

В.М. Журавлев

Интегрируемые модели теоретической физики

Метод функциональных подстановок



Лекция 1. Метод функциональных подстановок и интегрируемые модели теоретической физики

- Я предпочитаю найти одну истину, хотя бы и в незначительных вещах, нежели долго спорить о величайших вопросах, не достигая никакой истины.

Г. Галилей

1 Введение

Успешность той или иной теоретической модели, основанной на дифференциальных уравнениях, зависит от того, насколько точным и полным может быть проведен анализ их решений. На современном этапе наиболее полный анализ может быть проведен для моделей, построенных на основе линейных дифференциальных уравнений. Основным свойством, определяющим успешное применение линейных моделей на практике, является принцип линейной суперпозиции, позволяющий собирать сложные решения из простейших. Это напоминает игру в кубики, когда из почти одинаковых по форме элементов собирают очень сложные конструкции. Поскольку методы построения решений, основанные на принципе линейной суперпозиции, очень эффективны при решении множества прикладных задач, то одним из основных направлений построения аналитических решений нелинейных уравнений является приведение их к совокупности линейных. Такой переход может осуществляться различными способами. Наиболее универсальный метод такого рода - это применение теории возмущений в той или иной форме. Однако использование теории возмущений лишает получаемые решения особых свойств, которые присущи именно решениям нелинейных моделей. Это связано с тем, что решение в теории возмущений

имеет вид бесконечных рядов, сходимость которых чаще всего не может быть проверена в полной мере. Это означает, что приближенные решения, построенные на основе первых нескольких порядков, чаще всего не отражают существенных свойств нелинейного процесса. Для выявления специфического поведения сложных систем необходимо иметь в распоряжении методы преобразования нелинейного уравнения в линейное или другое нелинейное уравнение, но допускающее полную интегрируемость. Одним из таких общих методов, позволяющих свести нелинейную задачу к линейной или полностью интегрируемой, является метод функциональных подстановок, развитие которого связано в первую очередь с подстановкой Коула-Хопфа для уравнения Бюргерса [2, 25, 24].

Современная физика и сопряженные с ней области науки оперируют множеством моделей процессов и явлений различного уровня сложности. Наиболее существенным свойством современных моделей является их нелинейность. Это свойство означает, что изначально изучаемое явление или процесс имеют или наделяются такими свойствами, которые нельзя представить в виде простой совокупности более простых процессов, протекающих независимо друг от друга. В нелинейных моделях все элементы систем взаимодействуют друг с другом так, что их невозможно простым образом разделить на отдельные составляющие. Очень часто именно нелинейность определяет характерные черты реальных явлений или процессов, которые не удается описать с помощью простых линейных моделей. Этот факт был осознан в полной мере лишь во второй половине XX века и стал одним из главных идеологических основ общего подхода к выбору моделей для описания реальных систем и их поведения.

Основной сложностью на пути использования нелинейных моделей для описания реальных явлений и процессов является отсутствие общих математических методов построения решений нелинейных уравнений, на которых строится модель. Поэтому одной из важных тенденций в математической и теоретической физике XX века стал пристальный интерес к различным математическим методам, которые позволяли бы строить точные решения определенных типов нелинейных уравнений, а более сложные уравнения упрощать так, чтобы их можно было бы привести к одному из видов интегрируемых нелинейных уравнений.

Методы редукции сложных уравнений к более простым появились с момента создания аппарата дифференциальных уравнений для описания физических явлений. Эти методы опирались на возможность представить решения сложных уравнений с помощью бесконечных рядов функций, которые являлись решениями более простых уравнений. Такой подход в целом называется теорией возмущений. Этот метод предполагает, что в исходном уравнении можно выделить некоторое простое точное решение сложной системы, которое отражает некоторое “невозмущенное” ее состояние, которое “не сильно” отличается от нужного решения. Далее с помощью решения совокупности, как правило, однотипных линейных уравнений невозмущенное решение аддитивно дополняется их решениями. Ос-

новная проблема такого подхода состоит в том, что множество невозмущенных, простых решений очень ограничено, а несколько дополнительных слагаемых в теории возмущений не отражают сути нелинейного явления, что можно получить лишь суммируя весь бесконечный ряд дополнительных решений. Последнее, однако, чаще всего на практике невозможно сделать.

Более развитый метод теории возмущений, часто называемый методом многомасштабных разложений [3, 4], дает возможность построить процедуру вычисления возмущенных решений так, что она может учитывать именно нелинейные свойства процесса. При этом на каждом шаге построения возмущенных решений приходится иметь дело с нелинейными уравнениями, но более простого вида. Этот подход и реализует концепцию приведения сложных уравнений к более простым, для которых уже имеются методы построения точных решений. Таким образом, на первый план в развитии методологии исследования нелинейных моделей выдвигаются методы отыскания или перечисления всех возможных интегрируемых нелинейных уравнений, которые могут быть использованы в схемах метода теории возмущений в форме многомасштабных разложений.

Первым полезным для широкого круга задач способом отыскания точноинтегрируемых уравнений математической физики стал метод обратной задачи (МОЗ), который первоначально опирался на методологическую базу квантовой теории. Основой МОЗ стала процедура приведения нелинейного уравнения к специальной форме записи, эквивалентной условию коммутативности пары линейных дифференциальных операторов, так называемой пары Лакса [29]. Первым и типичным примером применения МОЗ является уравнение Кортевега-де Вриза (КдВ):

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (1)$$

которое можно представить в виде условия коммутативности двух операторов:

$$\hat{L} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x, t), \quad \hat{A} = \frac{\partial}{\partial t} + 4\frac{\partial^3}{\partial x^3} + 3u(x, t)\frac{\partial}{\partial x} + 6u_x.$$

Действительно:

$$[\hat{L}, \hat{A}]\Psi = (u_t + 6uu_x + u_{xxx})\Psi.$$

Поэтому, если функция $u(x, t)$ такова, что коммутатор операторов \hat{L} и \hat{A} равен нулю для любой функции Ψ из подходящего функционального пространства, то эта функция является решением уравнения КдВ (1).

Линейные операторы и условия их коммутативности стали играть важную роль в задачах теоретической и математической физики благодаря квантовой теории. Однако те задачи, к которым применим МОЗ, относятся к гораздо более широкому кругу систем и явлений в них, чем квантовые системы, что и сделало МОЗ эффективным средством

исследований волновых процессов во многих разделах современной физики - гидродинамике, нелинейной оптике, теории плазмы и т.д. [22, 4, 45]. Тем не менее, к настоящему времени установлено, что круг нелинейных уравнений, интегрируемых МОЗ, оказался слишком узким и не отвечает требованиям множества постановок реальных физических задач. В первую очередь это относится к задачам, связанным с диссипативными процессами, которые не обладают достаточным числом дифференциальных законов сохранения, что составляет одно из основных свойств нелинейных уравнений, интегрируемых МОЗ.

Другой подход к отысканию интегрируемых уравнений связан с отысканием преобразований неизвестных функций к специальному виду, в котором преобразованная функция удовлетворяет другому уравнению, которое уже допускает полную интегрируемость. Такой подход был назван методом функциональных подстановок (МФП), по названию одного из первых примеров его реализации для конкретной физической задачи об одномерном течении вязкой однородной жидкости, которое описывается уравнением Бюргерса [2]:

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx}. \quad (2)$$

Здесь $u(x, t)$ - скорость течения среды, а ν - коэффициент ее кинематической вязкости. В работах [25, 24] было показано, что это уравнение сводится с помощью подстановки:

$$u = \frac{\partial \ln \phi}{\partial x}, \quad (3)$$

к линейному уравнению теплопроводности:

$$\phi_t - \nu \phi_{xx} = 0,$$

относительно вспомогательной функции $\phi(x, t)$. Подстановка (3) называется подстановкой Коула-Хопфа и долгое время оставалась почти единственным примером удачного применения МФП к реальным задачам теоретической физики. Другой более ранний пример подобного рода, связанный с построением точных решений двумерного уравнения Лиувилля:

$$\Delta \theta = e^{-2\theta}, \quad \Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right),$$

играющий важную роль в теории двумерных поверхностей [39], был найден в работе [32] (см. также [34, 33]). В общей форме записи функция:

$$\theta = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{(\Phi_x)^2 + (\Phi_y)^2}{\Phi^2} \right),$$

удовлетворяет уравнению Лиувилля при условии, что функция $\Phi(x, y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta \Phi = 0.$$

Однако до недавнего времени [19] подстановки Коула-Хопфа и Лиувилля, сводящие соответствующие уравнения к линейным, не рассматривались как принадлежащие к одному подходу, основанному на МФП. В конце 80-х годов прошлого века в целом ряде работ [26, 27, 37, 36] было установлено определенное подобие между уравнениями, интегрируемыми с помощью МОЗ и уравнениями, интегрируемыми с помощью МФП. Последние получили название уравнений типа Бюргерса. Более систематический подход к построению уравнений типа Бюргерса, интегрируемых с помощью МФП в различных его формах, был предложен в работах [11, 16] и развит в дальнейшем в цикле работ [12, 13, 15, 41, 19].

2 О пользе дифференцирования

2.1 Поле переноса температуры

Долгое время существование подстановки Коула-Хопфа для уравнения Бюргерса связывалось исключительно со специальной структурой самого уравнения, что не позволяло особенно надеяться на то, что аналогичный подход можно использовать еще где-то. Однако в 2006 году появилась работа [21], в которой связь между уравнением Бюргерса и теплопроводности получила совершенно новое обоснование.

В работе [21] рассматривалась задача о перемещении в пространстве точек с заданной температурой, если сама температура описывается простым уравнением теплопроводности с постоянным коэффициентом теплопроводности ν . Скорость перемещения таких точек может вычислена, исходя из следующих рассуждений. Предположим, что распределение температуры в пространстве и времени задается с помощью функции $T(x, t)$. Тогда закон движения $x = x(t)$ точки с температурой T_0 можно вычислить с помощью решения алгебраического уравнения:

$$T(x(t), t) = T_0. \quad (4)$$

Дифференцируя это соотношение по времени, находим:

$$\frac{dT(x(t), t)}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{T=T_0} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{T=T_0} = 0.$$

Скорость перемещения точки $V = dx/dt$ образует поле, если значение T_0 пробегает все допустимые значения. Эти допустимые значения функции $T(x, t)$ часто называют **маркерами**, а само уравнение (5) называют **уравнением переноса маркеров**. При этом форма уравнения для скорости перемещения остается неизменной. В этом случае поле $V(x, t)$ можно рассчитать, исходя из уравнения:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + V(x, t) \frac{\partial T}{\partial x} = 0. \quad (5)$$

Предположим, что функция $T(x, t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности:

$$T_t - \nu T_{xx} = 0. \quad (6)$$

Возникает вопрос - существует ли универсальная форма уравнения для скорости $V(x, t)$, не зависящая от выбора функции $T(x, t)$, как решение уравнения теплопроводности. Решение этой задачи и было найдено в работе [21]. Суть подхода, предложенного Урюковым, состояла в следующем. Рассмотрим вместе с уравнениями (6) и (5) их дифференциальные следствия. Именно рассмотрим следующую общую систему соотношений:

$$\begin{aligned} T_t - \nu T_{xx} &= 0, & T_t + VT_x &= 0, \\ T_{xt} - \nu T_{xxx} &= 0, & T_{tt} - \nu T_{xxt} &= 0, \\ T_{xt} + V_x T_x + VT_{xx} &= 0, & T_{tt} + V_t T_x + VT_{xt} &= 0, \\ T_{xxt} + V_{xx} T_x + 2V_x T_{xx} + VT_{xxx} &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Эта система соотношений содержит семь линейных уравнений относительно семи производных функции $T(x, t)$. Эта система замкнута относительно производных: $T_x, T_t, T_{xx}, T_{xt}, T_{tt}, T_{xxx}, T_{xxt}$ и является однородной. Следовательно, если функция $T(x, t)$ является решением уравнения теплопроводности, то по построению она является совместной, а ее определитель равен нулю. Вычисляя определитель этой системы, получаем следующее соотношение:

$$V_t + 2VV_x - \nu V_{xx} = 0, \quad (8)$$

что в точности совпадает с уравнением Бюргерса (2), если положить $u = 2V$.

Этот результат можно было бы получить из более простых соображений, замечая, что уравнение (5) преобразуется в подстановку Коула-Хопфа:

$$V = -\frac{T_t}{T_x} = -\frac{\nu T_{xx}}{T_x} = -\nu \frac{\partial}{\partial x} \ln T_x,$$

если воспользоваться уравнением теплопроводности (6). Однако, если факт наличия подстановки Коула-Хопфа для уравнения Бюргерса выглядит как “случайная” особенность, то способ вывода уравнения Бюргерса, как условия совместности системы дифференциальных соотношений, связанных с уравнением теплопроводности, выглядит как результат более общей идеологии, которую можно распространить и на другие уравнения.

2.2 Поле скоростей переноса потенциалов электромагнитного поля в вакууме

Для демонстрации того, что идеология предложенная в работе [21] может быть распространена на более широкий класс уравнений, рассмотрим вывод общего уравнения для

скоростей переноса значений функции, удовлетворяющей уравнению Д'Аламбера, которое описывает динамику распространения электромагнитных волн в вакууме [11]. Задача о вычислении такого уравнения ставится совершенно аналогично тому, как это было сделано для уравнения теплопроводности. Пусть функция $T(x, t)$ теперь (потенциал электрического поля, например) удовлетворяет уравнению Д'Аламбера:

$$T_{tt} - c^2 T_{xx} = 0. \quad (9)$$

Уравнение переноса значений функции $T(x, t)$ имеет тот же вид, что и уравнение (5). Производя формальное дифференцирование уравнений (9) и (5) по x и t , легко убедиться, что система производных функции T вновь замыкается, но уже для совокупности из девяти производных: $T_x, T_t, T_{xx}, T_{xt}, T_{tt}, T_{xxx}, T_{xxt}, T_{xtt}, T_{ttt}$:

$$\begin{aligned} T_{tt} - c^2 T_{xx} &= 0, & T_t + VT_x &= 0, \\ T_{xtt} - c^2 T_{xxx} &= 0, & T_{ttt} - c^2 T_{xxt} &= 0, \\ T_{xt} + V_x T_x + VT_{xx} &= 0, & T_{tt} + V_t T_x + VT_{xt} &= 0, \\ T_{xxt} + V_{xx} T_x + 2V_x T_{xx} + VT_{xxx} &= 0, & T_{ttt} + V_{tt} T_x + 2V_t T_{xt} + VT_{xtt} &= 0, \\ T_{xtt} + V_{xt} T_x + V_x T_{xt} + V_t T_{xx} + VT_{xxt} &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Если функция $T(x, t)$ удовлетворяет уравнению Д'Аламбера, то последняя однородная система совместна по построению, а определитель ее равен нулю. Это приводит к следующему, на вид достаточно сложному уравнению для функции $V(x, t)$:

$$(V^2 - c^2) \left((V_{tt} - c^2 V_{xx}) (V^2 - c^2) - 2V \left[(V_t)^2 - c^2 (V_x)^2 \right] \right) = 0$$

Из этого уравнения следует, что есть три независимых ветви решений. Два решения $V = \pm c$ соответствуют двум бегущим в одну сторону решением Д'Аламбера: $T_+(x, t) = g(x - ct)$ и $T_-(x, t) = h(x + ct)$, а третье уравнение:

$$(V_{tt} - c^2 V_{xx}) (V^2 - c^2) - 2V \left[(V_t)^2 - c^2 (V_x)^2 \right] = 0, \quad (11)$$

соответствует их линейной суперпозиции. Это последнее уравнение можно привести в более компактный вид:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \ln \left| \frac{c - V}{c + V} \right| = 0. \quad (12)$$

Отсюда следует, что функция $F(V) = \ln |c - V| - \ln |c + V|$ вновь удовлетворяет уравнению Д'Аламбера. Уравнение (12) представляет собой вновь уравнение Д'Аламбера. Отсюда следует, что локальное преобразование:

$$T(x, t) \rightarrow T'(x, t) = \ln \left(\frac{c - V(x, t)}{c + V(x, t)} \right) = \ln \left(\frac{cT_x + T_t}{cT_x - T_t} \right). \quad (13)$$

преобразует любое решение уравнения Д'Аламбера вновь в решение уравнения Д'Аламбера. Смысл этого результата можно понять, если решение для $T(x, t)$ представить в виде:

$$T(x, t) = f(x - ct) + h(x + ct), \quad (14)$$

где $f(\xi)$ и $h(\eta)$ - произвольные дважды дифференцируемые функции относительно конусных переменных $\xi = x - ct$ и $\eta = x + ct$. Подставляя (14) в выражение для функции $T'(x, t)$, находим:

$$T'(x, t) = \ln f'(x - ct) - \ln h'(x + ct).$$

Поскольку в представлении (14) функции $f(\xi)$ и $h(\eta)$ произвольны, то из последнего соотношения следует, что отображение (13) преобразует $T(x, t)$ к тому же общему представлению (14) с заменой функции $f(x - ct)$ на функцию $\ln f'(x - ct)$ и $h(x + ct)$ на функцию $-\ln h'(x + ct)$ того же типа.

2.3 Обобщенные подстановки типа Коула-Хопфа

Примеры с уравнениями теплопроводности и Д'Аламбера показывают, что существует некоторая общая схема, которая позволяет строить нелинейные уравнения с заранее известным свойством интегрируемости, причем эта процедура построения интегрируемых уравнений является конструктивной, поскольку сразу предлагает и способ построения решений этих уравнений. Реализация этой общей схемы может иметь несколько вариантов. Часть из этих схем была описана в работах [11, 16, 12, 13]. Все эти схемы опираются на различные совокупности исходных базовых соотношений, из которых с помощью дополнительного интегрируемого уравнения получается новое нелинейное интегрируемое уравнение. Рассмотрим некоторые из этих схем, а затем опишем самую общую схему, из которой можно получить все остальные.

Идея обобщения подстановок типа Коула-Хопфа заключается в следующем. При рассмотрении вопроса о том, как перемещаются в пространстве маркеры, выделенные значением некоторой функции $T(x, t)$, удовлетворяющей уравнению теплопроводности, это уравнение можно обобщить, вводя в него одну произвольную вспомогательную функцию. Именно, рассмотрим вопрос о скорости перемещения маркера $T(x, t)$, удовлетворяющего уравнению распространения тепла в среде с адвекцией со скоростью $W(x, t)$ [12]:

$$T_t - \nu T_{xx} + W(x, t)T_x = 0. \quad (15)$$

Нетрудно понять, что система базовых дифференциальных соотношений, которые теперь можно извлечь из уравнения (15) и уравнения переноса маркера (5) будет по сути не сильно отличаться от системы (7). Поскольку дополнительное слагаемое в уравнении (15)

имеет меньший порядок производной функции T , чем его главная часть, то и число самих уравнений в (7) и число производных, относительно которых эта система будет замкнута, останется неизменным. Существенно изменится лишь определитель этой системы, который будет теперь содержать не только производные функции $V(x, t)$, но и функции $W(x, t)$. Действительно, вычисляя определитель системы:

$$\begin{aligned} T_t - \nu T_{xx} + WT_x &= 0, & T_t + VT_x &= 0, \\ T_{xt} - \nu T_{xxx} + W_x T_x + WT_{xx} &= 0, & T_{tt} - \nu T_{xxt} + W_t T_x + WT_{xt} &= 0, \\ T_{xt} + V_x T_x + VT_{xx} &= 0, & T_{tt} + V_t T_x + VT_{xt} &= 0, \\ T_{xxt} + V_{xx} T_x + 2V_x T_{xx} + VT_{xxx} &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Приходим к следующему уравнению:

$$U_t + UV_x + VU_x - \nu V_{xx} = 0, \quad (17)$$

где $U = (V - W)/\nu$. Это уравнение содержит две неизвестные функции $V(x, t)$ и $U(x, t)$. Поэтому это уравнение представляет собой связь между этими функциями, в предположении, что эти функции связаны с $T(x, t)$ базовыми уравнениями (7) и (5), которые можно переписать в следующем виде:

$$V = -\frac{T_t}{T_x}, \quad U = -\frac{T_{xx}}{T_x}. \quad (18)$$

Из этих двух соотношений следует, что все производные функции T любого порядка могут выражены исключительно через одну из них, например, T_x , причем соответствующие коэффициенты пропорциональности будут некоторыми дифференциальными полиномами от V и U . В частности:

$$\begin{aligned} T_{xt} &= -Q(x, t)T_x, & Q &= V_x - UV, \\ T_{tt} &= -R(x, t)T_x, & R &= V_t - VV_x + V^2U, \\ T_{xxx} &= -(U_x - U^2)T_x, \dots \end{aligned} \quad (19)$$

Используя эти обозначения, соотношение (17) можно записать более компактно:

$$U_t = Q_x. \quad (20)$$

Смысл рассмотрения расширенного варианта уравнения теплопроводности с адвекцией состоит в том, что универсальное соотношение (20) связывает две функции, каждая из которых вычисляется через произвольную функцию $T(x, t)$. Это означает, что выбирая

функции $T(x, t)$, как решение определенного интегрируемого дифференциального уравнения мы получаем некоторую дополнительную связь между функциями U и Q , которая с учетом (20) будет приводить к некоторым нелинейным дифференциальным соотношениям для этих функций, которые можно рассматривать как интегрируемые по построению нелинейные уравнения.

