // ФЭЧАЯ, **28**, в.4, с. 951-1012 (1997)

[6] Белинский В.А., Захаров В.Е. //ЖЭТФ, **75**, N 6, 1953 (1978).

[7] Борисов А.В., Мамаев И.С. *Гамильтоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике.* Издательский дом "Удмуртский университет 1999

[8] Бурцев С.П.,Захаров В.Е., Михайлов А.В. // ТМФ, **70**, N3, 323 (1987).

[9] Бхатнагар П. **Нелинейные волны в одномерных дисперсных системах.** М.:Мир, (1983), 135 с.

[10] Вайнберг С.. *Гравитация и космология.* М.:Мир, 696 с. (1975).

[11] Выслоух В.А., Чередник И.В. // ТМФ, **77**, 32 (1988).

[12] Гельфанд И.М.,Дикий Л.А. // УМН, **30**, в.5, 67 (1975).

[13] Громов Е.М.,Накаряков В.М.,Таланов В.И.. ЖЭТФ, **100**, в.6, 1785 (1991).

[14] Давыдов А.С. Солитоны в молекулярных ситемах. Киев: Наукова думка, (1984), 288 с.

[15] Дикий Л.А. *Нелинейные волны* /Под ред. Гапонова-Грехова. М.:Наука, (1979), с. 36.

[16] Додд Р.,Эйлбек Дж.,Гиббон Дж.,Моррио Х. *Солитоны и нелинейные волновые уравнения.* М.:Мир,1988,с.694.

[17] Дринфельд В.Г., Соколов В.В. *Алгебры Ли и уравнения типа Кортевега-де Фриза. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики.* **24**. М.:ВИНИТИ, с.81-181, (1984)

[18] Журавлев В.М. // ТМФ, т.124, N2, с.265-278 (2000)

[19] Журавлев В.М. // ТМФ, т.120, N1, с.3-19 (1999)

[20] Журавлев В.М. // Письма в ЖЭТФ. **61**, в.4, 254 (1995)

[21] Журавлев В.М. // ЖЭТФ, т.110, N 6, с. 910-929 (1996)

[22] Журавлёв В.М. *Введение в теорию солитонов и метод преобразований Дарбу. Методич. пособ.* Ульяновск. Изд. УлГУ (1995), с. 60

[23] Журавлёв В.М. // ПММ, **58**, N6, 61 (1994).

[24] Журавлев В.М., Коробко Д.А. // Ученые записки УлГУ, сер. физическая, N 1(3), с. 3-8 (1997).

[25] Журавлев В.М. // Ученые записки УлГУ, сер. физическая, N 2(9), с. 3-11 (2000).

[26] Журавлев В.М., Корнилов Д.А. // Ученые записки УлГУ, сер. физическая, N 2(9), с. 57-63 (2000)

[27] Журавлев В.М. // Известия вузов, сер. прикладная нелинейная динамика, **9**, N 2, с. 76-81 (2001)

[28] Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. *Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса.* М.:Наука (1988)

[29] Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. *Теория солитонов: метод обратной задачи.* М:Наука, (1980) 319с.

[30] Захаров В.Е., Шабат А.Б. //Функц. анализ и его прил., **6**, 3, 43 (1974).

[31] Захаров В.Е. *Солитоны.* /Под ред. Р.Буллафа, Ф.Кодри., М:Мир, 270 (1983).

[32] Захаров В.Е.,Манаков С.В. //Функц. анализ и его прил. **19**, В.2, 11 (1985).

[33] В.Е.Захаров, С.В.Манаков, //ЖЭТФ, **69**, в. 5, 1654 (1975)

[34] Карпман В.И., Маслов Е. A perturbation theory for inverse scattering transformation. // ЖЭТФ, **73**, 537 (1977).