3 Простейшая схема МФП

Обратим внимание на то, что вместо того, чтобы в качестве исходных базовых уравнений для функции $T(x, t)$ рассматривать пару уравнений (5) И (15) или (18), можно рассмотреть пару простейших дифференциальных соотношений вида:

$$T_x = A(x, t)T, \quad T_t = B(x, t)T, \quad (21)$$

которые дают самую простую схему МФП. В дальнейшем функцию $T(x, t)$ будем называть основной, а функции $A(x, t)$ и $B(x, t)$ - базовыми функциями.

При любой заданной основной функции $T(x, t)$ из базовых соотношений (21) можно вычислить функции $A(x, t)$ и $B(x, t)$, пользуясь формулами:

$$A = T_x/T, \quad B = T_t/T, \quad (22)$$

что соответствует подстановкам типа Коула-Хопфа в схемах, которые были рассмотрены ранее. Функции $A(x, t)$ и $B(x, t)$, которые удовлетворяют (22), в силу дифференцируемости основной функции $T(x, t)$, связаны между собой уравнением:

$$A_t = B_x, \quad (23)$$

аналогичным (20). Собственно, соотношение (20) переходит в (23), если в (19) производную функции $T_x(x, t)$ заменить на саму функцию, что не меняет сути этих соотношений до тех пор, пока на $T(x, t)$ не накладывается никаких ограничений.

Предполагая гладкость или даже аналитичность функции T , используя (21) можно получить линейную связь всех производных функции $T(x, t)$ с самой этой функцией. Доказательство этого факта строится по индукции. Введем обозначения:

$$\frac{\partial^{k+m}T(x, t)}{\partial x^k \partial t^m} \equiv T^{[k, m]}(x, t). \quad (24)$$

Предположим, что для смешанных производных порядка k по x и m по t связь найдена:

$$\frac{\partial^{k+m}T}{\partial x^k \partial t^m} \equiv T^{[k, m]} = A^{(k, m)}(A, B)T. \quad (25)$$

Здесь $A^{(k,m)}(A, B)$ - некоторый дифференциальный полином от A и B . Тогда, дифференцируя это соотношение по отдельности по x и t , находим:

$$\begin{aligned} T^{[k+1,m]} &= \frac{\partial}{\partial x} A^{(k,m)} T + A^{(k,m)} T_x = \left(\frac{\partial}{\partial x} A^{(k,m)} + A^{(k,m)} A \right) T, \\ T^{[k,m+1]} &= \frac{\partial}{\partial t} A^{(k,m)} T + A^{(k,m)} T_t = \left(\frac{\partial}{\partial t} A^{(k,m)} + A^{(k,m)} B \right) T. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что если $A^{(k,m)}(A, B)$ - дифференциальный полином от A и B , то и $A^{(k+1,m)}(A, B)$ и $A^{(k,m+1)}(A, B)$ также будут дифференциальными полиномами от A и B . В результате получаем рекуррентные соотношения для вычисления функций $A^{(k,m)}(A, B)$:

$$\begin{aligned} A^{(k+1,m)} &= \frac{\partial}{\partial x} A^{(k,m)} + A^{(k,m)} A, \quad k, m = 1, \dots \\ A^{(k,m+1)} &= \frac{\partial}{\partial t} A^{(k,m)} + A^{(k,m)} B, \quad k, m = 1, \dots \\ A^{[1,0]} &= A, \quad A^{[0,1]} = B. \end{aligned} \tag{26}$$

В частности:

$$A^{[1,1]} = A_t + AB = B_x + BA, \quad A^{[2,0]} = A_x + A^2, \quad A^{[0,2]} = B_t + B^2, \dots$$

Как уже отмечалось, соотношения (21) и, следовательно (23), выполняются для любой дифференцируемой основной функции $T(x, t)$. Поэтому можно ожидать, что между функциями $A(x, t)$ и $B(x, t)$ появится дополнительная связь, если функции $T(x, t)$ выбирать из некоторого множества решений определенного вида дифференциальных уравнений. Предположим, что функция $T(x, t)$ удовлетворяет линейному уравнению составного порядка (N, M) :

$$\sum_{k=0}^N \sum_{m=0}^M C_{(k,m)}(x, t) T^{[k,m]} = 0. \tag{27}$$

Здесь использовались обозначения (24). Тогда, заменяя производные $T^{[k,m]}$ в соответствии с соотношениями (25), уравнение (27) приводится к форме, в которой функция $T(x, t)$ отсутствует:

$$\sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^M C_{(k,m)}(x, t) A^{(k,m)}(A, B) + C_{(10)}(x, t) A + C_{(01)}(x, t) B + C_{00}(x, t) = 0. \tag{28}$$

Это соотношение, совместно с условием (23), можно рассматривать как нелинейное уравнение относительно пары функций A и B . В результате пара нелинейных уравнений (28) и

(23), относительно функций $A(x, t)$ и $B(x, t)$, имеет в качестве решения функции, вычисляемые из любого решения уравнения (27) с помощью подстановок (21). Содержательность этого подхода состоит в том, что таким образом можно получить решения ряда нелинейных прикладных задач.

Сравнивая первоначальный подход, основанный на дифференциальных следствиях из уравнения переноса маркера (5) и некотором другом уравнении, например, уравнении теплопроводности или Д'Аламбера, со схемой, основанной на (21), можно заключить, что в последней воспроизводятся все элементы первоначального подхода. Действительно, вспомогательное уравнение, из которого возникает дополнительная связь между A и B , фактически, является обобщением уравнений теплопроводности и Д'Аламбера, но без необходимости проверки замыкания системы производных основной функции T . Уравнение же переноса маркера, т.е. фиксированных значений $T_0 = T(x(t), t)$, воспроизводится из базовых соотношений (21) с помощью исключения из этой пары уравнений самой функции $T(x, t)$. В результате такой процедуры находим:

$$T_t - \frac{B}{A}T_x = 0,$$

откуда получаем явный вид скорости $V(x, t)$ переноса маркера:

$$V(x, t) = -\frac{B(x, t)}{A(x, t)}. \quad (29)$$

Таким образом, базовая схема, основанная на (21), позволяет решать и задачу переноса маркеров исследуемого процесса.

4 Примеры нелинейных интегрируемых моделей

В качестве примеров полезности приведенной схемы рассмотрим несколько моделей, которые интегрируются с помощью подстановок рассмотренного выше типа. Поскольку важным является именно интегрируемость рассматриваемых моделей, то полезно их строить, отталкиваясь от того или иного типа интегрируемого уравнения.

4.1 Нелинейное телеграфное уравнение

Рассмотрим в качестве интегрируемого уравнения телеграфное уравнение в конусных переменных:

$$T_{xt} + aT_x + bT_t + cT = 0. \quad (30)$$

Здесь предполагается, что $a = a(x, t)$, $b = b(x, t)$ и $c(x, t)$ - некоторые заданные функции. Очевидно, что максимальную пользу можно извлечь для тех случаев, когда уравнение (30) интегрируется в элементарных функциях. Это ограничивает выбор функций a, b, c такими случаями, когда уравнение (30) интегрируется простым образом, например, в элементарных функциях.

Процедура вывода нелинейного уравнения, связанного с ним на основе развитой схемы, состоит в замене производных функции T в этом уравнении на соответствующие функции $A^{(k,m)}$ из совокупности рекуррентных соотношений (26). В результате получается следующая система уравнений для пары функций A и B :

$$A_t + AB + aA + bB + c = 0, \quad A_t = B_x. \quad (31)$$

Исключая из этой системы функцию B , приходим к уравнению относительно функции A :

$$A_t = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A_t + aA + c}{A + b} \right) \quad (32)$$

Сделаем замену переменных, полагая $u = A(x, t) + b(x, t)$. В этом случае уравнение приводится к следующему виду:

$$\frac{\partial^2 \ln u}{\partial x \partial t} + u_t + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{c - b_t - ab}{u} \right) + a_x - b_t = 0. \quad (33)$$

Другая запись данного уравнения получается после формальной замены $u = e^\phi$. В результате для ϕ уравнение примет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial}{\partial t} e^\phi + \frac{\partial}{\partial x} ((c - b_t - ab)e^{-\phi}) + a_x - b_t = 0.$$

Уравнение этого типа встречается в теории струн и, как показано выше, полностью интегрируется, если интегрируется исходное уравнение для T . В частности, в случае $a = \text{const}$, $b = \text{const}$, $c = \text{const}$ уравнение (30) интегрируется в виде рядов и интегралов Фурье-Лапласа:

$$T = \int_C g(k) e^{ikx + \omega(k)t} dk, \quad \omega(k) = -\frac{c + ika}{b + ik}, \quad (34)$$

где $g(k)$ - произвольная комплексная функция параметра k , допускающая существование интеграла в правой части для заданного контура C на комплексной плоскости. Соответственно, при этих же условиях, уравнение:

$$\frac{\partial^2 \ln u}{\partial x \partial t} + u_t + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{c - ab}{u} \right) = 0$$

также полностью интегрируется и имеет решение:

$$u = b + \frac{T_x}{T} = b + \frac{\partial}{\partial x} \ln \left(\int_C g(k) e^{ikx + \omega(k)t} dk \right).$$

Заметим также, что для уравнений (30) теперь можно указать формулу для скорости $V(x, t)$ переноса маркеров поля $T(x, t)$. В соответствии с общей формулой (29) имеем:

$$V(x, t) = -\frac{B}{A} = \frac{A_t + aA + c}{A(A + b)}.$$

Отсюда, в частности, видно, что скорость переноса маркеров может обращаться в бесконечность в точках (x_0, t_0) , в которых, либо $A(x_0, t_0) = 0$, либо $A(x_0, t_0) = b(x_0, t_0)$, что эквивалентно $u(x_0, t_0) = 0$. Исходя из самого уравнения переноса маркеров (5), можно констатировать, что скорость V обращается в бесконечность только в точках экстремума гладкой основной функции $T(x, t)$. Экстремумам функции $T(x, t)$ в силу базовых соотношений (21) соответствуют точки (x_0, t_0) , в которых $A(x_0, t_0) = 0$. Отсюда следует, что условие $A(x_0, t_0) = b(x_0, t_0)$ при $b(x_0, t_0) \neq 0$ не может выполняться, либо одновременно при этом выполняется условие:

$$\left(A_t + aA + c \right) \Big|_{x=x_0, t=t_0} = 0.$$

Таким образом, из анализа скорости переноса маркеров можно получать дополнительную информацию о характере процессов, описание которых соответствует как исходному уравнению (30), так и уравнению (33).

4.2 Уравнение Лиувилля

Особый пример работоспособности общей схемы представляет известное из геометрии поверхностей, гидродинамики и некоторых других разделов прикладных задач уравнение Лиувилля:

$$\Delta \Theta = e^{2\theta}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (35)$$

Данный подход дает полный набор решений этого уравнения. Общий класс решений этого уравнения был построен Лиувиллем [32]. Решение в виде квадратичных форм было построено в [8, 7]. Поэтому строящиеся далее решения этого уравнения не обладают достаточной новизной, но дают новое полезное представление о возможных нестандартных

вариантах использования самого метода функциональных подстановок в некоторых ситуациях.

В качестве вспомогательного интегрируемого уравнения рассмотрим уравнение Лапласа:

$$\Delta T = 0. \quad (36)$$

Заменяя производные функции T на функции A и B из системы дифференциальных соотношений:

$$T_x = AT, \quad T_y = BT,$$

приходим к следующей системе связей функций A и B :

$$A_x + A^2 + B_y + B^2 = 0, \quad A_y = B_x. \quad (37)$$

Чтобы получить из этой системы полезные следствия, произведем формальную замену функций A и B по следующему правилу:

$$A(x, y) = R(x, y) \cos \Phi(x, y), \quad B = R(x, t) \sin \Phi(x, t).$$

Подставляя эти соотношения в уравнения (37), после несложных преобразований приходим к следующей системе уравнений для R и Φ :

$$\begin{aligned} (R_x + R\Phi_y) \cos \Phi + (R_y - R\Phi_x) \sin \Phi + R^2 &= 0, \\ (R_x - R\Phi_y) \sin \Phi - (R_y - R\Phi_x) \cos \Phi &= 0. \end{aligned}$$

Эта система уравнений эквивалентна следующей системе уравнений:

$$R_x + R\Phi_y = -R^2 \cos \Phi, \quad R_y - R\Phi_x = -R^2 \sin \Phi.$$

или

$$R^{-1}R_x + \Phi_y = -A, \quad R^{-1}R_y - \Phi_x = -B. \quad (38)$$

Дифференцируя первое уравнение по x , а второе по y , а затем результат складывая, приходим к уравнению Лиувилля:

$$\Delta \ln R = R^2, \quad (39)$$

которое эквивалентно (35) и переходит в него при замене переменных $R = e^\Theta$.

Дифференцируя первое уравнение системы (38) по y , а второе - по x , и, затем, вычитая результаты, приходим к уравнению Лапласа:

$$\Delta \Phi = 0. \quad (40)$$

В результате находим, что решение уравнения Лиувилля для R можно представить в виде:

$$R = \sqrt{\left(\frac{T_x}{T}\right)^2 + \left(\frac{T_y}{T}\right)^2}, \quad (41)$$

где $T(x, y)$ - любое решение уравнения Лапласа (36). Решение уравнения (35) будет иметь вид:

$$\Theta = \ln R = \frac{1}{2} \ln \left(\left(\frac{T_x}{T}\right)^2 + \left(\frac{T_y}{T}\right)^2 \right).$$

Аналогично, новым решением уравнения Лапласа (40) являются функции:

$$\Phi = \arctan \left(\frac{T_y}{T_x} \right). \quad (42)$$

Таким образом, последнее соотношение является отображением пространства решений уравнения Лапласа в себя, это отображение представляет собой аналог отображения (13).

Еще одним полезным соотношением, которое можно извлечь из предыдущих выкладок по построению решения уравнения Лиувилля, является свойство вспомогательной функции Ψ :

$$\Psi = \Theta + \ln T = \frac{1}{2} \ln \left((T_x)^2 + (T_y)^2 \right). \quad (43)$$

Используя тождество:

$$\Delta \ln T = \frac{\Delta T}{T} - \left(\frac{T_x}{T}\right)^2 - \left(\frac{T_y}{T}\right)^2 = -e^{2\Theta},$$

находим:

$$\Delta \Theta - e^{2\Theta} = \Delta \Psi - \Delta \ln T - e^{2\Theta} = \Delta \Psi + \left(\frac{\partial \ln T}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln T}{\partial y}\right)^2 - e^{2\Theta} = \Delta \Psi = 0.$$

Свойство функции Ψ состоит в том, что эта функция также удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta \Psi = 0. \quad (44)$$

4.3 Уравнения, подобные КдВ

Рассмотрим и уравнения, подобные уравнению КдВ (1). Как известно, это уравнение интегрируется с помощью МОЗ. Покажем, что среди интегрируемых уравнений типа Бюргера

есть уравнения, подобные этому. Для этого рассмотрим вспомогательное уравнение для функции $T(x, t)$ следующего вида:

$$T_t + T_{xxx} + a(x, t)T_{xx} + b(x, t)T_x + c(x, t)T = 0. \quad (45)$$

Заменяя в этом уравнении производные функции $T(x, t)$ на дифференциальные полиномы от $A(x, t)$ и $B(x, t)$ приходим к следующему уравнению:

$$B = -A_{xx} - 3AA_x + A^3 - a(A_x + A^2) - bA - c. \quad (46)$$

Подставляя его в уравнение связи A и B , приходим к следующему уравнению:

$$A_t + A_{xxx} + \frac{3}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} A^2 + \frac{\partial}{\partial x} (aA_x + A^3 + aA^2 + bA) + c_x = 0. \quad (47)$$

По типу дисперсии линейной части уравнения и степени нелинейности это уравнение подобно модифицированному уравнению КдВ. Интересно отметить, что коэффициент $c(x, t)$ при самой функции T в уравнении (45) описывает внешний источник в уравнении для A . Это уравнение полностью интегрируется так, что каждое решение уравнения (45) дает решение уравнения для A с помощью подстановки типа Коула-Хопфа:

$$A = T_x/T.$$

Этот пример легко обобщить на эволюционные уравнения вида:

$$T_t = \sum_{k=0}^N C_k(x, t) T^{[k,0]}. \quad (48)$$

Соответствующие им уравнения получаются заменой производных функции T на A и B и после использования уравнения связи этих функций приводятся к виду:

$$A_t = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{k=0}^N C_k(x, t) A^{[k,0]}(A) \right), \quad (49)$$

содержащем справа только дифференциальные полиномы $A^{(k,0)}$ от $A(x, t)$, вычисляемые с помощью рекуррентных соотношений (26).

Примерами уравнений типа Бюргера, подобных уравнениям типа КдВ более высокого порядка, являются уравнения, соответствующие следующим вспомогательным уравнениям с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} T_t &= \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} + C_0 T, \\ T_t &= \frac{\partial^5 T}{\partial x^5} + C_0 T, \\ &\dots \end{aligned} \quad (50)$$

Эти уравнения имеют такой вид:

$$\begin{aligned} A_t &= \left(\frac{\partial}{\partial x} + A \right) \left(A_{xx} + 3AA_x + A^3 \right), \\ A_t &= \left(\frac{\partial}{\partial x} + A \right) \left(A_{xxx} + 4A_{xx}A + 3(A_x)^2 + 6A^2A_x + A^4 \right), \\ &\dots \end{aligned} \tag{51}$$

4.4 Одномерное течение идеального сжимаемого газа

Примеры использования МФП, в соответствии со схемами (19) и (21), не ограничиваются линейными вспомогательными уравнениями для основной функции $T(x, t)$. В развитых схемах в качестве вспомогательного уравнения можно использовать любое интегрируемое уравнение для $T(x, t)$, из которого в результате подстановок базовых соотношений и дифференциальных следствий из них можно исключить все производные основной функции. В качестве примера рассмотрим уравнение следующего вида:

$$T_{xx}T_{tt} - T_{xt}T_{xt} = 0. \tag{52}$$

Это уравнение имеет интеграл, который можно записать в виде:

$$T_t = H(T_x), \tag{53}$$

где $H(\theta)$ - произвольная дифференцируемая функция своего аргумента $\theta = T_x$. Нетрудно видеть, что это уравнение эквивалентно уравнению Хопфа. Именно, дифференцируя последнее уравнение по x и делая замену переменных $\theta = T_x$, получаем для функции $\theta(x, t)$ уравнение:

$$\theta_t = H'(\theta)\theta_x. \tag{54}$$

Это уравнение имеет в свою очередь следующий интеграл:

$$\theta = F\left(x + H'(\theta)t\right). \tag{55}$$

Здесь $F(\xi)$ - произвольная дифференцируемая функция своего аргумента. Этот интеграл является алгебраическим уравнением, из которого при заданной функции $H(\theta)$ вычисляется решение для функции $T(x, t)$.

Рассмотрим теперь вопрос о том - к какому уравнению преобразуется (52) в результате подстановки типа (18) [12, 13, 16]. Подставляя в (52) соотношения из (19), приходим к следующему уравнению:

$$U(V_t - VV_x + V^2U) - (V_x - UV)^2 = 0. \tag{56}$$

Раскрывая скобки и включая в систему уравнение связи (20), получаем:

$$U(V_t + VV_x) = (V_x)^2, \quad (57)$$

$$U_t \frac{\partial}{\partial x}(UV) - V_{xx} = 0. \quad (58)$$

Сделаем теперь формальную замену переменных, вводя функции:

$$\rho(x, t) = U(x, t), \quad u(x, t) = V - V_x/U = -Q/U. \quad (59)$$

В результате такой замены эта система уравнений принимает узнаваемый вид уравнения Эйлера одномерного инерциального течения идеального сжимаемого газа с плотностью $\rho(x, t)$ и скоростью потока $u(x, t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) &= 0. \end{aligned} \quad (60)$$

Сами значения скорости и плотности инерциального течения вычисляются из базовых соотношений (18) и (19):

$$\rho = -\frac{T_{xx}}{T_x}, \quad u = -\frac{T_{xt}}{T_{xx}} \quad (61)$$

Учитывая, что решение (55) исходного уравнения (52) записывается для функции $\theta = T_x$, то удобно и решения для ρ и u записать через θ . В результате получаем:

$$\rho = -\frac{\theta_x}{\theta}, \quad u = -\frac{\theta_t}{\theta_x}. \quad (62)$$

Последнее соотношение можно записать в виде:

$$\theta_t + u\theta_x = 0. \quad (63)$$

Последнее уравнение есть не что иное как уравнение переноса гидродинамического маркера θ в среде со скоростью $u(x, t)$. Поскольку решение (55) содержит две произвольные функции, то оно позволяет построить общее решение задачи об инерциальном течении с заданными начальными распределениями и массы и скорости. Начальное распределение маркеров определяется функцией $F(\xi)$:

$$\theta_0(x, 0) = F(x),$$

Поэтому начальное распределение плотности задается формулой:

$$\rho(x, 0) = -\frac{F'(x)}{F(x)},$$

или

$$F(x) = \exp\left(-\rho(x, 0)\right).$$

Начальное распределение скорости задается функцией $H(\theta)$:

$$u_0(x) = u(x, 0) = -H'(F(x)).$$

Рассматривая этот вариант применения схемы подстановок, можно прийти к некоторому более приемлемому для гидродинамики способу построения моделей. Можно заметить, что исходным элементом данной схемы является уравнение переноса маркеров, которое является естественным для гидродинамики. В рассмотренной схеме уравнение переноса маркеров дополняется еще одним уравнением, которое и определяет тип моделей. Это наблюдение можно превратить в более общую схему построения гидродинамических моделей. Этот подход будет рассмотрен далее в отдельной главе.

5 Дополнительные соотношения

Еще одним важным аспектом применения МФП является возможность использовать его для построения отдельных частных решений неинтегрируемых полностью уравнений, дополняя базовую схему не одним вспомогательным уравнением для T , а совместной системой уравнений для этой функции. Для примера рассмотрим схему (21) совместно с двумя вспомогательными уравнениями:

$$T_t + T_{xxx} + a(x, t)T_{xx} + b(x, t)T_x + c(x, t)T, \quad T_{xx} + kT_x + u(x, t)T = 0, \quad (64)$$

первое из которых совпадает с (45). Эти два уравнения для $T(x, t)$ совместны, в частности, если коэффициенты этого уравнения имеют вид:

$$k = \text{const}, \quad a = \text{const}, \quad b = \frac{3}{2}u, \quad c = \frac{3}{4}u_x + \left(a - \frac{3}{4}k\right)u,$$

а функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению КдВ, записанному в таком виде:

$$u_t + \frac{1}{4}u_{xxx} + \frac{3}{2}uu_x + \mu u_x = 0, \quad (65)$$

где $\mu = -k\left(a - \frac{3}{4}k\right)$. Наиболее простым вариантом решения последнего уравнения является всюду постоянная функция: $u = u_0 = \text{const}$. Для этого случая совместные решения системы (64) имеют такой вид:

$$T = Ae^{\lambda+x+\mu+t} + Be^{\lambda-x+\mu-t}, \quad (66)$$

где A и B - произвольные постоянные и введены обозначения:

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}\left(-k \pm \sqrt{k^2 - 4u_0}\right), \quad \mu_{\pm} = -\lambda_{\pm}^3 - a\lambda_{\pm}^2 - 3u_0\lambda_{\pm}/2 - (a - 3k/2)u_0.$$

Используя теперь подстановки (21), находим, что функция $A(x, t)$ будет одновременно удовлетворять двум уравнениям:

$$A_t + A_{xxx} + \frac{3}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}A^2 + \frac{\partial}{\partial x}(aA_x + A^3 + aA^2 + bA) + c_x = 0, \quad (67)$$

$$A_x + A^2 + kA + u = 0, \quad (68)$$

первое из которых совпадает с (47). Таким образом, каждому частному решению $T(x, t)$ системы (64) будет соответствовать решение каждого из уравнений системы (67). В частности, отсюда следует, что соответствующие частные решения

$$A = T_x/T = \frac{A\lambda_+e^{\lambda+x+\mu+t} + B\lambda_-e^{\lambda-x+\mu-t}}{Ae^{\lambda+x+\mu+t} + Be^{\lambda-x+\mu-t}} \quad (69)$$

будут также решением множества нелинейных уравнений, которые могут быть получены из первого уравнения системы (67), его редукцией с помощью второго уравнения системы. В частности, при $u = u_0 = \text{const}$ среди уравнений имеющих решения (69) есть и модифицированное уравнение КдВ и само уравнение КдВ. Действительно, используя второе уравнение (67), первое уравнение приводится к следующему виду:

$$A_t + \alpha A_{xxx} - \beta A^2 A_x - \gamma A A_x - \delta A_x = 0, \quad (70)$$

где:

$$\beta = 6(\alpha + 1), \quad \gamma = 6k\alpha, \quad \delta = (2u_0 + k^2)(\alpha - 1) + ka + \frac{3}{2}u_0.$$

Уравнение (70) представляет собой модифицированное уравнение КдВ (мКдВ), которое переходит в обычное уравнение КдВ в случае $\beta = 0$, что соответствует выбору: $\alpha = -1$. Однако, используя второе соотношение (67), можно получить множество других типов

уравнений, для которых решениями будут те же функции $A = T_x/T$. Примером могут служить следующие уравнения:

$$\begin{aligned} A_t + \alpha A_{xxx} - \beta A^2 A_x - \gamma A A_x + \delta A^2 + k\delta A + \delta u_0 &= 0, \\ A_t + \alpha A_{xxx} - \beta A^2 A_x + \gamma A^3 + (\delta + \gamma k) A^2 + (k\delta + \gamma u_0) A + \delta u_0 &= 0, \\ A_t + \alpha A_{xxx} + \beta A^4 + (\gamma + k\beta) A^3 + (\delta + \gamma k + \beta u_0) A^2 + (k\delta + \gamma u_0) A + \delta u_0 &= 0. \end{aligned}$$

Среди всей совокупности таких уравнений есть и уравнения второго и первого порядков по x , а также и нулевого. Очевидно, что решения $A = T_x/T$ всей совокупности этих уравнений являются лишь некоторыми частными решениями. Важным в этом подходе является то, что таким образом можно строить серии частных решений многих типов уравнений одновременно, для которых другим способом найти точные решения может оказаться затруднительным. Множество таких решений определяется множеством совместных решений совокупности вспомогательных уравнений для T .

6 Общая формулировка матричной версии МФП

Дальнейшее развитие метода функциональных подстановок опирается на возможность перенести основные идеи на случай матричных дифференциальных соотношений и даже на более общие типы дифференцирования, о которых речь пойдет в последующих лекциях. Матричное расширение метода строится на основе матричных базовых соотношений вида:

$$\hat{T}_x = \hat{A}\hat{T}, \quad \hat{T}_t = \hat{B}\hat{T}, \quad (71)$$

где \hat{T} , \hat{A} и \hat{B} - квадратные матрицы размера $N \times N$, например:

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} T_{11}(x, t) & T_{12}(x, t) & \cdots & T_{1N}(x, t) \\ T_{21}(x, t) & T_{22}(x, t) & \cdots & T_{2N}(x, t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ T_{N1}(x, t) & T_{N2}(x, t) & \cdots & T_{NN}(x, t) \end{pmatrix}.$$

В силу предполагаемой непрерывности элементов матрицы $\hat{T}(x, t)$ от x и t , матрицы $\hat{A}(x, t)$ и $\hat{B}(x, t)$ связаны дифференциальным соотношением:

$$\hat{A}_t - \hat{B}_x + [\hat{A}, \hat{B}] = 0. \quad (72)$$

Здесь и далее $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ - коммутатор матриц $\hat{A}(x, t)$ и $\hat{B}(x, t)$. Как и в скалярном случае, для старших производных матрицы $\hat{T}(x, t)$ выполняются соотношения:

$$\hat{T}^{[k,m]} = \hat{A}^{(k,m)}\hat{T}, \quad k, m = 1, 2, \dots,$$

где матрицы $\hat{A}^{(k,m)}$ являются дифференциальными полиномами от матриц \hat{A} и \hat{B} . Как и в одномерном случае, для их вычисления можно использовать рекуррентные соотношения:

$$\hat{A}^{(k+1,m)} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{A}^{(k,m)} + \hat{A}^{(k,m)} \hat{A}, \quad \hat{A}^{(k,m+1)} = \frac{\partial}{\partial t} \hat{A}^{(k,m)} + \hat{A}^{(k,m)} \hat{B}, \quad k, m = 0, 2, \dots, \quad (73)$$

с начальными условиями:

$$\hat{A}^{(1,0)} = \hat{A}, \quad \hat{A}^{(0,1)} = \hat{B}, \quad \hat{A}^{(0,0)} = \hat{1}.$$

Именно наличие в уравнении связи (72) коммутатора, что отличает его от аналогичного соотношения (23) в скалярном случае, приводит к существенному расширению типов уравнений, которые интегрируются с помощью матричного МФП. Сама идеология МФП в матричном случае по сути не отличается от скалярного и состоит в рассмотрении дифференциальных следствий из базовых соотношений и из дополнительного уравнения для матричной функции \hat{T} , которая ограничивает ее функциональный вид. Это приводит к дополнительной связи между матрицами \hat{A} и \hat{B} . В частности, если уравнение для \hat{T} является интегрируемым, например, линейным с коэффициентами $C_{km}(x, t)$:

$$\sum_{k=0}^P \sum_{m=0}^Q C_{km}(x, t) T^{[km]} = 0, \quad (74)$$

то соответствующее дополнительное уравнение для матриц \hat{A} и \hat{B} будет иметь вид:

$$\sum_{k=0}^P \sum_{m=0}^Q C_{km}(x, t) A^{(km)} = 0. \quad (75)$$

Решение совместной системы (75) и (72) теперь может быть найдено из базовых соотношений (71), в которых используются все возможные решения уравнения (74). Полезность такого подхода определяется наличием примеров его применения в прикладных задачах.

7 Формализм с матрицами размерности 2×2

Для анализа моделей, связанных с трехмерными векторами, полезно рассмотреть общие соотношения с матрицами размерности 2×2 . Введем следующие обозначения для матриц Паули $\hat{\sigma}_\alpha$ и единичной матрицы:

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (76)$$

Матрицы $\hat{\sigma}_i$, $i = 0, 1, 2, 3$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_0 \hat{\sigma}_i &= \hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_0 = \hat{\sigma}_i, \quad [\hat{\sigma}_0, \hat{\sigma}_i] = 0, \quad i = 0, 1, 2, 3; \\ \hat{\sigma}_\alpha \hat{\sigma}_\beta &= -\hat{\sigma}_\beta \hat{\sigma}_\alpha = i \sum_{\gamma=1}^3 \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{\sigma}_\gamma; \end{aligned} \quad (77)$$

$$[\hat{\sigma}_\alpha, \hat{\sigma}_\beta] = 2i \sum_{\gamma=1}^3 \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{\sigma}_\gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3,$$

Здесь $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ - полностью антисимметричный символ Леви-Чевита: $\varepsilon_{123} = 1$, $\varepsilon_{\beta\alpha\gamma} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = -\varepsilon_{\alpha\gamma\beta}$.

Таким образом, любая матричная функция $\hat{T}(x, t)$, заданная на \mathcal{GL}_2 , имеет следующий общий вид:

$$\hat{T} = \sum_{i=0}^3 \tau_i(x, t) \sigma_i, \quad (78)$$

где $\tau_i(x, t)$ - вспомогательные функции, связанные с компонентами матрицы \hat{T} соотношениями:

$$T_{11} = \tau_0 + \tau_3, \quad T_{11} = \tau_0 - \tau_3, \quad T_{12} = \tau_1 - i\tau_2, \quad T_{21} = \tau_1 + i\tau_2.$$

Для удобства интерпретации полезно ввести трехмерный вектор матриц Паули:

$$\hat{\mathbf{s}} = (\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3) \quad (79)$$

и трехмерный вектор $\mathbf{t} = \{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$. Тогда любая матрица 2×2 может быть записана в виде:

$$\hat{T} = (\hat{\mathbf{s}}, \mathbf{t}) + \tau_0 \hat{\sigma}_0, \quad (80)$$

где:

$$(\hat{\mathbf{s}}, \mathbf{t}) = \tau_1 \hat{\sigma}_1 + \tau_2 \hat{\sigma}_2 + \tau_3 \hat{\sigma}_3$$

- евклидово скалярное произведение векторов. Обратные формулы для вычисления коэффициентов τ_i матриц \hat{T} размерности 2×2 имеют следующий общий вид:

$$\tau_i = \text{Sp}(\hat{\sigma}_i \hat{T})/2, \quad i = 0, 1, 2, 3, \quad (81)$$

где Sp - операция вычисления следа матрицы.

Пусть теперь имеются две матрицы \hat{A} и \hat{B} , которые могут быть представлены в виде:

$$\hat{A} = \sum_{i=0}^3 a_i(x, t) \hat{\sigma}_i, \quad \hat{B} = \sum_{i=0}^3 b_i(x, t) \hat{\sigma}_i, \quad (82)$$

Вводя вектора $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, эти матрицы можно записать так:

$$\hat{A} = (\hat{\mathbf{s}}, \mathbf{a}) + a_0 \hat{\sigma}_0, \quad \hat{B} = (\hat{\mathbf{s}}, \mathbf{b}) + b_0 \hat{\sigma}_0.$$

Исходя из свойств матриц Паули (77), имеем теперь следующие общие соотношения:

$$\begin{aligned} \hat{A}\hat{B} &= i([\mathbf{a} \times \mathbf{b}], \hat{\mathbf{s}}) + a_0(\mathbf{b}, \hat{\mathbf{s}}) + b_0(\mathbf{a}, \hat{\mathbf{s}}) + (\mathbf{a}, \mathbf{b})\hat{\sigma}_0, \\ [\hat{A}, \hat{B}] &= \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = 2i([\mathbf{a} \times \mathbf{b}], \hat{\mathbf{s}}). \end{aligned} \quad (83)$$

Здесь $[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]$ - векторное произведение векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} .

8 Вспомогательные уравнения первого порядка по координате

Рассмотрим вспомогательное уравнение для \hat{T} следующего вида:

$$\hat{T}_t = \hat{H}(x, t)\hat{T}_x + \hat{Q}(x, t)\hat{T}, \quad (84)$$

где $\hat{H}(x, t)$ и $\hat{Q}(x, t)$ - некоторые заданные матрицы координат и времени. Используя базовые соотношения (71), получаем из этого уравнения следствие в виде уравнения связи:

$$\hat{B} = \hat{H}\hat{A} + \hat{Q}. \quad (85)$$

Подставляя это соотношение в уравнение связи (72), находим:

$$A_t = \frac{\partial}{\partial x}(\hat{H}\hat{A} + \hat{Q}) - [\hat{A}, \hat{H}\hat{A} + \hat{Q}]. \quad (86)$$

Это уравнение полезно преобразовать к следующему виду:

$$A_t = \hat{H}\hat{A}_x - [\hat{A}, \hat{H}]\hat{A} - [\hat{A}, \hat{Q}] + \hat{H}_x\hat{A} - \hat{Q}_x.$$

Это уравнение является нелинейным уравнением первого порядка относительно матрицы \hat{A} с квадратичной нелинейностью и произвольными матрицами \hat{H} и \hat{Q} как функциями x и t . В частном случае:

$$\hat{H} = \hat{H}(t), \quad \hat{Q} = \hat{Q}(t)$$

уравнение (86) упрощается и принимает такой вид:

$$A_t = \hat{H}\hat{A}_x - [\hat{A}, \hat{H}]\hat{A} - [\hat{A}, \hat{Q}]. \quad (87)$$

Это уравнение имеет квадратичную нелинейность и может иметь несколько интерпретаций в зависимости от выбора его коэффициентов \hat{H} и \hat{Q} , а так же матричной размерности.

9 Уравнение типа уравнения Ландау-Лифшица

В качестве первого примера рассмотрим уравнение (87) в матричной размерности 2×2 для выбора его матричных коэффициентов в следующем виде:

$$\hat{H} = \sum_{\alpha=1}^3 H_{\alpha}(t) \hat{\sigma}_{\alpha} = (\mathbf{H}, \hat{\mathbf{s}}), \quad \hat{Q} = \sum_{\alpha=1}^3 Q_{\alpha}(t) \hat{\sigma}_{\alpha} = (\mathbf{Q}, \hat{\mathbf{s}}). \quad (88)$$

Здесь введены трехмерные векторы:

$$\mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3), \quad \mathbf{Q} = (Q_1, Q_2, Q_3).$$

Используя соотношения (83), можно записать:

$$\begin{aligned} \hat{H} \hat{A}_x &= \hat{\sigma}_0(\mathbf{H}, \mathbf{a}_x) + i(\hat{\mathbf{s}}, [\mathbf{H} \times \mathbf{a}_x]) + a_{0,x}(\mathbf{H}, \hat{\mathbf{s}}), \quad [\hat{H}, \hat{A}] = 2i(\hat{\mathbf{s}}, [\mathbf{H} \times \mathbf{a}]), \\ [\hat{A}, \hat{H}] \hat{A} &= -2i(\hat{\mathbf{s}}, [\mathbf{H} \times \mathbf{a}]) a_0 + 2(\hat{\mathbf{s}}, [[\mathbf{H} \times \mathbf{a}] \times \mathbf{a}]), \\ [\hat{A}, \hat{Q}] &= a_0(\mathbf{Q}, \hat{\mathbf{s}}) + 2i(\hat{\mathbf{s}}, [\mathbf{a} \times \mathbf{Q}]). \end{aligned} \quad (89)$$

В результате (87) приводим к следующей системе уравнений для компонент матрицы \hat{A} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} a_0 &= \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{H}, \mathbf{a}), \\ \mathbf{a}_t &= i[\mathbf{H} \times \mathbf{a}_x] - 2[[\mathbf{H} \times \mathbf{a}] \times \mathbf{a}] + 2i[\mathbf{H} \times \mathbf{a}] a_0 + \mathbf{H} a_{0,x} - a_0 \mathbf{Q} - 2i[\mathbf{a} \times \mathbf{Q}]. \end{aligned} \quad (91)$$

Эту систему уравнений можно преобразовать, вводя функцию ϕ :

$$a_0 = \frac{\partial}{\partial x} \phi.$$

В результате находим:

$$\begin{aligned} \phi_t &= (\mathbf{H}, \mathbf{a}), \\ \mathbf{a}_t &= i[\mathbf{H} \times \mathbf{a}_x] - 2[[\mathbf{H} \times \mathbf{a}] \times \mathbf{a}] + (2i[\mathbf{H} \times \mathbf{a}] - \mathbf{Q}) \phi_x + \mathbf{H} \phi_{xx} + 2i[\mathbf{Q} \times \mathbf{a}]. \end{aligned} \quad (92)$$

Эта система уравнений представляет собой уравнение типа Ландау-Лифшица [1, 2] для неоднородного магнетика, находящегося в однородном переменном магнитном поле с напряженностью \mathbf{H} и с некоторыми дополнительными полями \mathbf{Q} и ϕ . Хотя это уравнение и отличается от уравнения Ландау-Лифшица для нелинейного магнетика Гейзенберга, тем не менее оно может быть использовано для анализа других типов магнетиков.

10 Волны в среде с квадратичной нелинейностью

При дополнительных условиях система уравнений (92) может иметь и другую интерпретацию. Рассмотрим частный случай, соответствующий выбору:

$$\mathbf{H} = (0, 0, c), \quad \hat{Q} = 0, \quad (93)$$

где $c = \text{const}$ - вещественная постоянная. Тогда в покомпонентной форме система уравнений (92) примет такой вид:

$$\begin{aligned} \phi_t &= a_3 c, \\ a_{3,t} &= 2c(\mathbf{a})^2 - 2a_3 \phi_t + c\phi_{xx}, \\ a_{1,t} &= -ica_{2,x} - 2\phi_t a_1 - 2ica_2 \phi_x, \\ a_{2,t} &= ica_{2,x} - 2\phi_t a_2 + 2ica_1 \phi_x. \end{aligned} \quad (94)$$

Исключая из первых двух уравнений функцию $a_3 = \phi_t c^{-1}$, и вводя комплексную функцию $A = a_1 + ia_2$, приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \phi_{tt} + 2(\phi_t)^2 - c^2 \phi_{xx} &= c^2 |A|^2, \\ A_t + cA_x + 2A(\phi_t + c\phi_x) &= 0. \end{aligned} \quad (95)$$

Эта система уравнений может рассматриваться в качестве модели описывающей волны в среде с квадратичной нелинейностью без дисперсии. Из этой системы формально можно исключить функцию A . Второе уравнение имеет явное общее решение следующего вида:

$$\ln A + 2\phi = \psi(x - ct),$$

где $\psi(x - ct)$ - произвольная комплекснозначная функция одного вещественного аргумента. В результате, первое уравнение системы (95) примет такой вид:

$$\phi_{tt} + 2(\phi_t)^2 - c^2 \phi_{xx} = c^2 e^{-2\Re\{\phi\}} e^{2\Re\{\psi(x-ct)\}}. \quad (96)$$

Это уравнение в случае вещественных решений ϕ подобно неавтономному уравнению Ливилля [38], но содержит в отличие от него квадратичное слагаемое по первой производной ϕ_t . В случае вещественности ϕ это уравнение можно преобразовать с помощью замены $\phi = -(1/2) \ln \theta$ к несколько иному виду:

$$\theta_{tt} - c^2 \theta_{xx} + c^2 (\theta_x)^2 = c^2 \theta e^{2\Re\{\psi(x-ct)\}}. \quad (97)$$

Уравнения (96) и (97) имеют вид, аналогичный уравнениям, частные решения которых рассматривались в справочниках [4, 3] в разделах, соответствующих нелинейным гиперболическим уравнениям. Полученные решения этих уравнений констатируют их полную интегрируемость.