[35] Келехсаева И.А. //Физ. плазмы, **21**, N 4, 364 (1995)

[36] Кившарь Ю.С.,Конотоп В.В. //Квантовая электрон., **16**, 868 (1989)

[37] Кузнецов Е.А., Михайлов А.Б. // ТМФ, **30**, 193 (1977).

[38] Кричевер И.М. //УМН, **32**, в.6, с.183-208 (1977)

[39] Lax P.D. //Comm.Pure and Appl. Math. bf 21, N5, 467-490 (1968)

[40] Ландау Л.Д.,Лифшиц Е.М.. *Теория поля.* М.:Наука, (1988).

[41] Лезнов А.Н., Савельев М.В. *Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем.* М.:Наука, (1985) 279 с.

[42] Линде А.Д., *Физика элементарных частиц и инфляционная космология.*, М.:Наука, (1990)

[43] Льюис Дж. *Ценность. Сопряженная функция.* М:Атомиздат, (1972)

[44] Мандельштам Л.И. Лекции по теории колебаний. М.: Наука, (1972)

[45] Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.:Наука, (1982)

[46] Мезенцев В.К., Турицын С.К. //Кв. электроника **18**, N 5, 610 (1991).

[47] Михайлов А.В., Шабат А.Б. // ТМФ, **62**, 163, (1985); **66**, N1, 47 (1986).

[48] Михайлов А.В., Шабат А.Б., Ямилов Р.И. // УМН **42**, в.4, 3 (1987)

[49] Ю.Мозер. *Интегрируемые гамильтоновы системы и спектральная теория.* Ижевск:Изд. РХД, с. 294 (1999).

[50] *Нелинейные электромагнитные волны.* /Под ред. П.Усленги. М:Мир, (1983), 312 с.

[51] Ньюэлл А. *Солитоны в математике и физике.* М.:Мир, (1989).

[52] Попов А.Д. //ТМФ, **89**, 402 (1991)

[53] Рыбаков Ю.П. // Вестник РУДН, сер. Физика, N3, в.1б 130-137 (1995)

[54] Рыбин А.В., Салль М.А. //ТМФ, **63**, N3, (1982)

[55] Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. М.:Наука, (1997), 316 с.

[56] Соколов В.В. //УМН, **43**, в.5, 133 (1988)

[57] Свинолупов С.И.,Соколов В.В. //УМН, **47**, в.3, 115 (1992).

[58] Свинолупов С.И., Соколов В.В.. //ТМФ,**100**, N 2, 214 (1994).

[59] Свинолупов С.И.,Ямилов Р.И. //ТМФ, **98**, N.2, 207 (1994).

[60] *Солитоны.* /Под ред. Р.Буллафа, Ф.Кодри. М:Мир, (1983).

[61] Сухоруков А.П.. *Нелинейные волновые процессы взаимодействия в оптике и радиофизике.* М.:Наука, (1988).

[62] Тагиев З.А., Касумова Р.Дж., Амиров Ш.Ш. //Оптика и спектроскопия, **75**, в. 4, 908 (1993).

[63] Тахтаджан Л.А., Фаддеев Л.Д. *Гамильтонов подход в теории солитонов.* М.: Наука, 1986.

[64] Тода М. *Теория нелинейных решеток.* М:Мир, 1984.

[65] Толмен Р., *Относительность, термодинамика и космология.*, М.:Наука, (1974).

[66] *Физика на пороге новых открытий.* /Под. ред. Л.Н.Лабзовского. Л.:Изд. ЛГУ, (1990), с.246-278.

[67] *Физики продолжают шутить.* М.:Мир, (1978)

[68] Хасилев В.Я.. // Письма в ЖЭТФ, **56**, в.4, 197 (1992).

[69] Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.:Мир, 1974.

[70] Учайкин В.В., Лагутин А.А. Стохастическая ценность. М: Энергоатомиздат, (1993)

[71] Цхакая Д.Д. //ТМФ, **95**, N1, 20-33 (1993)

[72] Шульман Е.И. // ТМФ, **56**, N1, 131-136 (1983)

[73] Эйнштейн А. Собрание научных трудов. Т.2. М.: Мир, (1966).