11 Построение решений для вспомогательных уравнений первого порядка

Решения системы (92), также как и системы (95), строятся на основе решений уравнения (84). Для простоты рассмотрим случай, соответствующий редукции (93). В этом случае система уравнений для компонент функции \hat{T} примет такой вид:

$$\begin{aligned}\tau_{0,t} &= c\tau_{3,x}, & \tau_{3,t} &= c\tau_{0,x}, \\ \tau_{1,t} &= i c\tau_{2,x}, & \tau_{2,t} &= -i c\tau_{1,x}.\end{aligned}$$

Эти уравнения эквивалентны следующим уравнениям:

$$\begin{aligned}\chi_{tt} &= c^2\chi_{xx}, & \tau_3 &= \chi_t, & \tau_0 &= c\chi_x, \\ \theta_t - c\theta_x &= 0,\end{aligned}$$

где $\theta = \tau_1 + i\tau_2$. Из (71) и (81) находим выражение для a_i , $i = 0, 1, 2, 3$. Имеем

$$a_i = \text{Sp}\left(\hat{\sigma}_i \hat{T}_x \hat{T}^{-1}\right). \quad (98)$$

Матрицу \hat{T}^{-1} можно представить таким образом:

$$\hat{T}^{-1} = \frac{1}{\tau_0^2 - \mathbf{t}^2} \left(\tau_0 \hat{\sigma}_0 - \sum_{\alpha=1}^3 \tau_\alpha \hat{\sigma}_\alpha \right). \quad (99)$$

Соответственно, имеем:

$$\begin{aligned}\hat{T}_x \hat{T}^{-1} &= \frac{1}{D} \left(\tau_{0,x} \hat{\sigma}_0 - \sum_{\alpha=1}^3 \tau_{\alpha,x} \hat{\sigma}_\alpha \right) \left(\tau_0 \hat{\sigma}_0 + \sum_{\beta=1}^3 \tau_\beta \hat{\sigma}_\beta \right) = \\ &= \frac{1}{2D} \left(D_x \hat{\sigma}_0 + \sum_{\alpha=1}^3 R_\alpha \hat{\sigma}_\alpha \right)\end{aligned}$$

Здесь введены обозначения:

$$D = \tau_0^2 - \mathbf{t}^2, \quad R_\alpha = \tau_{0,x} \tau_\alpha - \tau_{\alpha,x} \tau_0, \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

Отсюда окончательно находим решение для ϕ и $a_{1,2}$:

$$\phi = \ln D = \ln |\tau_0^2 - \mathbf{t}^2|, \quad A = \frac{1}{D} \left(\tau_{0,x} \theta - \theta_{,x} \tau_0 \right). \quad (100)$$

12 Уравнения второго порядка по координате

В качестве следующего примера рассмотрим построение интегрируемых уравнений для вспомогательных уравнений второго порядка по координате:

$$\hat{T}_t = \hat{J}\hat{T}_{xx} + \hat{Q}(t)\hat{T}. \quad (101)$$

в которых матрицы $\hat{J} = \hat{J}(t)$ и $\hat{Q} = \hat{Q}(t)$ являются функциями только t . В соответствии с общим изложением МФП, приводим данное уравнение к уравнению для матричных коэффициентов базовых соотношений. Имеем:

$$\hat{B} = \hat{J}(\hat{A}_x + \hat{A}^2) + \hat{Q}.$$

Подставляя это соотношение в (72), приходим к уравнению:

$$\hat{A}_t = \hat{J}\hat{A}_{xx} + (2\hat{J}\hat{A}_x\hat{A} + [\hat{J}, \hat{A}]\hat{A}_x) - [\hat{A}, \hat{J}]\hat{A}^2 - [\hat{A}, \hat{Q}] - \hat{Q}_x. \quad (102)$$

Это уравнение, вообще говоря, с комплексными коэффициентами встречается в том же контексте, что и нелинейное уравнение Шредингера (НУШ), например, в нелинейной оптике.

13 Интегрируемые уравнения для матриц размерности $n = 2$

Рассмотрим случай алгебры матриц размерности 2×2 . В этом случае матричные функции \hat{T} , \hat{A} , \hat{B} , \hat{G} можно представить в виде линейных комбинаций матриц Паули (76), для которых выполняются соотношения (77). Матричную функцию $\hat{T}(t)$ представим в таком виде:

$$\hat{T} = \sum_{i=0}^3 \psi_i(x, t) \sigma_i, \quad (103)$$

где $\psi_i(x, t)$ - вспомогательные функции. Соответственно:

$$\hat{A} = \sum_{i=0}^3 a_i(x, t) \hat{\sigma}_i, \quad \hat{B} = \sum_{i=0}^3 b_i(x, t) \hat{\sigma}_i, \quad (104)$$

Выберем матрицу \hat{J} в такой форме;

$$\hat{J} = iK(t)\hat{\sigma}_3, \quad (105)$$

где $K = K(t)$ - некоторая комплексная функция переменной t . Подставляя матрицы в уравнение (102) после простых, но несколько громоздких вычислений, приходим к следующей системе уравнений относительно функций $a_i(x, t)$, $i = 0, 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned}
 a_{0,t} - iK(t)a_{3,xx} - 2iK(t)\frac{\partial}{\partial x}(a_0a_3) &= 0, \\
 a_{3,t} - iKa_{0,xx} - iK\frac{\partial}{\partial x}(R^2 + a_1^2 + a_2^2) - 4iK(a_1^2 + a_2^2)a_0 &= 0, \\
 a_{1,t} - Ka_{2,xx} - 2K(a_{2,x}a_0 + 2a_{0,x}a_2) - 2KR^2a_2 + 4iKa_0a_3a_1 &= 0, \\
 a_{2,t} + Ka_{1,xx} + 2K(a_{1,x}a_0 + 2a_{0,x}a_1) + 2KR^2a_1 + 4iKa_0a_3a_2 &= 0.
 \end{aligned} \tag{106}$$

Здесь $R^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_0^2 + a_3^2$. Вводя переменные $u = a_1 + ia_2$, $\bar{u} = a_1 - ia_2$, $v = a_0$ и $w = -ia_3$, приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}
 u_t + iKu_{xx} + 4iKv_xu + 2iKvuv_x + 2Ki(|u|^2 + v^2 - w^2)u + 4Kwvu &= 0, \\
 v_t + Kw_{xx} + 2K\frac{\partial}{\partial x}(vw) &= 0, \\
 w_t - Kv_{xx} - K\frac{\partial}{\partial x}(2|u|^2 + v^2 - w^2) - 4K|u|^2v &= 0.
 \end{aligned} \tag{107}$$

Функции v, w - вещественные. Уравнение для комплексной функции u является уравнением типа НУШ. В качестве его приложения можно рассматривать нелинейную среду с накачкой. Система (107) является полностью интегрируемой и представляет собой уравнение типа Бюргерса.

14 Дополнительные интегрируемые соотношения

Для того, чтобы привести уравнение (102) к виду, аналогичному (117), необходимы дополнительные условия. Эти условия можно сформулировать в том же виде как в случае с уравнением КдВ, т.е. в форме дополнительного уравнения для основной функции $\hat{T}(x, t)$. В работе [20] было показано, что уравнение типа (102) можно превратить в уравнение типа НУШ, если к вспомогательному уравнению (101) добавить еще одно линейное матричное соотношение на функцию \hat{T} следующего вида:

$$\hat{T}_x = \hat{G}\hat{T}\hat{L}, \tag{108}$$

где $\hat{G}(t)$ - некоторая матрица, вообще говоря, зависящая от t , а \hat{L} - невырожденная постоянная матрица. Для тех матричных функций, которые удовлетворяют одновременно и

(101) и (108), выполняются следующие дополнительные уравнения для \hat{A} и \hat{B} :

$$\hat{A}_x + \hat{A}^2 = \hat{G}\hat{A}\hat{G}^{-1}\hat{A}, \quad \hat{B}_x + \hat{B}\hat{A} = \hat{G}\hat{B}\hat{G}^{-1}\hat{A}. \quad (109)$$

Первое из этих соотношений преобразуем к более удобной форме:

$$\hat{A}_x = [\hat{G}, \hat{A}]\hat{G}^{-1}\hat{A}. \quad (110)$$

Тогда, используя это соотношение, преобразуем уравнение (102) к виду, который аналогичен уравнению НУШ:

$$\hat{A}_t = \hat{J}\hat{A}_{xx} + \left(2\hat{J}[\hat{A}, \hat{G}]\hat{G}^{-1}\hat{A}^2 + [\hat{J}, \hat{A}][\hat{G}, \hat{A}]\hat{G}^{-1}\hat{A} - [\hat{J}, \hat{A}]\hat{A}^2\right) - [\hat{A}, \hat{Q}] + \hat{Q}_x. \quad (111)$$

Нелинейное слагаемое в этом уравнении на самом деле может быть представлено в более общей форме. Именно, слагаемое со второй производной \hat{A}_{xx} можно дополнительно разделить на две части, одну из которых с помощью соотношения (110) можно превратить также в нелинейное слагаемое. Следуя такому рецепту, уравнение (111) можно представить в следующем виде:

$$\hat{A}_t = \hat{J}(\hat{1} - \hat{D})\hat{A}_{xx} + \hat{N} - [\hat{A}, \hat{Q}] + \hat{Q}_x, \quad (112)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{N} = & \hat{J}\hat{D}\left([\hat{G}, [\hat{G}, \hat{A}]\hat{G}^{-1}\hat{A}]\hat{G}^{-1}\hat{A} + [\hat{G}, \hat{A}]\hat{G}^{-1}[\hat{G}, \hat{A}]\hat{G}^{-1}\hat{A}\right) + \\ & + 2\hat{J}[\hat{A}, \hat{G}]\hat{G}^{-1}\hat{A}^2 + [\hat{J}, \hat{A}][\hat{G}, \hat{A}]\hat{G}^{-1}\hat{A} - [\hat{J}, \hat{A}]\hat{A}^2 \end{aligned}$$

Здесь матрица \hat{D} может быть любой, зависящей только от t , матрицей. При этом уравнение (112) имеет кубическую нелинейность, как и уравнение НУШ. Покажем далее, что подбирая определенным образом вид матриц \hat{J} , \hat{G} и \hat{D} , это уравнение действительно можно привести в точности к уравнению НУШ (117).

Очевидно, что в отличие от классического НУШ это уравнение в покомпонентной записи относительно элементов матрицы \hat{A} будет иметь различный вид в зависимости от алгебраической структуры матриц \hat{J} , \hat{A} и \hat{G} . Имеется ввиду то, что если матрицы \hat{T} , \hat{A} , \hat{B} , \hat{J} , \hat{D} , \hat{Q} и \hat{G} определены на некоторой подалгебре линейной матричной алгебры GL_n матриц размерности $n \times n$, то структура уравнений будет целиком определяться этой подалгеброй и конкретным выбором элементов матриц \hat{J} , \hat{D} , \hat{Q} и \hat{G} . Поскольку классическое НУШ (117) содержит только одну комплексную функцию $u(x, t)$, то имеет смысл в начале рассматривать уравнения (112) в матричной размерности 2×2 , т.е. на алгебре GL_2 .

15 Приведение к форме уравнения НУШ

Рассмотрим теперь уравнения, соответствующие редукции, связанной с дополнительным уравнением (108). Выберем матрицу \hat{G} в следующей форме:

$$\hat{G} = \beta \hat{\sigma}_3,$$

где β - некоторая вещественная постоянная. При этом выбор матриц \hat{J}, \hat{D} оставим прежним (105).

Соотношения (110), которые редуцируют уравнения (106) к уравнениям типа НУШ, в покомпонентной записи имеют такой вид:

$$\begin{aligned} a_{0,x} + 2(a_1^2 + a_2^2) &= 0, & a_{3,x} &= 0, \\ a_{1,x} + 2a_0a_1 + 2ia_3a_2 &= 0, & a_{2,x} + 2a_0a_2 - 2ia_3a_1 &= 0. \end{aligned} \quad (113)$$

Отсюда, в частности, следует, что функция a_3 не зависит от x : $a_3 = c_3(t)$, а функцию a_0 можно представить в виде:

$$a_0 = - \int (a_1^2 + a_2^2) dx + c_0(t),$$

где функции $c_0(t)$ и $c_3(t)$ будут определяться формой решений для элементов матрицы \hat{T} .

Вводя переменные $u = a_1 + ia_2$, $\bar{u} = a_1 - ia_2$, $v = a_0 + a_3$ и $\bar{v} = a_0 - a_3$, уравнения (112) приводятся к паре комплексных уравнений:

$$\begin{aligned} u_t + iK(1 - \beta)u_{xx} + 2i(3 - 2\beta)Ku^2\bar{u} + 2iK(1 - 2\beta)v^2u + \\ + 2q_3u - 2qa_3 &= 0, \\ \bar{u}_t - iK(1 - \beta)\bar{u}_{xx} - 2i(3 - 2\beta)Ku\bar{u}^2 - 2iK(1 - 2\beta)\bar{v}^2u + \\ + 2\bar{q}_3u - 2\bar{q}a_3 &= 0, \end{aligned} \quad (114)$$

Здесь $q = q_1 + iq_2$, $\bar{q} = q_1 - iq_2$. В случае, если a_i , $i = 0, \dots, 2$ - вещественные функции, а $a_3 = ia$ - чисто мнимая, то уравнения (114) комплексно сопряжены друг другу и являются некоторым аналогом НУШ. Используя (113), получаем следующее соотношение:

$$v = a_0 + a_3 = \int |u|^2 dx + c_0 + c_3,$$

которое позволяет уравнение (114) записать в следующем виде:

$$u_t + iK(1 - \beta)u_{xx} + 2i(3 - 2\beta)K|u|^2u + 2i(1 - 2\beta)K \left(\int |u|^2 dx + c_0 + c_3 \right)^2 u + 2q_3u = 0. \quad (115)$$

При этом функция v удовлетворяет уравнению:

$$v_t - iK(1 - \beta)v_{xx} - 2iK(3 - 2\beta)|u|^2v - 2iK(1 - 2\beta)|u|^2\bar{v} = 0. \quad (116)$$

Заметим, что параметр β - произволен, но сами решения для функций $u(x, t)$ и $v(x, t)$ от него не зависят. Это означает, что предлагаемый способ получения нелинейных уравнений и их решений, на самом деле, позволяет строить пучки уравнений с инвариантным классом решений, который определяется функциональными подстановками, определенными выше. В частности, полагая $\beta = 1/2$, преобразуем уравнение (115) к классическому НУШ с линейным коэффициентом преломления среды $\gamma(t) = -2iq_3(t)$, который задается произвольной функцией $q_3(t)$. Функции u и v при таком выборе β являются решениями уравнений:

$$u_t + \frac{i}{2}Ku_{xx} + 4iK|u|^2u + 2q_3u = 0, \quad v_t - \frac{i}{2}Kv_{xx} - 4iK|u|^2v = 0. \quad (117)$$

Первое уравнение не зависит от функции v и является классическим НУШ, а второе уравнение описывает распространение возмущений в среде с показателем преломления $4K|u|^2$.

В случае $\beta = 3/2$ уравнения (115) и (116) принимают такой вид:

$$\begin{aligned} u_t - i\frac{K}{2}u_{xx} - i(Kv^2 + 2iq_3)u &= 0, \\ v_t + i\frac{K}{2}v_{xx} + 4iK|u|^2\bar{v} &= 0, \end{aligned}$$

А в случае $\beta = 1$ уравнения (115) и (116) переходят в систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно u и v :

$$\begin{aligned} u_t + 2iK|u|^2u - i2Kv^2u + 2q_3u &= 0, \\ v_t - 2iK|u|^2(v - \bar{v}) &= 0, \end{aligned}$$

в которых зависимость функций от x является параметрической.

16 Подстановки для многомерных уравнений

Следующим важным шагом в развитии метода функциональных подстановок является перенос его на случай многомерных уравнений. Хорошо известно, что расширение МОЗ на многомерные уравнения сопряжено с трудностями. Изложение методов построения интегрируемых уравнений в рамках МОЗ будет обсуждаться далее. Здесь же мы покажем,

что с формальной точки зрения методология МФП без труда распространяется на многомерный случай. Это позволяет надеяться на то, что многомерный вариант этого метода даст более широкий круг интегрируемых моделей, полезных на практике. Поскольку в предыдущей главе были введены матричные подстановки, то, естественно, многомерный случай рассматривать сразу в матричной форме. Случай скалярных функций будет являться частным вариантом общего подхода.

17 Общая формулировка метода в многомерном варианте

Рассмотрим в качестве базовых дифференциальных соотношений следующую совокупность уравнений для одной вспомогательной матричной функции $\hat{T}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \hat{T} = \hat{A}_\alpha(\mathbf{x}) \hat{T}, \quad \alpha = 1, \dots, n. \quad (118)$$

Из условия непрерывности функции $\hat{T}(\mathbf{x})$ следует, что функции $\hat{A}_\alpha(\mathbf{x})$, определенные базовыми соотношениями (118), связаны между собой соотношениями:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \hat{A}_\beta - \frac{\partial}{\partial x^\beta} \hat{A}_\alpha + [\hat{A}_\beta, \hat{A}_\alpha] = 0, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, n. \quad (119)$$

Кроме этих очевидных следствий непрерывности функции $T(\mathbf{x})$ из совокупности базовых соотношений следуют и рекуррентные соотношения для производных базовых функций A_α любого порядка. Именно по индукции доказывается, что функции $A^{(a_1, a_2, \dots, a_n)}(\mathbf{x})$, определенные соотношениями:

$$\frac{\partial^{|\mathbf{a}|} \hat{T}}{\partial x_1^{a_1} \dots \partial x_n^{a_n}} = \hat{A}^{(\mathbf{a})}(\mathbf{x}) \hat{T}, \quad (120)$$

являются дифференциальными полиномами только функций A_α , $\alpha = 1, \dots, n$. Здесь и далее вводится мультииндекс $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, с целочисленными компонентами a_i и обозначение: $|\mathbf{a}| = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Действительно, имеем:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \hat{T}^{[\mathbf{a}]} = \hat{A}^{(\mathbf{a} + \mathbf{1}_\alpha)} \hat{T} = \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \hat{A}^{(\mathbf{a})} + \hat{A}^{(\mathbf{a})} \hat{A}_\alpha \right) \hat{T}, \quad \alpha = 1, \dots, n,$$

где

$$\mathbf{1}_\alpha = \underbrace{(0, 0, \dots, 0)}_{\alpha-1}, \underbrace{(1, 0, \dots, 0)}_{n-\alpha}.$$

Отсюда следует набор рекуррентных соотношений:

$$\hat{A}^{(\mathbf{a}+1_\alpha)} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \hat{A}^{(\mathbf{a})} + \hat{A}^{(\mathbf{a})} \hat{A}_\alpha, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, n. \quad (121)$$

Как и в размерности $1 + 1$ (или 2), рассмотренной в предыдущих разделах, можно рассмотреть дифференциальные следствия для функций \hat{A}_α , $\alpha = 1, \dots, n$, которые порождены требованием, что функция $\hat{T}(\mathbf{x})$ удовлетворяет одному или нескольким дополнительным уравнениям. Действительно, если рассматривать такие функции \hat{A}_α , $\alpha = 1, \dots, n$, которые соответствуют функции \hat{T} , являющейся решением линейного уравнения общего вида:

$$\sum_{|\mathbf{a}|=0}^N \hat{C}_\mathbf{a}(\mathbf{x}) \frac{\partial^{|\mathbf{a}|} \hat{T}}{\partial x^{a_1} \dots \partial x^{a_n}} = 0, \quad (122)$$

то после подстановки в него базовых соотношений для функций \hat{A}_α получается дополнительное нелинейное уравнение вида:

$$\sum_{|\mathbf{a}|=0}^N \hat{C}_\mathbf{a}(\mathbf{x}) \hat{A}^{(\mathbf{a})} = 0. \quad (123)$$

Поскольку $\hat{A}^{(\mathbf{a})}$ являются дифференциальными полиномами функций $\hat{A}_\alpha(\mathbf{x})$, последнее уравнение в совокупности с (119) позволяет рассматривать как систему нелинейных уравнений относительно \hat{A}_α .

18 Простые примеры интегрируемых скалярных моделей

В данном разделе рассмотрим примеры конструирования многомерных интегрируемых уравнений на основе линейных моделей для скалярной функции $T(\mathbf{x})$. В скалярном случае трудно ожидать получения существенно новых полезных для практики интегрируемых моделей, поскольку свойства совокупности функций $A_\alpha(\mathbf{x})$ в этом случае определяются очень простыми соотношениями:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} A_\beta - \frac{\partial}{\partial x^\beta} A_\alpha = 0, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, n \quad (124)$$

Тем не менее мы рассмотрим некоторые варианты построения интегрируемых моделей, поскольку они систематизируют свойства целого набора моделей, в частности, гидродинамических, что достаточно трудно сделать с точки зрения других подходов.

Простейшими примерами использования схемы МФП для многомерных систем уравнений является построение точных решений уравнений Навье-Стокса для потенциальных течений вязкой сжимаемой жидкости. Хорошо известно из гидродинамики [42], что в случае потенциальных течений несжимаемой жидкости вязкие напряжения не дают вклада в уравнения. Однако в случае сжимаемой жидкости (газа) такой вклад остается и его учет как раз и дает следующий пример применения МФП.

Для удобства выделим переменную времени, полагая $t = x^0$, оставляя число координат равным n . Тогда базовая система уравнений примет следующий вид:

$$T_t = WT, \quad T_{,\alpha} = A_\alpha T, \quad \alpha = 1, \dots, n. \quad (125)$$

Отсюда уравнения связи можно записать так:

$$A_{\alpha,\beta} = A_{\beta,\alpha}, \quad W_{,\alpha} = A_{\alpha,t}, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, n. \quad (126)$$

В качестве дополнительного уравнения рассмотрим уравнение теплопроводности в пространстве размерности n :

$$T_t = \nu \Delta T. \quad (127)$$

Здесь

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}.$$

Это уравнение эквивалентно следующему замыкающему соотношению:

$$\frac{1}{\nu} W = \sum_{\alpha=1}^n (A_{\alpha,\alpha} + A_\alpha^2). \quad (128)$$

Из последнего соотношения простым дифференцированием находим:

$$W_{,\alpha} = A_{\alpha,t} = \nu \sum_{\beta=1}^n (A_{\beta,\beta\alpha} + 2A_\alpha A_{\alpha,\beta}).$$

Используя условия совместности, из этого соотношения для каждого значения индекса β получаем:

$$\frac{1}{\nu} A_{\alpha,t} = \sum_{\beta=1}^n (A_{\alpha,\beta\beta} + 2A_\alpha A_{\beta,\alpha}). \quad (129)$$

Если ввести обозначения: $v_\alpha = -2\nu A_\alpha$, то последнее уравнение приводится к уравнению Навье-Стокса для потенциального потока жидкости с полем скорости $\mathbf{v} = \{v_1, \dots, v_n\}$ и нулевой силой Архимеда:

$$v_{\alpha,t} + \sum_{\beta=1}^n v_\beta \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} = \nu \Delta v_\alpha.$$

Это уравнение можно назвать многомерным уравнением Бюргерса.

Вводя обозначения: $u_\alpha = -\nu A_\alpha$, уравнение (129) приводится к следующему виду:

$$u_{\alpha,t} + \sum_{\beta=1}^n u_\beta \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} = \nu \Delta u_\alpha - \frac{\partial p}{\partial x_\alpha}, \quad (130)$$

где

$$p = \frac{\nu}{2} \sum_{\alpha=1}^n A_\alpha^2 + p_0. \quad (131)$$

Здесь p_0 - произвольная постоянная. Уравнение (130) интерпретируется как уравнения Навье-Стокса для потенциального потока жидкости с полем скорости $\mathbf{u} = \mathbf{v}/2$ и давлением p . Однако для полноты такой интерпретации необходимо указать уравнение сохранения массы, которое должно иметь вид уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \rho u^\alpha = 0. \quad (132)$$

К такому виду приводится исходное уравнение (127). Действительно:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \nu \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[T \frac{\partial \ln T}{\partial x_\alpha} \right] = 0.$$

Используя обозначения для скорости, и полагая $\rho = T$, приходим к уравнению (132). Таким образом, любое решение уравнения (127) дает решение уравнений Навье-Стокса с давлением p и плотностью ρ . Однако требуется определённое уточнение этих уравнений.

19 Матричные подстановки для многомерных уравнений

Матричные подстановки в многомерном случае существенно расширяют класс интегрируемых и частично интегрируемых уравнений. В многомерном случае дополнительные

вспомогательные уравнения оставляют более широкий произвол в выборе решений для основной матричной функции \hat{T} . Поэтому существенно расширяется класс частично интегрируемых нелинейных уравнений именно в многомерном случае. Изложение примеров применения общей схемы матричных подстановок для многомерных уравнений начнем со вспомогательных уравнений первого порядка.

19.1 Задача M -волн в размерности $1+2$

Простым примером использования описанной схемы являются нелинейные уравнения, которые можно получить, отталкиваясь от системы вспомогательных уравнений в координатной размерности $1+2$ следующего вида:

$$\hat{T}_t = \hat{P}\hat{T}_x, \quad \hat{T}_t = \hat{Q}\hat{T}_y. \quad (133)$$

Будем предполагать, что матрицы \hat{P} и \hat{Q} невырождены и коммутируют между собой: $[\hat{P}, \hat{Q}] = 0$, а также имеют элементы, независимые от x, y, t . Условие коммутативности необходимо для совместности системы (133). Базовые соотношения переобозначим. Именно, будем полагать:

$$\hat{T}_x = \hat{A}\hat{T}, \quad \hat{T}_y = \hat{B}\hat{T}, \quad \hat{T}_t = \hat{C}\hat{T}. \quad (134)$$

Здесь матрицы \hat{A}, \hat{B} и \hat{C} размерности N представляют собой базовые функции схемы. Связь между этими матрицами в силу выполнения базовых соотношений имеет такой вид:

$$\hat{A}_t - \hat{C}_x + [\hat{A}, \hat{C}] = 0, \quad \hat{B}_t - \hat{C}_x + [\hat{B}, \hat{C}] = 0, \quad \hat{A}_y - \hat{B}_x + [\hat{A}, \hat{B}] = 0.$$

Используя базовые соотношения, приводим уравнения (133) к следующему виду:

$$\hat{C} = \hat{P}\hat{A}, \quad \hat{C} = \hat{Q}\hat{B}. \quad (135)$$

Из этих соотношений сразу следует, что базовые функции \hat{A}, \hat{B} и \hat{C} удовлетворяют по отдельности следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \hat{A}_t - \hat{P}\hat{A}_x + [\hat{A}, \hat{P}]\hat{A} &= 0, & \hat{C}_t - \hat{P}\hat{C}_x + \hat{C}^2 - \hat{P}\hat{C}\hat{P}^{-1}\hat{C} &= 0, \\ \hat{B}_t - \hat{Q}\hat{B}_y + [\hat{B}, \hat{Q}]\hat{B} &= 0, & \hat{C}_t - \hat{Q}\hat{C}_y + \hat{C}^2 - \hat{Q}\hat{C}\hat{Q}^{-1}\hat{C} &= 0, \\ \hat{P}^{-1}\hat{C}_y - \hat{Q}^{-1}\hat{C}_x + [\hat{P}^{-1}\hat{C}, \hat{Q}^{-1}\hat{C}] &= 0. \end{aligned} \quad (136)$$

Объединяя часть уравнений этой совокупности, в частности, получаем многомерное уравнение:

$$\hat{C}_t - p\hat{P}\hat{C}_x - q\hat{Q}\hat{C}_y + \hat{C}^2 - p\hat{P}\hat{C}\hat{P}^{-1}\hat{C} - q\hat{Q}\hat{C}\hat{Q}^{-1}\hat{C} = 0, \quad (137)$$

где p и q - два любых вещественных числа, связанных между собой условием: $p + q = 1$. Эта система может рассматриваться как известная система N^2 -волн с квадратичной нелинейностью в размерности $1+2$. Решения этой системы могут быть получены с помощью подстановки:

$$\hat{C} = \hat{T}_t \hat{T}^{-1},$$

где \hat{T} - любое решение системы (133).

20 Интегрируемые модели автоволн в размерности $1+2$

Рассмотрим теперь в качестве вспомогательного уравнения матричное уравнение следующего вида:

$$\hat{T}_t = \hat{g} \hat{T}_{xy}, \quad (138)$$

где \hat{g} - некоторая постоянная матрица. Базовые соотношения будем использовать в форме (134). Тогда уравнение (138) приводит к следующим двум соотношениям:

$$\hat{C} = \hat{g}(\hat{A}_y + \hat{A}\hat{B}), \quad \hat{C} = \hat{g}(\hat{B}_x + \hat{B}\hat{A}).$$

Подставляя эти соотношения в уравнения совместности, приходим к двум матричным уравнениям для матриц \hat{A} и \hat{B} :

$$\begin{aligned} \hat{A}_t - \hat{g}\hat{A}_{xy} - \hat{g}\hat{A}_x\hat{B} - \hat{g}\hat{A}_y\hat{A} + [\hat{A}, \hat{g}](\hat{A}_y + \hat{A}\hat{B}) &= 0, \\ \hat{B}_t - \hat{g}\hat{B}_{xy} - \hat{g}\hat{B}_x\hat{B} - \hat{g}\hat{B}_y\hat{A} + [\hat{B}, \hat{g}](\hat{B}_x + \hat{B}\hat{A}) &= 0. \end{aligned} \quad (139)$$

Сделаем в уравнениях формальную замену:

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \bar{z}},$$

где $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$. В этом случае вспомогательное уравнение примет такой вид:

$$\hat{T}_t = \frac{\hat{g}}{4} \Delta \hat{T}, \quad (140)$$

где

$$\Delta = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$$

- двумерный Лапласа оператор. Кроме этого, имеем:

$$\hat{A} = \hat{T}_z \hat{T}^{-1}, \quad \hat{B} = \hat{T}_{\bar{z}} \hat{T}^{-1}.$$

Отсюда следует, что в случае, если матрица \hat{T} , как решение уравнения (140), выбрана вещественной, то матрицы \hat{A} и \hat{B} будут комплексно сопряжены друг другу:

$$\hat{B} = \hat{A}^*.$$

Для этого необходимо, чтобы матрица \hat{g} также была вещественной. Последнее означает, что уравнения (139) для \hat{A} и \hat{B} также комплексно сопряжены друг другу:

$$\begin{aligned} \hat{A}_t - \frac{1}{4} \hat{g} \Delta \hat{A} - \hat{g} \hat{A}_z \hat{A}^* - \hat{g} \hat{A}_{\bar{z}} \hat{A} + [\hat{A}, \hat{g}] (\hat{A}_{\bar{z}} + \hat{A} \hat{A}^*) &= 0, \\ \hat{A}_t^* - \frac{1}{4} \hat{g} \Delta \hat{A}^* - \hat{g} \hat{A}_z^* \hat{A}^* - \hat{g} \hat{A}_{\bar{z}}^* \hat{A} + [\hat{A}^*, \hat{g}] (\hat{A}_z + \hat{A}^* \hat{A}) &= 0. \end{aligned} \quad (141)$$

Нетрудно видеть, что эти уравнения переходят друг в друга при комплексном сопряжении в случае вещественной матрицы \hat{g} .

21 Нелинейное уравнение Дирака

Важным примером использования предложенной общей схемы является возможность сконструировать интегрируемое с помощью подстановок нелинейное уравнение Дирака в размерности 1+3, имеющее также квадратичную нелинейность. Исследование этого уравнения и его решений и будет основной задачей данной статьи. Для вывода уравнения типа Дирака рассмотрим вспомогательное уравнение первого порядка в размерности 1+3 следующего вида:

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{T} = \sum_{\alpha=1}^3 \hat{\sigma}_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \hat{T} + \hat{\mu} \hat{T}. \quad (142)$$

Здесь \hat{T} - матрицы 2×2 , а $\hat{\sigma}_\mu$ - матрицы Паули (76). Используя базовые соотношения:

$$\hat{T}_t = \hat{A}_0 \hat{T}, \quad \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \hat{T} = \hat{A}_\alpha \hat{T}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (143)$$

приходим к следующему матричному уравнению:

$$\hat{C} = \hat{A}_0 = \sum_{\alpha=1}^3 \hat{\sigma}_\alpha \hat{A}_\alpha + \hat{\mu}. \quad (144)$$

Условия совместности схемы в данном случае можно записать так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \hat{A}_\beta - \frac{\partial}{\partial x^\beta} \hat{A}_\alpha + [\hat{A}_\beta, \hat{A}_\alpha] &= 0, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, 3, \\ \frac{\partial}{\partial t} \hat{A}_\beta - \frac{\partial}{\partial x^\beta} \hat{C} + [\hat{A}_\beta, \hat{C}] &= 0, \quad \beta = 1, \dots, 3, \end{aligned} \quad (145)$$

Сворачивая обе системы (145) по индексу β , предварительно умножив их, соответственно, на $\hat{\sigma}_\beta$, и используя (144), приходим к следующей системе для матриц \hat{C} и \hat{A}_β , $\beta = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \hat{A}_\alpha - \sum_{\beta=1}^3 \hat{\sigma}_\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} \hat{A}_\alpha + \hat{A}_\alpha \hat{C} - \sum_{\beta=1}^3 \hat{\sigma}_\beta \hat{A}_\alpha \hat{A}_\beta - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \hat{\mu} - \hat{\mu} \hat{A}_\alpha &= 0, \quad \beta = 1, \dots, 3, \\ \frac{\partial}{\partial t} \hat{C} - \sum_{\beta=1}^3 \hat{\sigma}_\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} \hat{C} + \hat{C}^2 - \sum_{\beta=1}^3 \hat{\sigma}_\beta \hat{C} \hat{A}_\beta - \frac{\partial}{\partial t} \hat{\mu} - \hat{\mu} \hat{C} &= 0. \end{aligned} \quad (146)$$

Для простоты далее будем рассматривать ситуации, когда $\hat{\mu} = \text{const}$. Покажем теперь, что при таком условии уравнения (146) можно рассматривать как нелинейные уравнения Дирака.

22 Переход к спинорной форме записи

Матричные уравнения (146) можно представить в векторном виде (см. Приложение), если каждую из матриц \hat{C} и \hat{A}_α представить в виде одного вектора, составленного из их столбцов по правилу. Запишем матрицу \hat{C} в виде двух столбцов:

$$\hat{C} = (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2), \quad \mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix}. \quad (147)$$

Введем следующий би-спинор Ψ_0 , имеющий вид:

$$\Psi_0 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{1,2} \\ c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1^0 \\ \psi_2^0 \end{pmatrix}, \quad (148)$$

где $\psi_1 = \mathbf{c}_1$ и $\psi_2 = \mathbf{c}_2$ - спиноры. Тогда, согласно правилам тензорного произведения (см. Приложение), первое уравнение системы (146) можно записать в следующем виде:

$$\hat{S}_0 \frac{\partial}{\partial t} \Psi_0 + \sum_{\alpha=1}^3 \hat{S}_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \Psi_0 + \hat{E} \Psi_0 = 0, \quad (149)$$

где:

$$\hat{S}_0 = (\hat{I} \otimes \hat{I}), \quad \hat{S}_\alpha = -(\hat{\sigma}_\alpha \otimes \hat{I}) = - \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_\alpha & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{\sigma}_\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

а матрица \hat{E} вычисляется по следующему правилу тензорного произведения (см. Приложение) матриц:

$$\hat{E} = \hat{I} \otimes \hat{A}_0 - \sum_{\alpha=1}^3 (\hat{\sigma}_\alpha \otimes \hat{I}) (\hat{I} \otimes \hat{A}_\alpha) - \hat{\mu}_0 = \sum_{j=0}^3 \hat{S}_j \hat{\mathcal{A}}_j - \hat{\mu}_0.$$

Здесь введены обозначения:

$$\hat{\mathcal{A}}_\alpha = (\hat{I} \otimes \hat{A}_\alpha) = \begin{pmatrix} a_{11}^\alpha \hat{I} & a_{21}^\alpha \hat{I} \\ a_{12}^\alpha \hat{I} & a_{22}^\alpha \hat{I} \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathcal{A}}_0 = (\hat{I} \otimes \hat{C}) = \begin{pmatrix} c_{11} \hat{I} & c_{21} \hat{I} \\ c_{12} \hat{I} & c_{22} \hat{I} \end{pmatrix}, \quad \hat{\mu}_0 = (\hat{\mu} \oplus \hat{I}).$$

По виду матрицы \hat{E} ее можно интерпретировать (с точностью до размерного множителя) как энергию взаимодействия заряженной частицы с векторным потенциалом обобщенного электромагнитного поля с векторным потенциалом, представленным 4-вектором с компонентами в виде матриц \hat{A}_j , $j = 0, 1, 2, 3$.

Умножая уравнение (149) на четырехрядную матрицу $\hat{\gamma}_0$:

$$\hat{\gamma}_0 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{I} \\ -\hat{I} & \hat{0} \end{pmatrix},$$

приходим к уравнению, совпадающему с уравнением Дирака с точностью до размерных множителей функций, входящих в запись этого уравнения:

$$\sum_{j=0}^3 \hat{\gamma}_j \left(\frac{\partial}{\partial x^j} + \hat{\mathcal{A}}_j \right) \Psi_0 = \hat{m} \Psi_0, \quad (150)$$

где введены обозначения:

$$\hat{m} = \hat{\gamma}_0 \hat{\mu}_0, \quad \hat{\gamma}_\alpha = \hat{\gamma}_0 \hat{S}_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (151)$$

Определенным отличием данного уравнения от классического является то, что матрица $\hat{\gamma}_0$ совпадает с классической матрицей Дирака $\hat{\gamma}_5$, а не с классической матрицей Дирака:

$$\hat{\gamma}_0 = \begin{pmatrix} \hat{I} & \hat{0} \\ \hat{0} & -\hat{I} \end{pmatrix}$$

По аналогии с матрицей $\hat{C} = \hat{A}_0$ введем спинорное представление и матрицу \hat{A}_α . Именно, полагая:

$$\hat{A}_\alpha = (\mathbf{a}_1^\alpha, \mathbf{a}_2^\alpha), \quad \mathbf{a}_1^\alpha = \begin{pmatrix} a_{11}^\alpha \\ a_{21}^\alpha \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2^\alpha = \begin{pmatrix} a_{12}^\alpha \\ a_{22}^\alpha \end{pmatrix}, \quad (152)$$

введем следующие би-спиноры Ψ_α :

$$\Psi_\alpha = \begin{pmatrix} a_{11}^\alpha \\ a_{21}^\alpha \\ a_{12}^\alpha \\ a_{22}^\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1^\alpha \\ \psi_2^\alpha \end{pmatrix}. \quad (153)$$

Опять с помощью правил тензорного произведения находим, что уравнения, которым удовлетворяют спиноры Ψ_α , имеют уравнения Дирака следующего вида:

$$\sum_{j=0}^3 \hat{\gamma}_j \left(\frac{\partial}{\partial x^j} + \hat{\mathcal{A}}_j \right) \Psi_\alpha = \hat{m} \Psi_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad (154)$$

где матрицы $\hat{\mathcal{A}}_j$ имеют тот же вид (151), что и в уравнении для би-спинора Ψ_0 .

К этим соотношениям, записанным в спинорном виде, необходимо добавить и соотношение (144), также представленное в спинорном виде:

$$\Psi_0 = \sum_{\alpha=1}^3 \hat{S}_\alpha \Psi_\alpha + \mathbf{M}, \quad (155)$$

где

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{21} \\ \mu_{12} \\ \mu_{22} \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что би-спиноры Ψ_j , $j = 0, 1, 2, 3$ - линейно зависимы.

Аналогично, в спинорном виде можно представить и уравнение (142). Полагаем:

$$\hat{T} = (\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2), \quad \mathbf{t}_1 = \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{21} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{t}_2 = \begin{pmatrix} t_{12} \\ t_{22} \end{pmatrix}, \quad (156)$$

вводим би-спинор:

$$\Phi = \begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ t_{12} \\ t_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \end{pmatrix},$$

который теперь удовлетворяет уравнению:

$$\sum_{\nu=0}^3 \hat{\gamma}_\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Phi + \hat{m} \Phi = 0, \quad (157)$$

что соответствует линейному уравнению Дирака для заряженной частицы с массой, определяемой матрицей \hat{m} .

Также можно преобразовать в спинорную форму и базовые соотношения (143). Они будут выглядеть таким образом:

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \Phi = \hat{\mathcal{B}}_j \Phi, \quad j = 0, 1, 2, 3, \quad (158)$$

где $\hat{\mathcal{B}}_j = (\hat{A}_j \otimes \hat{I})$ - матрицы 4×4 , отличные от матриц $\hat{\mathcal{A}}_j$. В силу выполнения базовых соотношений в спинорной форме (158), выполняются соотношения:

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \hat{\mathcal{B}}_j - \frac{\partial}{\partial x^j} \hat{\mathcal{B}}_k + [\hat{\mathcal{B}}_j, \hat{\mathcal{B}}_k] = 0, \quad j, k = 0, 1, 2, 3. \quad (159)$$

23 Интерпретация

Уравнения Дирака (149) и (150) описывают динамику трех заряженных частиц (в силу линейной зависимости би-спиноров частиц) со спином $1/2$ (фермионов) в совокупном поле, созданном самими частицами, потенциал которого описывается матрицами $\hat{\mathcal{A}}_j$. Компоненты векторного 4-потенциала $\hat{\mathbf{A}} = (\hat{\mathcal{A}}_0, \hat{\mathcal{A}}_1, \hat{\mathcal{A}}_2, \hat{\mathcal{A}}_3)$, в свою очередь, определяются би-спинорами Ψ_j в соответствии с формулами (153) и (148). То, что компоненты векторного потенциала, созданного частицами поля, выражаются через матрицы, говорит о том, что данное поле следует рассматривать как калибровочное поле типа Янга-Миллса со значениями в алгебре матриц второго порядка $SL[2]$. Тензор напряженности этого поля со значениями в той же подалгебре матриц 4×4 имеет вид:

$$\mathcal{F}_{jk} = \frac{\partial}{\partial x^k} \hat{\mathcal{A}}_j - \frac{\partial}{\partial x^j} \hat{\mathcal{A}}_k + [\hat{\mathcal{A}}_j, \hat{\mathcal{A}}_k].$$

Для проверки того, является ли такое поле в точности полем Янга-Миллса, необходимо еще установить то, каким уравнениям удовлетворяет напряженность этого поля в силу выполнения вспомогательного уравнения (142). Решение этого вопроса выходит за рамки данной лекции. Заметим только, что напряженность этого поля, вообще говоря, отлична от нуля, хотя напряженность поля с компонентами $\hat{\mathcal{B}}_j$ равна нулю в силу соотношений (159).