[74] Broglie L. de. *Une tentative d'interpretation causale et non lineaire de la mecanique ondulatoire.* - Paris, (1956).

[75] Darboux G. //Compt. Rend. **94** ,1343-1345 (1882)

[76] Hirota R. //J.Math.Phys., **14**, 805 (1973)

[77] Ivashchuk V.D., Melnikov V.N. //Gravitational and Cosmology, **1**, 204 (1995); Ivashchuk V.D., Melnikov V.N., // Gravitational and Cosmology, **2**, 177 (1996)

[78] Ivashchuk V.D., Melnikov V.N. // I.J.Moden Phys. D, **3**, N 4, 795-811 (1994)

[79] Crum M. //Quart. J. of Math., **6**, (1955)

[80] Majumdar S.D. // Phys.Rev, **79**, 390 (1947); Papapetrou A. // Proc. Roy. Irish. Acad., **A 51**, 191 (1947)

[81] Matveev V.B. //Lett.in Math.Phys., **3** , (1979)

[82] Mi G. // Ann. der Physik., **37**, 511 (1912); **39**, 1 (1912); **40**, 1 (1912)

[83] Miura R.M., Gardner C.S., Kruskal M.D.// J. Math. Phys, **9**, 1204 (1968)

[84] Kaup D.J. //SIAM J. Appl. Math., **31**, 121 (1976).

[85] Kupershmidt B.A. // Proc. Roy. Irish. Acad. **A83**, N1, 45 (1983).

[86] Lesnov A., Savel'ev M.// Physica 3D, 1981, p. 6272.

[87] Malomed B.A. //Phys.Scr. **47**, 311, 797 (1993); Opt.Letts., **19**, 341 (1994).

[88] Matzner R.A.,Misner C.W. // Phys.Rev., **154**, 1229 (1967).

[89] Rybakov Yu. P., Saha R. // Foundations of Physics., **25**, N.12, 1723-1731 (1995)

[90] Wahlquist H.D., Estabrook F.B. //J.Math.Phys., **16**, 1 (1975); J.Math.Phys., **17**, 1293 (1976).

[91] Williams M.I., Engle W.W. //Nucl.Sci.Eng., **62**, 92-104 (1977)

[92] Zakharov V.E. In: Procceedings of Int. Congress on Mathematical Physics. Berlin: Springer-Verlag, (1982).

[93] Zakharov V.E.,Shulman E.I.//Phisica D.,**1D**,N2, 192-202 (1980)

[94] Zakharov V.E.,Shulman E.I. //Physica D., **3D**, N3, 120-125 (1980)

[95] Zhuravlev V.M., Chervon S.V., Shabalkin D.Yu. //Grav. Cosm., N 4, 41 (1997).

[96] Perlmutter S. et al. // astro-ph/9812133, astro-ph/9812473; Riess A.G. et al. // astro-ph/9804065.

[97] Аристов С.Н. // ПМТФ, **40**, N1, 22-26 (1999)

[98] Аристов С.Н. //Док.РАН, **343**, N1, 50-52 (1995)

[99] Аристов М.Н., Мясников В.П. Нестационарные трехмерные структуры в приповерхностном слое океана. //Док.РАН, **349**, N4, 475-477 (1996)

[100] Бражник П.К., Давыдов В.А., Михайлов А.С. // ТМФ, **74**, 440 (1988).

[101] Богоявленский О.И. *Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике.* М: Наука, (1980).

[102] Васильев В.А.,Романовский Ю.М., Яхно В.Г. *Автоволновые процессы.* /Под ред. Д.С.Чернавского. М.:Наука, (1987).

[103] Векуа И.Н. Основы тензорного анализа и теории ковариантов. М:Наука, (1978), 296 с.