Таким образом, полученная модель представляет собой специфический случай самосогласованной модели взаимодействия четырех фермионов с собственным полем, подобным полю Янга-Миллса.

Полученную систему можно также использовать в качестве основного состояния системы четырех фермионов, а квантовые состояния в ней можно описывать с помощью теории возмущений вблизи этого основного состояния. В этом случае кроме самой нелинейной модели следует рассмотреть и уравнения для ее возмущений первого порядка.

Уравнения для возмущений удобно строить, исходя из их первичной матричной формы, а затем перейти уже к спинорной записи этих уравнений. Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \delta \hat{A}_\alpha - \sum_{\beta=1}^3 \hat{\sigma}_\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} \delta \hat{A}_\alpha + \delta \hat{A}_\alpha \hat{C} + \hat{A}_\alpha \delta \hat{C} - \sum_{\beta=1}^3 \hat{\sigma}_\beta \left(\delta \hat{A}_\alpha \hat{A}_\beta + \hat{A}_\alpha \delta \hat{A}_\beta \right) &= \hat{m} \delta \hat{A}_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, 3, \\ \frac{\partial}{\partial t} \delta \hat{C} - \sum_{\beta=1}^3 \hat{\sigma}_\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} \delta \hat{C} + \delta \hat{C} \hat{C} + \hat{C} \delta \hat{C} - \sum_{\beta=1}^3 \hat{\sigma}_\beta \left(\delta \hat{C} \hat{A}_\beta + \hat{C} \delta \hat{A}_\beta \right) &= \hat{m} \delta \hat{C}. \end{aligned} \quad (160)$$

Переходя к спинорной записи, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \xi_\alpha - \sum_{\beta=1}^3 \hat{S}_\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} \xi_\alpha + \hat{\mathcal{A}}_0 \xi_\alpha + \hat{\mathcal{B}}_\alpha \xi_0 - \sum_{\beta=1}^3 \hat{\sigma}_\beta \left(\hat{\mathcal{A}}_\beta \xi_\alpha + \hat{\mathcal{B}}_\alpha \xi_\beta \right) &= \hat{m} \xi_\alpha, \quad \beta = 1, \dots, 3, \\ \frac{\partial}{\partial t} \xi_0 - \sum_{\beta=1}^3 \hat{S}_\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} \xi_0 + (\hat{\mathcal{A}}_0 + \hat{\mathcal{B}}_0) \xi_0 - \sum_{\beta=1}^3 \hat{S}_\beta \left(\hat{\mathcal{A}}_\beta \xi_0 + \hat{\mathcal{B}}_0 \xi_\beta \right) &= \hat{m} \xi_0. \end{aligned} \quad (161)$$

Здесь:

$$\xi_j = \begin{pmatrix} \delta a_{11}^j \\ \delta a_{21}^j \\ \delta a_{12}^j \\ \delta a_{22}^j \end{pmatrix}, \quad j = 0, 1, 2, 3.$$

24 Построение решений для нелинейного уравнения Дирака

Вычислим решения вспомогательного уравнения в форме (157). Будем искать решение в следующей форме:

$$\Phi = \mathbf{u} \exp \left(i \sum_{j=0}^3 p_j x_j \right),$$

где \mathbf{u} - постоянный спинор, а $\mathbf{p} = (p_0, p_1, p_2, p_3)$ - параметры решения, представляющие по сути компоненты вектора энергии-импульса частицы, описывающейся уравнением Дирака (157). В этом случае (157) переходит в задачу на собственные числа и вектора:

$$\sum_{j=0}^3 \hat{\gamma}_j \mathbf{u} - i\hat{m} \mathbf{u} = 0.$$

Эту систему можно представить в следующей форме:

$$\left(\sum_{\alpha=1}^3 p_\alpha \hat{S}_\alpha + i\hat{\mu}_0 \right) \mathbf{u} = p_0 \mathbf{u}.$$

Последняя система представляет собой задачу на собственные числа и вектора матрицы:

$$\hat{W} = \left(\sum_{\alpha=1}^3 p_\alpha \hat{S}_\alpha + i\hat{\mu}_0 \right).$$

Обозначим через $E_a = E_a(p_1, p_2, p_3 | \hat{\mu}_0)$, $a = 1, 2, 3, 4$ собственные числа матрицы \hat{W} , которым соответствуют собственные вектора $\mathbf{u}_a(\hat{\mu})$:

$$\hat{W} \mathbf{u}_a = E_a(p_1, p_2, p_3 | \hat{\mu}_0) \mathbf{u}_a, a = 1, 2, 3, 4.$$

Тогда общее решение для функции \hat{T} можно представить в таком виде:

$$\hat{T} = \int \sum_{a=1}^4 U_a(p_1, p_2, p_3) \mathbf{u}_a(\hat{\mu}_0) \exp \left(i \sum_{\alpha=1}^3 p_\alpha x_\alpha + i E_a(p_1, p_2, p_3 | \hat{\mu}_0) t \right) dp_1 dp_2 dp_3. \quad (162)$$

Здесь $U_a(p_1, p_2, p_3)$, $a = 1, 2, 3, 4$ - произвольные функции $p = (p_1, p_2, p_3)$. Решения для спиноров Ψ_j , $j = 0, 1, 2, 3$ при этом вычисляются с помощью подстановок (143) и преобразования компонент матриц \hat{C} и \hat{A}_α в спинорную форму (147) и (152).

Полученные решения позволяют построить теперь и точные решения для возмущений. Для этого достаточно воспользоваться базовыми соотношениями (118), связывающими функции \hat{A}_j , $j = 0, 1, 2, 3$ с матрицей \hat{T} . Возмущения первого порядка вблизи решения нелинейного уравнения Дирака, соответствующего матрицам $\hat{T}^{(0)}$ и $\hat{A}_j^{(0)}$ для этих соотношений, выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \delta \hat{T}^{(0)} = \delta \hat{A}_j \hat{T}^{(0)} + \hat{A}_j^{(0)} \delta \hat{T}.$$

Отсюда находим, что возмущения матриц $\delta\hat{A}_j$ выражаются через возмущения матрицы $\hat{T}^{(0)}$, ее саму и $\hat{A}_j^{(0)}$ следующим образом:

$$\delta\hat{A}_j = \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \delta\hat{T} - \hat{A}_j^{(0)} \delta\hat{T} \right) \left(\hat{T}^{(0)} \right)^{-1}. \quad (163)$$

Используя преобразование к спинорному виду можем получить возмущения для биспиноров ξ_j , $j = 0, 1, 2, 3$, которые удовлетворяют уравнениям (161). Возмущения матрицы \hat{T} находятся непосредственно из общего решения (162), в котором возмущения могут быть связаны с произвольными функциями $U_a(p_1, p_2, p_3)$ и матрицей $\hat{\mu}$, входящей во вспомогательное уравнение для \hat{T} , от которого не зависит явный вид уравнений (154) и (150). Таким образом, решение (163) полностью решает задачу о возмущениях вблизи того или иного точного решения уравнений Дирака и может быть использовано для задач квантовой динамики.

25 Приложение

Матричное уравнение:

$$\hat{A}\hat{X}\hat{B} + \hat{C}\hat{X}\hat{D} = \hat{F}. \quad (164)$$

относительно матрицы $\hat{X} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$ размерности $N \times N$, где \mathbf{x}_i - столбцы матрицы \hat{X} с номером $i = 1, \dots, N$, может быть представлено в виде векторного уравнения относительно вектора размерности $d = N^2$:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \dots \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix}.$$

В этом уравнении $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$ и \hat{F} известные матрицы той же размерности $n \times n$. Введем обозначения:

$$\begin{aligned} (\hat{I} \oplus \hat{B}) &= \begin{pmatrix} B_{11}\hat{I} & B_{21}\hat{I} & \dots & B_{N1}\hat{I} \\ B_{12}\hat{I} & B_{22}\hat{I} & \dots & B_{N2}\hat{I} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{1N}\hat{I} & B_{2N}\hat{I} & \dots & B_{NN}\hat{I} \end{pmatrix}, & (\hat{I} \oplus \hat{D}) &= \begin{pmatrix} D_{11}\hat{I} & D_{21}\hat{I} & \dots & D_{N1}\hat{I} \\ D_{12}\hat{I} & D_{22}\hat{I} & \dots & D_{N2}\hat{I} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{1N}\hat{I} & D_{2N}\hat{I} & \dots & D_{NN}\hat{I} \end{pmatrix} \\ (\hat{A} \oplus \hat{I}) &= \begin{pmatrix} \hat{A} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \hat{A} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \hat{A} \end{pmatrix}, & (\hat{C} \oplus \hat{I}) &= \begin{pmatrix} \hat{C} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \hat{C} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \hat{C} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь \hat{I} - единичная матрица размерности $N \times N$. Тогда уравнение (164) эквивалентно системе уравнений:

$$\left((\hat{A} \oplus \hat{I})(\hat{I} \oplus \hat{B}) + (\hat{C} \oplus \hat{I})(\hat{I} \oplus \hat{D}) \right) \mathbf{X} = \mathbf{F},$$

где:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \dots \\ \mathbf{f}_N \end{pmatrix},$$

а $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_N$ - столбцы матрицы \hat{F} .

Литература

- [1] Гуревич А.Г. Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках, М:Наука, 1973, 592 с.
- [2] Гуревич А.Г., Мелков Г.А. . Магнитные колебания и волны, М:Физматлит, 1984, 464 с.
- [3] D. Polyanin and V. F. Zaitsev, Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd Edition, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2011
- [4] А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев, Справочник по нелинейным уравнениям математической физики, М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
- [5] Polyanin, A. D. and Zaitsev, V. F., Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2004

Лекция 2. Гидродинамические подстановки для самосогласованных моделей гидродинамики

26 Общая схема гидродинамических подстановок

Следуя общей идеологии работ [40, 18], будем рассматривать такие течения жидкости и газа, которые сводятся к одномерным уравнениям гидродинамики за счет, например, цилиндрической или сферической начальной симметрий. В соответствии с [18], воспользуемся методом функциональных подстановок в форме, приспособленной к задачам гидродинамики. Течения жидкости или газа, сводящиеся к одномерным уравнениям гидродинамики, целиком описываются с помощью задания поля скорости среды $u(x, t)$ как функции координаты и времени. Состояние среды при этом описывается ее плотностью ρ .

С каждой точкой среды можно формально связать маркерную функцию $\theta = \theta(x, t)$, значения которой привязаны к точкам среды. Это означает, что уравнение переноса маркеров, связанных с θ , можно записать в следующем виде:

$$\theta_t + u(x, t)\theta_x = 0. \quad (165)$$

Дифференциальным следствием этого соотношения является уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x}(u\rho) = 0, \quad (166)$$

с плотностью среды

$$\rho = \theta_x, \quad (167)$$

которое получается простым дифференцированием (165) по x .

Это общее наблюдение позволяет рассмотреть специальный подход для конструирования моделей динамики среды, опирающийся на свойства функции маркера θ . Суть метода

состоит в том, чтобы используя свойства маркеров, найти подходящий вид поля скорости $v(x, t)$, как функции от θ и ее производных, такой, что объемные силы, действующие на среду, приобретают нужную форму. Именно тип действующих сил и определяет характер модели. Такой подход меняет общий взгляд на возможности анализа, нелинейных по своей сути, уравнений гидродинамики. Как подсказывает интуиция, попытка построить решение гидродинамической задачи с помощью какой-либо суперпозиции поля, заранее обречена на провал, поскольку уравнения гидродинамики нелинейны. Однако рассматриваемый подход демонстрирует существование особого типа суперпозиции в гидродинамике, а именно возможность разложить поле скорости на отдельные аддитивные составляющие, отвечающие за различающиеся по физической сущности объемные силы, которые, как правило, обладают свойством суперпозиции в соответствии с теорией тяготения Ньютона.

В качестве простого примера рассмотрим еще одно формальное тождество (кроме (166)), которое получается из уравнения переноса маркера. Дифференцируя уравнение неразрывности (166), находим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta_x + u\frac{\partial}{\partial x}\theta_x = -u_x\theta_x, \quad (168)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}\ln\theta_x + u\frac{\partial}{\partial x}\ln\theta_x = -u_x. \quad (169)$$

Важным является то, что эти тождества выглядят как результат действия оператора переноса:

$$\hat{L} = \frac{\partial}{\partial t} + v(x, t)\frac{\partial}{\partial x} \quad (170)$$

на некоторые функции, связанные с маркером.

Продифференцируем теперь тождество (169) еще раз по x . Следствием является следующее тождество:

$$\hat{L}\frac{\partial\ln\theta_x}{\partial x} = -u_{xx} - u_x\ln\theta_x = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x), \quad (171)$$

где $\rho = \theta_x$. Рассмотрим теперь в качестве поля скорости следующую функцию:

$$u = U(\theta) - \nu\frac{\partial}{\partial x}\ln\theta_x. \quad (172)$$

В этом случае уравнение для поля скорости с учетом имеющихся тождеств принимает вид уравнения Навье-Стокса для инерциального течения вязкого неоднородного газа с коэффициентом кинематической вязкости ν и динамической вязкости $\mu = \nu\rho$:

$$\hat{L}u = u_t + uu_x = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}(\nu\rho u_x). \quad (173)$$

Решение этого уравнения строится на основе решений уравнения теплопроводности следующего вида:

$$\theta_t + U(\theta)\theta_x = \nu\theta_{xx}. \quad (174)$$

В этом уравнении $U(\theta)$ - произвольная дифференцируемая функция маркера. Начальное условие для θ и выбор функции $U(\theta)$ определяют решение начальной задачи с заданным начальным распределением и скорости, и плотности среды. Однако уравнение (174) интегрируется полностью только в случае, если:

$$U(\theta) = U_0 + U_1\theta, \quad (175)$$

где U_0 и U_1 - произвольные вещественные постоянные. Выбор (175) сводит задачу в случае $F_1 \neq 0$ к уравнению Бюргерса [2], решение которого строится с помощью подстановки Коула-Хопфа:

$$\theta = -2\nu \frac{\partial}{\partial x} \ln \phi,$$

как это было описано в [24, 25, 35]. Здесь $\phi(x, t)$ - вспомогательная функция, которая удовлетворяет уравнению теплопроводности:

$$\phi_t + U_0\phi + U_1\phi_x = \nu\phi_{xx}. \quad (176)$$

При этом:

$$u(x, t) = U_0 - 2\nu U_1 \frac{\partial}{\partial x} \ln \phi - \nu \frac{\partial}{\partial x} \left(\ln \left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \phi \right| \right), \quad \rho(x, t) = -2\nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \phi. \quad (177)$$

Уравнение (173) по форме не очень сильно отличается от уравнения Бюргерса, но оно включено в более приемлемую, с точки зрения гидродинамики, систему, содержащую уравнение неразрывности (166). Поэтому подстановка (177) оказывается более сложной, чем подстановка Коула-Хопфа, сводящая уравнение Бюргерса к тому же уравнению теплопроводности.

27 Течения самогравитирующей пыли. Общая формулировка задачи

Развитый метод можно использовать для решения более широкого круга задач, в частности, для решения задач динамики самогравитирующей пыли. Метод был предложен в работах [40, 18]. В этом случае к уравнениям гидродинамики необходимо добавить уравнение

Пуассона для потенциала поля тяготения, созданного самой пылью. Самосогласованная система уравнений имеет следующий вид:

$$u_t + uu_x = -\phi_x, \quad \rho_t + \frac{1}{x^n} \frac{\partial}{\partial x} (x^n u \rho) = 0, \quad (178)$$

$$\frac{1}{x^n} \frac{\partial}{\partial x} (x^n \phi_x) = 4\pi G \rho. \quad (179)$$

Уравнения (178) - уравнения Эйлера, уравнение (179) - уравнение Пуассона. Уравнение состояния пыли эквивалентно требованию равенства давления нулю, поэтому силы Архимеда в данной системе нет. Здесь $\phi(x, t)$ - потенциал гравитационного поля, G - постоянная тяготения Ньютона, а целое число $n = 0, 1, 2$ - соответствует координатной размерности задачи $d = n + 1$. В случае $n = 0$ - это задача с плоской симметрией, $n = 1$ - задача с цилиндрической симметрией, а в случае с $n = 2$ - сферической.

Физическая постановка задач, связанных с системой (178)-(179), состоит в описании процесса формирования плотных компактных объектов из рассеянных скоплений пыли под действием собственного поля тяготения. Поскольку процесс формирования плотных объектов из пыли происходит без силы Архимеда, то он практически всегда [30] заканчивается образованием сингулярности в распределении плотности. Одним из важных параметров этого процесса является время образования сингулярности из начального состояния. Также образование различного типа волн, в том числе ударных, в процессе формирования плотного объекта, которые могут возникать при ненулевых начальных распределениях поля скорости. Для решения этих задач мы и воспользуемся методом гидродинамических подстановок.

28 Задача с плоской симметрией

Построение решения начнем со случая $n = 0$. Подставляя (167) в (179) и затем интегрируя по x , получаем уравнение следующего вида:

$$\phi_x = g_0(t) + 4\pi G \theta. \quad (180)$$

Здесь $g_0(t)$ - постоянная интегрирования по x , характеризующая фактически ускорение системы отсчета. Теперь подставляя это соотношение в первое уравнение (178), преобразуем его к следующему виду:

$$u_t + uu_x = -4\pi G \theta - g_0(t). \quad (181)$$

Суть этого соотношения состоит в том, что гидродинамическим маркером одномерного самогравитирующего течения пыли является ускорение свободного падения $g = \phi_x$ (при

$g_0(t) = 0$). Это означает, что все точки пыли сохраняют при своем движении ту величину ускорения свободного падения, которая существовала в начальный момент времени. Этот результат, кажущийся достаточно случайным, является, на самом деле, общим свойством самогравитирующих структур без давления. Обобщение этого вывода мы рассмотрим далее.

Решение для поля скорости будем искать в следующем общем виде:

$$u(x, t) = U(\theta) + h(t)\theta + v_0(t). \quad (182)$$

Действуя на эту функцию оператором переноса \hat{L} , находим:

$$\hat{L}u = \theta\dot{h} + \dot{v}_0(t).$$

Сравнивая это соотношение с (181), получаем:

$$h(t) = -4\pi Gt + h_0, \quad \dot{v}_0 = -g_0(t). \quad (183)$$

Таким образом, решения исходной системы уравнений строятся, исходя из решений уравнения для маркера:

$$\theta_t + \left(U(\theta) + (-4\pi Gt + h_0)\theta + v_0(t) \right) \theta_x = 0. \quad (184)$$

Это уравнение имеет неявное решение:

$$\theta = H\left(x - U(\theta)t + (2\pi Gt^2 - h_0t)\theta - x_0(t) \right). \quad (185)$$

Здесь $H(\xi)$ - произвольная дифференцируемая функция аргумента:

$$\xi = x - U(\theta)t + (2\pi Gt^2 - h_0t)\theta - x_0(t), \quad x_0(t) = \int v_0(t)dt.$$

Функция $H(\xi)$ определяется начальным распределением маркера в пространстве:

$$\theta(x, 0) = H\left(x - x_0(0) \right).$$

которое связано с начальным распределением массы:

$$\rho(x, 0) = \theta_x|_{t=0} = H'\left(x - x_0(0) \right).$$

Начальное распределение скорости задается функцией $U(\theta)$:

$$u(x, 0) = U\left(\theta(x, 0) \right) + h_0\theta(x, 0) + v_0(0).$$

Заметим, что масса среды, сосредоточенная в интервале координат $[x_1, x_2]$, определяется разностью значений маркера:

$$M_{[x_1, x_2]}(t) = \int_{x_1}^{x_2} \theta_x dx = \theta(x_2, t) - \theta(x_1, t) \quad (186)$$

Важной характеристикой распределения масс является полная масса среды:

$$M_0 = \theta(\infty, t) - \theta(-\infty, t).$$

Для астрофизических приложений необходимо рассматривать такие распределения массы в пространстве, для которых полная масса пыли должна оставаться конечной и постоянной во времени в случае бесконечного интервала $[x_1, x_2]$. Последнее условие означает, что нет самопроизвольного притока или оттока массы в систему, что обеспечивается в силу выполнения уравнения неразрывности нулевыми значениями скорости потока на бесконечности: $u(\infty, t) = u(-\infty, t) = 0$. Отсутствие среднего перемещения центра масс всей системы в пространстве должно соответствовать условию:

$$V_0 = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} x \rho dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \rho_t dx = - \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{\partial}{\partial x} (u \rho) dx = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) \rho dx = 0. \quad (187)$$

Решение для θ (185) допускает возникновение сингулярностей в распределении массы за конечное время. Момент образования сингулярности определяется, как и в случае определения момента опрокидывания простой волны, первым моментом появления точки (x_*, t_*) , в которой плотность обращается в бесконечность: $\rho(x_*, t_*) = \infty$. Этот момент определяется с помощью вычисления производной θ_x из общего решения (185). Имеем:

$$\theta_x = H'(\xi) \left(1 - U'(\theta) \theta_x + (2\pi G t^2 - h_0 t) \theta_x \right),$$

Отсюда находим:

$$\rho = \theta_x = \frac{H'(\xi)}{1 + H'(\xi)[U'(\theta) - (2\pi G t^2 - h_0 t)]}. \quad (188)$$

Первый момент образования сингулярности определяется из условия обращения знаменателя этого соотношения в ноль. Для иллюстрации выводов общего анализа приведем несколько примеров (частично приведенных в [18]).