[104] Воинов О.В. //ПМТФ, **35**, N6, 69-85 (1994)

[105] Галактионов В.А., Дороницин В.А., Еленин Г.Г. и др. Сб. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. **28**, 95-206 (1987)

[106] Гранштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений,* М.: Наука, (1971).

[107] Давыдов В.А., Зыков В.С., Михайлов А.С. // УФН, **161**, 45 (1991).

[108] Давыдов В.А., Морозов В.Г. // УФН, **166**, N3, 327 (1996).

[109] Давыдов В.А., Столяров М.Н., Давыдов Н.В., Ямагучи Т. // Труды международной конференции "Критерии самоорганизации в физических, химических и биологических системах. Москва-Суздаль. Июнь, 1995."Суздаль, 63-82 (1995)

[110] Жаботинский А.М. *Концентрационные колебания.* М.: Наука, (1974)

[111] Журавлёв В.М. //Письма в ЖЭТФ, **65**, N3, 285 (1997).

[112] Журавлёв В.М. //ЖЭТФ, **114**, N5, 1897-1914 (1998).

[113] Кантуэлл Б.Дж. Вихри и волны. /Под ред. А.Ю.Ишлинский, Г.Г.Черный. М.: Мир, 9 (1984).

[114] Капцов О.В. //Докл.АН СССР, **298**, N 3, 597-600 (1988)

[115] Капцов О.В. //ПММ, **54**, в.3, 409-415 (1990)

[116] Кернер Б.С., Осипов В.В. *Автосолитоны: Локализованные сильно-неравновесные области в однородных диссипативных системах.* М.: Наука, (1991).

[117] Козлов В.В. *Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике.* Ижевск: Изд. Удмуртского гос. универ., (1995)

[118] Комаров Н.Н. //Ядерный синтез, N3, 174-182 (1963)

[119] Ланде П.С. *Нелинейные колебания и волны.* М.: Наука, (1997), 496с.

[120] Лэмб Г. *Гидродинамика.* М:Л:Гостехиздат, (1947), 928 с.

[121] Марри Дж. *Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. (Лекции о моделях).* М:Мир, (1983).

[122] Плотинский Ю.М. *Теоретичекие и эмпирические модели социальных процессов.* М.: Логос, (1998). 279 с.

[123] Полянин А.Д., Вязьмин А.В., Журов А.И., Казенин Д.А. *Справочник по точным решениям уравнений тепло- и массопереноса.* М.:"Факториал (1998), 367 с.

[124] Пригожин И. *От существующего к возникающему.* М.:Наука, (1991).

[125] Пухначев В.В. //ПМТФ, Т.36, N2, 23-31 (1995)

[126] Самарский А.А., Михайлов А.П. *Математическое моделирование.* М.: Наука, (1997), 320с.

[127] *Справочник по специальным функциям.* /Под ред. Абрамовица и И. Стиган. Гл. 18. С. 443.

[128] Тихонов, А.А.Самарский. *Уравнения математической физики.* М.:Наука, (1974)

[129] Фролов Ю.П. *Введение в математическое моделирование биологических процессов.* Часть 1,2. Самара: Изд. Самарский университет, (1994).

[130] Хакен Г. *Синергетика.* М:Мир, (1980).

[131] Bogoyavlensky O.I. // Commun.Math.Phys., **51**, N 3, 201-209 (1976)

[132] Field R.J., Noyes R.M. Oscillations in chemical systems. IV. // J.Chem.Phys., **60**, N 5., 1877-1884 (1974).

[133] Higgins J. // Ind. and Enginering Chemistry, **59**, N 5, 19-27 (1967).

[134] Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S. // Proc. IRE, **50**, 2061-2070 (1962)

[135] Nicolis G., Prigogine I. Self-organization in non-equilibrium systems. N.Y.: Wiley, (1977)

Оглавление