Наиболее простой случай соответствует классической задаче Джинса, когда начальные распределения плотности и скорости однородны: $\rho(x, 0) = \rho_0 = \text{const}$, $u(x, 0) = 0$. Выбор однородного значения скорости, равного нулю, лишь фиксирует выбор определенной

системы отсчета. Однородное же распределение массы соответствует бесконечной суммарной массе на бесконечном пространственном интервале. При таких начальных условиях имеем:

$$U(\theta) \equiv 0, \quad \theta(x, 0) = \alpha x + \theta_0, \quad H(\xi) = \alpha \xi + \theta_0 + x_0(0),$$

где α и θ_0 - вещественные постоянные. В этом случае решение имеет следующий вид:

$$\theta = \alpha \left(x + (2\pi G t^2 - h_0 t) \theta - x_0(t) \right) + \theta_0 + x_0(0).$$

Отсюда находим:

$$\theta = \frac{\alpha(x - x_0(t)) + x_0(0) + \theta_0}{1 - 2\pi G t^2 + h_0 t}.$$

Это решение демонстрирует конечный результат эволюции однородного распределения плотности. Оставаясь со временем однородным распределением, плотность за конечное время $t_* = 1/\sqrt{2\pi G}$ в каждой точке пространства одновременно обращается в бесконечность. Этот результат можно рассматривать как вариант парадокса Неймана-Зелигера [44] для плоско-симметричного распределения материи.

Более физически значимый пример можно получить, рассматривая следующее начальное распределение плотности типа распределения Лоренца:

$$\rho(x, 0) = \frac{\rho_0}{1 + x^2/a^2}, \quad (189)$$

где $a = \text{const}$ - параметр, характеризующий ширину начального распределения Лоренца. Масса такого распределения конечна:

$$M_0 = \rho_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2/a^2} = \pi \rho_0 a.$$

Функция $H(\xi)$ при таком начальном распределении имеет такой вид:

$$\theta(x, 0) = H(x - x_0(0)) = \int_0^x \rho(y, 0) dy = \rho_0 a \arctg(x/a).$$

Начальное распределение скорости выберем, как и в простейшем случае, однородным с нулевым значением во всем пространстве. В силу этого $U(\theta) = 0$. Решение для θ теперь находится из решения уравнения:

$$\theta = \rho_0 a \arctg \left(x/a + 2\pi G t^2 \theta/a \right).$$

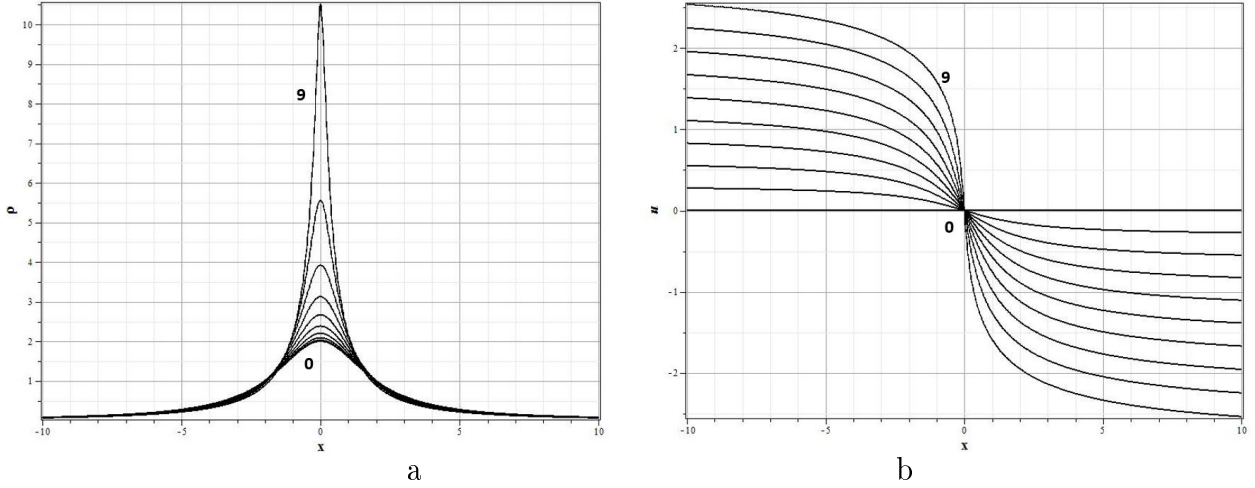


Рис. 1: Эволюция плотности (а) и скорости потока (б) для начальных распределений (189), $0 - t = 0, 9 - t = 0.9$ (с шагом $\Delta t = 0.1$)

Здесь полагалось $x_0(t) = 0$ и $h_0 = 0$. После отыскания решения для θ , решения для $\rho(x, t)$ и $u(x, t)$ вычисляются с помощью соотношений:

$$\rho(x, t) = \frac{\rho_0}{1 + \left(\frac{x + 2\pi G t^2 \theta}{a} \right)^2 - \rho_0 2\pi G t^2},$$

$$u(x, t) = -t\theta(x, t) = -t\rho_0 a \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{x/a + 2\pi G t^2 \theta/a}{a} \right).$$

Графики эволюции плотности и скорости для случая нулевого начального распределения скорости: $u(x, 0) = 0$, приведены на рис. 1(а,б).

Еще один пример построения решения для системы с плоской симметрией для $u(x, 0) = 0$ приведены на рис. (2)(а,б). Этот пример соответствует начальному распределению плотности в виде двух локальных флуктуаций:

$$\rho(x, 0) = \frac{\rho_0}{1 + (x - b)^2/a^2} + \frac{\rho_0}{1 + (x + b)^2/a^2}, \quad u(x, 0) = 0 \quad (190)$$

для следующих значений параметров: $a = 1, b = 3, \rho_0 \pi = 1$. Соответствующее выражение для начального распределения маркера имеет следующий вид:

$$\theta(x, 0) = H(x - x_0(0)) = \rho_0 a \left(\operatorname{arctg}((x - b)/a) + \operatorname{arctg}((x + b)/a) \right).$$

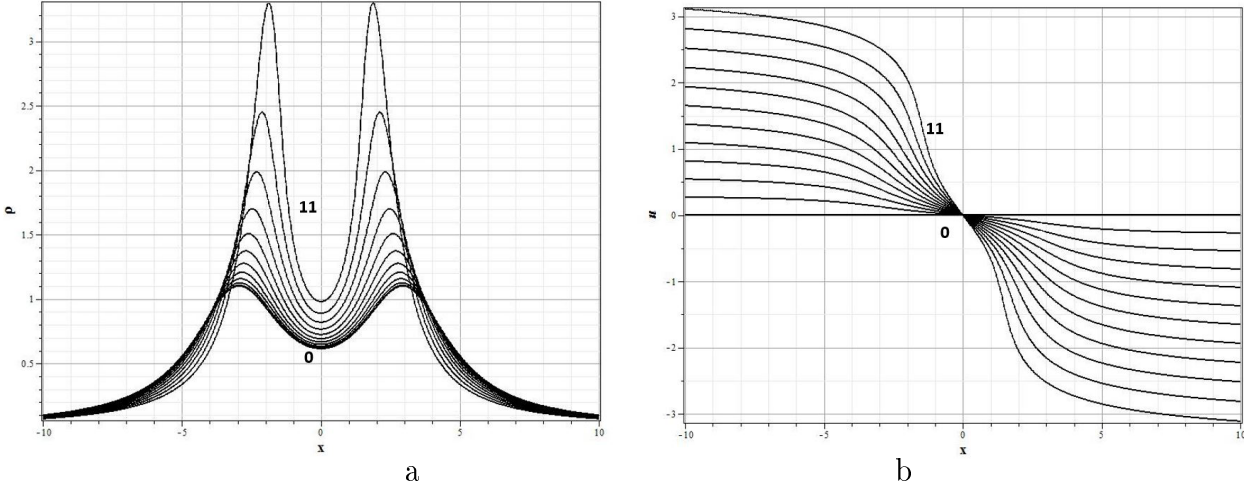


Рис. 2: Эволюция плотности (а) и скорости потока (б) для начальных распределений (190), $0 - t = 0$, $11 - t = 1.1$ (с шагом $\Delta t = 0.1$)

Графики демонстрируют сближение на изображенном начальном отрезке времени двух флуктуаций за счет их гравитационного притяжения. При этом в максимуме каждой из флуктуаций формируются сингулярности (в конце изображенного отрезка времени), возникающие до момента их слияния.

Вариант начальной эволюции распределения для начального распределения скорости:

$$u(x, 0) = -8\theta_0(x)(\theta_0^2(x) - \pi/2) \quad (191)$$

и начального распределения плотности (189). Такой выбор начального распределения скорости соответствует выбору функции $U(\theta) = -\theta(\theta^2 - \pi/2)$. На рис. 3(a,b) приведены графики эволюции распределения плотности, а на 3(c) скорости для указанных начальных распределений скорости и плотности. Рисунок 3(b) представляет увеличенное изображение графиков на 3(a) для более детального представления о формировании ударной волны плотности. В начальный момент времени вблизи начала координат, где находится максимум плотности, имеются максимумы поля скорости с направлением от начала координат. На изображенном начальном отрезке времени масса уносится потоком от максимума плотности, так что значение плотности в начале координат убывает. При этом на некотором расстоянии от начала координат формируются две ударных волны. При дальнейшей эволюции (за пределами изображенного отрезка времени) ударные волны останавливаются, а затем начинают двигаться симметрично к началу координат, так что через конечный

отрезок времени в центре формируется единственная сингулярность.

29 Космологические модели

29.1 Однородный поток Хаббла

Среди интегрируемых с помощью развитого метода моделей, интерес представляет задача о космологическом расширении в случае пространственно-плоской Вселенной в рамках классической механики [46, 47]. Для построения соответствующего решения рассмотрим в сферическом случае подстановку для поля скорости следующего вида:

$$u(x, t) = H(t)x, \quad (192)$$

где $H(t)$ - некоторая функция времени. Соотношение (192) представляет собой закон Хаббла космологического расширения [44, 31, 47], в котором функция $H(t)$ называется параметром Хаббла. Вычисляя действие оператора \hat{L} на $u(x, t)$, находим:

$$\hat{L}u = u_t + uu_x = \dot{H}x + H(t)u = (\dot{H} + H^2)x. \quad (193)$$

Используя (192), для функции маркера получаем следующее уравнение:

$$\theta_t + H(t)x\theta_x = 0. \quad (194)$$

Решение этого уравнения имеет следующий общий вид:

$$\theta = T\left(x/a(t)\right), \quad (195)$$

где $T(\xi)$ - произвольная дифференцируемая функция, $a(t)$ - функция, называемая в космологии масштабным фактором:

$$H(t) = \dot{a}/a.$$

Отсюда находим распределение плотности среды в пространстве:

$$\rho = \frac{1}{x^2}\theta_x = \frac{1}{x^2 a(t)}T'(x/a). \quad (196)$$

С другой стороны, ускорение свободного падения имеет следующий вид:

$$\phi_x = 4\pi G \frac{1}{x^2}T(x/a) \quad (197)$$

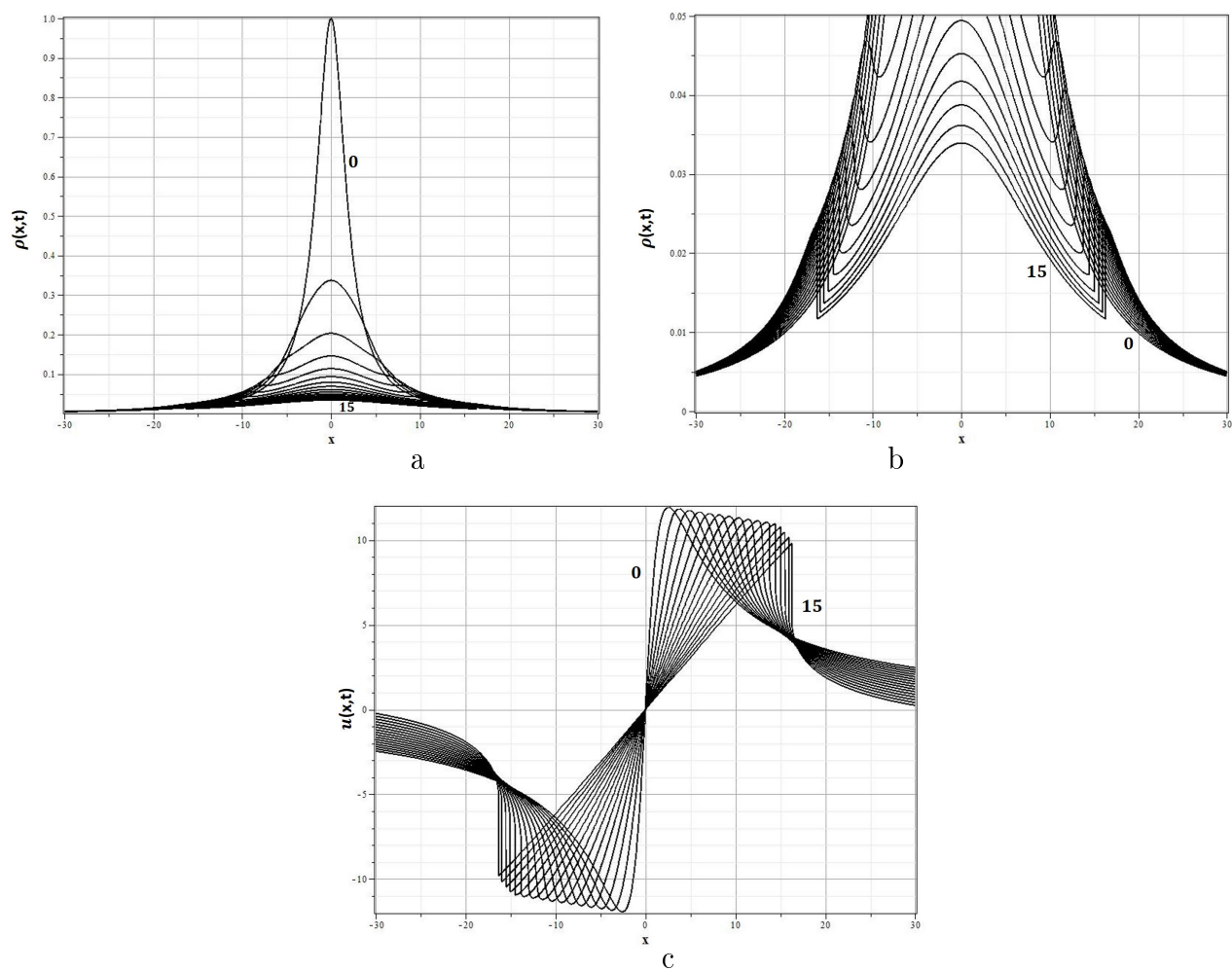


Рис. 3: Эволюция плотности (a,b) и скорости потока (c) для начальных распределений (191), 0 - $t = 0$, 15 - $t = 1.5$ (с шагом $\Delta t = 0.1$)

Для того, чтобы это выражение совпадало с правой частью уравнения Эйлера (193), достаточно выбрать функцию $T(x/a)$ в следующем виде:

$$T(\xi) = \alpha \xi^3.$$

В результате:

$$u_t + uu_x = (\dot{H} + H^2)x = -4\pi G \frac{x}{a^3} \alpha.$$

Из этого соотношения находим уравнение для масштабного фактора:

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{4\pi G \alpha}{a^3}. \quad (198)$$

Распределение плотности в пространстве в этом случае однородно и имеет вид:

$$\rho = \frac{3\alpha}{a^3(t)}. \quad (199)$$

Отсюда видно, что постоянная $4\pi\alpha$ представляет собой массу материи внутри сферы радиуса $a(t)$, которая остается постоянной в процессе расширения ($H > 0$) или сжатия $H < 0$ пыли.

Уравнение (198) можно переписать в стандартной форме относительно масштабного фактора:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G \alpha}{a^2}, \quad (200)$$

что соответствует классической модели космологического расширения [31]. Это уравнение интегрируется в квадратурах. Именно, первый интеграл движения для (200) имеет такой вид:

$$\frac{\dot{a}^2}{2} = E + \frac{4\pi G \alpha}{a}, \quad (201)$$

Здесь E - постоянная интегрирования. В результате, решение можно записать в виде неявной функции:

$$\begin{aligned} & 4\sqrt{E}\sqrt{a(2Ea + \mu)} + \ln(4\sqrt{E}) - \sqrt{2}\mu \ln\left(4\sqrt{2}Ea + \sqrt{2}\mu + 4\sqrt{E}\sqrt{a(2Ea + \mu)}\right) = \\ & = 8E^{3/2}(t - T), \end{aligned} \quad (202)$$

где T - вторая постоянная интегрирования, а $\mu = 8\pi G \alpha$. Построенное решение, по своей сути, эквивалентно классическим решениям, рассмотренным в [46, 47], но с тем отличием, что оно сформулировано в терминах гидродинамики, а не в терминах динамики сферы конечного радиуса. Это дает преимущества по отношению к возможности сформулировать и решить данную задачу в более общем виде.

29.2 Неоднородный поток Хаббла

Рассмотрим теперь обобщение задачи Хаббла, предполагая, что параметр Хаббла может зависеть от точки среды, т.е. для каждой отдельной галактики он может иметь в текущий момент времени свое собственное значение. Это означает, что в момент начального космологического “взрыва” каждая из материальных точек (по сути - галактик) могла получить свой собственный импульс в зависимости, например, от ее массы. Такое предположение представляется более правдоподобным, чем предположение для случая однородного потока Хаббла, в котором начальные скорости определяются исключительно расстоянием от центра “взрыва” сразу после выхода Вселенной из космологической сингулярности.

Для реализации такой идеи вместо (192) рассмотрим поток следующего вида:

$$u(x, t) = H(t, \theta)x, \quad (203)$$

где $H(t, \theta)$ - параметр Хаббла, зависящий от значения маркера θ неопределенным пока способом. Вычисляя действие оператора \hat{L} на $u(x, t)$, находим:

$$\hat{L}u = u_t + uu_x = \dot{H}x + H(t, \theta)u = (\dot{H} + H^2)x, \quad (204)$$

здесь и далее \dot{H} - частная производная по t . Используя (203), для маркера получаем следующее уравнение:

$$\theta_t + H(t, \theta)x\theta_x = 0. \quad (205)$$

Это уравнение, как и раньше, преобразуется к уравнению Хопфа и, следовательно, его общее решение можно записать в виде:

$$\theta = \Theta(\chi), \quad \chi = \frac{x}{A(t, \theta)}, \quad (206)$$

с произвольной функцией $\Theta(\chi)$

$$A(t, \theta) = A_0(\theta) \exp \left(\int_C H(t, \theta) dt \right), \quad (207)$$

где интеграл берется по времени t вдоль характеристик C , на которых θ постоянно, а $A_0(\theta)$ - постоянная интегрирования по t .

Для того, чтобы неоднородный поток Хаббла соответствовал потенциалу поля тяготения, должно выполняться соотношение:

$$\phi_x = \frac{4\pi G}{x^2}\theta(x, t) = -(\dot{H} + H^2)x. \quad (208)$$

Как и в случае однородного потока Хаббла для того, чтобы это уравнение разрешалось, достаточно произвольную пока функцию $\Theta(\chi)$ выбрать следующим образом:

$$\Theta = \alpha\chi^3.$$

В результате, для функции $H(t, \theta)$ получаем следующее уравнение:

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{4\pi G\alpha}{A^3}. \quad (209)$$

Поскольку в это уравнение функция θ не входит явно, то это уравнение можно решать также, как и в случае однородного потока, но постоянные интегрирования по времени при этом могут быть произвольными функциями θ . Следовательно, решение для $A(t, \theta)$ будет иметь тот же вид, что и (202), но с тем отличием, что в нем следует считать постоянные E и T произвольными функциями θ : $E = E(\theta)$ и $T = T(\theta)$.

В отличие от однородного потока, теперь распределение плотности материи (галактик) в пространстве и времени будет неоднородным и его следует вычислять, исходя из уравнения:

$$\rho = \frac{\theta_x}{x^2} = \frac{3\alpha A}{A^4 + 3\alpha x^3 A_\theta}, \quad A_\theta = \frac{\partial A(t, \theta)}{\partial \theta}. \quad (210)$$

Это распределение зависит от выбранной зависимости решения $A(t, \theta)$ уравнения (209) от θ . В это соотношение следует подставлять решение из (202) с заданными из начальных условий значениями функций $E(\theta)$ и $T(\theta)$. Смысл полученного решения состоит в том, что в случае неоднородного закона Хаббла в некоторый момент времени можно каждой отдельной галактике приписать определенную скорость космологического “разбегания” относительно наблюдателя. После этого можно построить модель того, как Вселенная будет расширяться далее.

Полный анализ возможных космологических решений, соответствующих (210), выходит за рамки данной лекции. Сделаем лишь некоторые общие замечания, вытекающие из общих свойств функции ρ . Если $A(t, \theta)$, как функция x , ограничена при $x \rightarrow \infty$, то в этом пределе плотность стремится к нулю. Отсюда следует, что плотность на больших масштабах может быть нулевой, т.е. распределение материи в такой модели носит островной характер. Плотность же на малых расстояниях от наблюдателя, когда $x \simeq 0$, будет, примерно, такой же, что и в случае однородного потока Хаббла.

30 Зарядовые волны в вакууме

Задача о токе в диоде, возникающем под действием разности потенциалов на электродах (между анодом и катодом), является классической задачей теории волн зарядовой

плотности и электронных пучков [48, 1]. Эта задача возникла при описании тока в вакуумных электронно-лучевых приборах, например, лампах, но имеет гораздо большую область применения. Основной проблемой, связанной с описанием тока в диоде, является учет влияния распределенного заряда, движущегося между электродами. Наличие областей с максимумом концентрации распределенного заряда в области движения заряженных частиц называют часто виртуальным катодом. Появление виртуального катода ограничивает ток в диоде (предел Чайлда-Ленгмюра), что приводит к специфическому изменению вольт-амперной характеристики диода. Одним из способов описания явлений, происходящих в таких приборах, является подход, основанный на гидродинамической модели движения заряженной жидкости, находящейся во внешнем и собственном электрическом поле [5, 28]. Для анализа всех особенностей явлений образования виртуального катода желательно иметь точные решения самосогласованной задачи, которая проанализирована в настоящее время лишь в стационарном случае [5, 28]. В данном исследовании для решения системы уравнений динамики волн зарядовой плотности в диоде используется метод гидродинамических подстановок, изложенный в работе [40] и использованный для решения задачи о динамике самогравитирующей пылевой среды [17]. Этот метод восходит к теории обобщенных подстановок Коула-Хопфа [11, 16, 17] и модифицирован специально для решения гидродинамических задач с переменной плотностью. В настоящей работе строятся точные решения общего вида в задаче о волнах зарядовой плотности в вакуумном диоде и на некоторых простых примерах анализируются основные выводы из этой теории.

30.1 Поток заряженных частиц в вакууме

Рассмотрим одномерную модель диода, в котором под действием разности потенциалов ϕ_1 на двух ограничивающих электродах существует ток с плотностью $j = qnv$, где $n(x, t)$ – концентрация частиц, имеющих заряд q и массу m , так что $\rho_e = qn(x, t)$ – плотность заряда, а $\rho_m = mn(x, t)$ – плотность массы. Величина $v(x, t)$ – скорость частиц. Потенциал $\phi = \phi(x, t)$ меняется непрерывно между электродами от значения $\phi(0, t) = 0$ на одном электроде до значения $\phi(d, t) = \phi_1(t)$ на другом. Величина d – расстояние между электродами. Систему уравнений, которая описывает динамику возникающего токопереноса, можно представить в виде трех уравнений (см. [5]):

$$n_t + (nv)_x = 0, \tag{211}$$

$$v_t + vv_x = -\frac{q}{m}\phi_x, \tag{212}$$

$$\phi_{xx} = -4\pi qn. \tag{213}$$

Первое уравнение представляет собой закон сохранения заряда, второе – уравнение Эйлера течения идеальной заряженной жидкости, третье – уравнение Пуассона для потенциала электрического поля, созданного распределенным в пространстве зарядом. Граничные условия для тока в области переноса имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\phi(0, t) &= 0, & \phi(d, t) &= \phi_1(t), \\ v(0, t) &= v_0(t), & n(0, t) &= n_0(t).\end{aligned}$$

В качестве начальных условий следует задавать начальные распределения в пространстве плотности заряда $n(x, 0) = N_0(x)$ и скорости $v(x, 0) = U_0(x)$.

Для построения решений (211)-(213) вновь воспользуемся методом гидродинамических подстановок, опираясь на уравнение переноса маркера (165), а также на следствия из него. Как и в случае самогравитирующей пыли, следующий шаг построения решения состоит в интегрировании уравнения Пуассона (213). Используя подстановку $n = \theta_x$ и интегрируя (213), находим:

$$\phi_x = -4\pi q\theta - e_0(t), \quad (214)$$

где $e_0(t)$ – функция t , связанная с начальными условиями. Используя последнее соотношение, для скорости потока v получаем уравнение:

$$v_t + vv_x = \gamma\theta + g_0(t). \quad (215)$$

Здесь $\gamma = 4\pi q^2/m$ и $g_0(t) = (q/m)e_0(t)$. Будем искать решение для v в виде:

$$v(x, t) = V(\theta) + \gamma t\theta + u_0(t). \quad (216)$$

Подставляя это соотношение в левую часть (215) и учитывая то, что функция θ по определению связана с v соотношением (165), получаем:

$$v_t + vv_x = (V'(\theta) + \gamma t)(\theta_t + v\theta_x) + \gamma\theta + \dot{u}_0 = \gamma\theta + \dot{u}_0.$$

В результате уравнение (215) обращается в тождество при условии $g_0(t) = \dot{u}_0$. Используя теперь связь (165), приходим к уравнению для функции θ :

$$\theta_t + (V(\theta) + \gamma t\theta + u_0(t))\theta_x = 0. \quad (217)$$

30.2 Анализ решений

Уравнение (217) представляет собой вариант гиперболического уравнения Хопфа, общий интеграл которого задается с помощью следующего алгебраического уравнения:

$$h(\theta, x - V(\theta)t - \gamma t^2\theta/2 - x_0(t)) = 0, \quad (218)$$

где $h(\xi, \eta)$ – произвольная дифференцируемая функция двух аргументов $\xi = \theta(x, t)$ и $\eta = x - V(\theta)t - \gamma t^2 \theta / 2 - x_0(t)$, $\dot{x}_0(t) = u_0(t)$. Дифференцируя (218) по x и t , приходим к двум уравнениям:

$$\begin{aligned} h_\xi \theta_x + h_\eta \left(1 - V'(\theta) \theta_x - \gamma t^2 \theta_x / 2 \right) &= 0, \\ h_\xi \theta_t + h_\eta \left(-V'(\theta) \theta_t - \gamma t^2 \theta_t / 2 - V(\theta) - \gamma t \theta - \dot{x}_0 \right) &= 0. \end{aligned}$$

Исключая из этих уравнений необращающиеся тождественно в ноль производные h_ξ и h_η , приходим к уравнению (217) и условию $\dot{x}_0(t) = u_0(t)$. Функцию $x_0(t)$ будем называть смещением потока заряженных частиц.

Уравнение (218) без ограничения общности удобно представить в следующем виде:

$$\theta = H \left(x - V(\theta)t - \gamma t^2 \theta / 2 - x_0(t) \right). \quad (219)$$

Вид функции $H(\eta)$ задается начальным распределением функции θ :

$$\theta(x, 0) = H(x - x_0(0)),$$

что, в свою очередь, определяется начальным распределением концентрации частиц:

$$n(x, 0) = \theta_x|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial x} H(x - x_0(0)).$$

При этом начальное распределение скорости определяет вид функции $V(\theta)$, исходя из соотношения:

$$v(x, 0) = V \left(\theta(x, 0) \right) + \dot{x}_0(0).$$

Распределение потенциала в начальный момент времени определяется распределением плотности заряда:

$$\phi(x, 0) = -4\pi q \int_0^x \theta(x, 0) dx - \frac{m}{q} \ddot{x}_0(0)x + \phi_0(0). \quad (220)$$

Таким образом, мы получаем полное решение задачи с начальными условиями (задача Коши).

30.3 Решение начальной задачи

Вычислим теперь значение потенциала на границах области, т.е. в точках $x = 0$ и $x = d$.
Имеем:

$$\begin{aligned}\phi(0, t) &= 0 = \phi_0(t), \\ \phi(d, t) &= -4\pi q \int_0^d \theta(x, t) dx - \frac{m}{q} \ddot{x}_0(t) d = \phi_1(t).\end{aligned}$$

Из последнего соотношения находим:

$$\ddot{x}_0(t) = -\frac{q}{md} \phi_1(t) - \frac{\gamma}{d} \int_0^d \theta(x, t) dx. \quad (221)$$

и, в конечном итоге, это уравнение определяет ток в точке $x = d$:

$$\begin{aligned}j_1(t) &= qn(d, t)v(d, t) = \\ &= q\theta_x(d, t) \left(V(\theta(d, t)) + \gamma t \theta(d, t) + \dot{x}_0(t) \right).\end{aligned}$$

Зависимость $j_1 = j_1(\phi_1)$ определяет вид вольт-амперной характеристики диода, что является наиболее важным приложением модели, описываемой уравнениями (211)-(213).

Для анализа уравнения (221) необходимо иметь общее представление для интеграла в его правой части. Его можно получить, предполагая выполнение некоторых упрощающих условий. В качестве такого условия рассмотрим требование, что в начальный момент все заряженные частицы обладают во всем пространстве одинаковой скоростью, т.е.

$$v_0(x, 0) = W_0 = \text{const.}$$

Из этого условия следует: $V(\theta) = 0$. Тогда начальное распределение функции θ , определяемое плотностью заряда, задается одной функцией $\theta(x, 0) = H(x - x_0(0))$. В этом случае удобно интеграл движения (219) переписать в следующем виде:

$$x - x_0(t) - \gamma t^2 \theta / 2 = F(\theta),$$

где $F(\theta)$ – функция обратная $H(\eta)$. Дифференцируя это соотношение по x , после несложных преобразований находим:

$$n = \theta_x = \frac{1}{F'(\theta) + \gamma t^2 / 2}. \quad (222)$$

Из этого соотношения сразу следует, что для начальных распределений параметров в рассматриваемой системе не происходит опрокидывания фронта волны зарядовой плотности. Момент опрокидывания t_* и координата x_* возникновения разрыва фронта определяются как первый момент времени и координата, в которых происходит обращение в ноль знаменателя соотношения (222). Если $F'(\theta) > 0$ при всех допустимых θ , то опрокидывания фронта не возникает. Учитывая, что концентрация частиц является всюду неотрицательной функцией, находим, что знаменатель в (222) также является неотрицательным и, следовательно: $F'(\theta(x, t)) \geq -\gamma t_*^2/2$. Возникновение же многозначности решения обязательно связано с изменением знака знаменателя в (222), что не имеет в рамках данной задачи физического смысла.

Используя теперь решение (222), получаем представление для интересующего нас интеграла:

$$\begin{aligned} \int_0^d \theta(x, t) dx &= \int_0^d (F'(\theta) + \gamma t^2/2) \theta(x, t) \theta_x dx = \\ &= \int_{\theta(0, t)}^{\theta(d, t)} (F'(\theta) + \gamma t^2/2) \theta(x, t) d\theta = \\ &= Q(\theta(d, t)) - Q(\theta(0, t)) + \gamma t^2 (\theta^2(d, t) - \theta^2(0, t))/4. \end{aligned}$$

Здесь $Q(\theta) = \int F'(\theta) \theta d\theta = F(\theta) \theta - \int F(\theta) d\theta$. Таким образом, уравнение для $x_0(t)$ теперь можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0(t) &= -\frac{q}{md} \phi_1(t) - \\ &- \frac{\gamma}{d} \left[Q(\theta(d, t)) - Q(\theta(0, t)) + t^2 \frac{\gamma}{4} (\theta^2(d, t) - \theta^2(0, t)) \right]. \end{aligned} \tag{223}$$

Список литературы

Литература

- [1] Бурсиан В., Павлов В. Журнал Русского физ. общества, **55**, N1-3, 71 (1923)
- [2] J.M.Burgers. The nonlinear diffusion equation. Dordrecht, Holland: D. Reidel Publisher Company, 1974
- [3] Бхатнагар П. **Нелинейные волны в одномерных дисперсных системах.** М.:Мир, (1983), 135 с.
- [4] Додд Р.,Эйлбек Дж.,Гиббон Дж.,Моррио Х. *Солитоны и нелинейные волновые уравнения.* М.:Мир,1988,с.694.
- [5] А.Е. Дубинов, И.А. Ефимова, И.Ю. Корнилова, С.К. Сайков, В.Д. Селемир. ФЭЧАЯ, 35, N2, 462 (2004)
- [6] А.Е. Дубинов. Вопросы атомной науки и техники. Серия: Теор. и прикл. физ. **2**, N3, (2001)
- [7] Журавлев В.М. // ТМФ, т.124, N2, с.265-278 (2000)
- [8] Журавлёв В.М. // ПММ, **58**, N6, 61 (1994).
- [9] Журавлев В.М. // Ученые записки УлГУ, сер. физическая, N 2(9), с. 3-11 (2000).
- [10] Журавлев В.М. // Известия вузов, сер. прикладная нелинейная динамика, **9**, N 6, с. 115-128 (2001)
- [11] В.М. Журавлев, А.В. Никитин. //Нелинейный мир. 2007. Т. 5. N 9. С. 603-611
- [12] В.М. Журавлев, Д.А. Зиновьев. //Письма ЖЭТФ, 2008, Т. 87, N 5.
- [13] В.М. Журавлев, Д.А. Зиновьев. //Письма ЖЭТФ, 2008, Т. 88, N 3.
- [14] В.М. Журавлев, А.В. Журавлев. //Нелинейный мир, 2009, Т. , N 10, с.

Список литературы

- [15] В.М. Журавлев, А.В.Журавлев, Д.А.Корнилов, А.В.Никитин, В.В.Самойлов. Метод обобщенных подстановок Коула-Хопфа в теории нелинейных дискретных систем. // Сб. Прикладная математика и механика, 2009, УлГТУ, Ульяновск, с. 89-103
- [16] Журавлев В.М., ТМФ, **158**, N 1, 58 (2009)
- [17] V. M. Zhuravlev and D.A.Zinov'ev. Physics of Wave Phenomena, **19**, No. 4, 313–317 (2011)
- [18] В.М.Журавлев, Д.А.Зиновьев. Интегрируемые модели динамики сжимаемой среды в собственном поле тяготения. Метод подстановок Коула – Хопфа. Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-мат. ематические науки, No.4, стр. 174-190, 2012.
- [19] В. М. Журавлев. О многомерных нелинейных уравнениях, связанных с уравнениями Лапласа и теплопроводности функциональными подстановками. Известия вузов. Поволжский регион. Серия физико-математическая. -2016.-N 4.-С. 84-101
- [20] В.М. Журавлев. Солитонные решения уравнений типа нелинейного уравнения Шеддингера и функциональные подстановки. Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. - 2018.- N 1.- С. 147-163
- [21] Б.А. Урюков. //Теплофизика и аэромеханика, 1999, Т.6, N3, С. 421-424
- [22] Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. *Теория солитонов: метод обратной задачи*. М:Наука, (1980) 319с.
- [23] Захаров В.Е., Шабат А.Б. //ЖЭТФ, **61**, 119 (1971)
- [24] E. Hopf. Comm. Pure and Appl. Math. **3**, 201230 (1950).
- [25] J.D. Cole. Quart. Appl. Math.**9**, No. 3, 225236 (1951)
- [26] С.Я. Старцев, О дифференциальных подстановках типа преобразований Миуры. ТМФ, 1999, 116:3, 336-348
- [27] С.Я. Старцев, О гиперболических уравнениях, допускающих дифференциальные подстановки, ТМФ, 2001, 127:1, 63-74
- [28] В. И. Кузнецов, А. Я. Эндер. Физика плазмы, **36**, № 3, 248–257 (2010): Физика плазмы, **36**, № 3, с. 258–272 (2010)

- [29] Lax P.D. //Comm.Pure and Appl. Math. bf 21, N5, 467-490 (1968)
- [30] А.В. Гуревич, К.П. Зыбин. Крупномасштабная структура Вселенной. Аналитическая теория.// УФН, **165**, 723–758 (1995)
- [31] К.А. Bronnikov, S.G. Rubin. Lekcii po gravitacii i kosmologii. Uchebnoe posobie. M.: Izd. MIFI, 2008.-460 p.
- [32] Liouville, J. Sur l' equation aux differences partielles: $\partial^2 \log u / 2a^2 = 0$. // J. Math., Vol. 18, pp. 71–72, 1853.
- [33] Polyanin, A. D. and Zaitsev, V. F. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, 2004
- [34] *Солитоны*. /Под ред. Р.Буллафа, Ф.Кодри. М:Мир, (1983).
- [35] Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.:Мир, 1974.
- [36] A.I.Zenchuk, P.M. Santini arXiv:0801.3945v1[nlin.SI] pp. 1-36
- [37] P.M. Santini, Inverse Problem, 1992, **8**, 285-301
- [38] Э. И. Семенов, Сибирский математический журнал, **48**, N1, 207-217, (2008)
- [39] Векуа И.Н. Основы тензорного анализа и теории ковариантов. М:Наука, (1978), 296 с.
- [40] Журавлев В.М. Сб. Инновационные технологии. Под ред. проф. С.В. Булярского. Ульяновск. Изд. УлГУ, 77 (2010)
- [41] В.М. Журавлев. Матричные функциональные подстановки для интегрируемых динамических систем и уравнения Ландау – Лифшица. Нелинейная динамика.-2014.-Т.10.-N 1.-С.35–48.
- [42] Лэмб Г. *Гидродинамика*. М:Л:Гостехиздат, (1947), 928 с
- [43] Полянин А.Д., Вязьмин А.В., Журов А.И., Казенин Д.А. *Справочник по точным решениям уравнений тепло- и массопереноса*. М: "Факториал" (1998), 367 с.
- [44] И.Д. Новиков *Эволюция Вселенной*. — М.: Наука, (1983)
- [45] Скотт Э. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. М.: Советское радио, 1977.

Список литературы

- [46] McCrea W., Milne E. // Quart. J. Math., 1934. N. 5. p. 73.
- [47] Л.М. Озерной, О.Ф. Прилуцкий, И.Л. Розенталь. Астрофизика высоких энергий. М.: Атомиздат, 1973
- [48] I. Langmuir, Physical Review, **2**, no. 6, 450 (1913).

Оглавление

1	Введение	3
2	О пользе дифференцирования	7
2.1	Поле переноса температуры	7
2.2	Поле скоростей переноса потенциалов электромагнитного поля в вакууме	8
2.3	Обобщенные подстановки типа Коула-Хопфа	10
3	Простейшая схема МФП	12
4	Примеры нелинейных интегрируемых моделей	14
4.1	Нелинейное телеграфное уравнение	14
4.2	Уравнение Лиувилля	16
4.3	Уравнения, подобные КдВ	18
4.4	Одномерное течение идеального сжимаемого газа	20
5	Дополнительные соотношения	22
6	Общая формулировка матричной версии МФП	24
7	Формализм с матрицами размерности 2×2	25
8	Вспомогательные уравнения первого порядка по координате	27
9	Уравнение типа уравнения Ландау-Лифшица	28
10	Волны в среде с квадратичной нелинейностью	29
11	Построение решений для вспомогательных уравнений первого порядка	30
12	Уравнения второго порядка по координате	31
13	Интегрируемые уравнения для матриц размерности $n = 2$	31
14	Дополнительные интегрируемые соотношения	32
15	Приведение к форме уравнения НУШ	34
16	Подстановки для многомерных уравнений	35
17	Общая формулировка метода в многомерном варианте	36
18	Простые примеры интегрируемых скалярных моделей	37
19	Матричные подстановки для многомерных уравнений	39
19.1	Задача M -волн в размерности $1+2$	40

20	Интегрируемые модели автоволн в размерности $1+2$	41
21	Нелинейное уравнение Дирака	42
22	Переход к спинорной форме записи	43
23	Интерпретация	46
24	Построение решений для нелинейного уравнения Дирака	47
25	Приложение	49
26	Общая схема гидродинамических подстановок	53
27	Течения самогравитирующей пыли. Общая формулировка задачи	55
28	Задача с плоской симметрией	56
29	Космологические модели	62
29.1	Однородный поток Хаббла	62
29.2	Неоднородный поток Хаббла	65
30	Зарядовые волны в вакууме	66
30.1	Поток заряженных частиц в вакууме	67
30.2	Анализ решений	68
30.3	Решение начальной задачи	70