ФИЗИКА

PHYSICS

УДК 51-72, 530.181, 532.51, 538.9
doi:10.21685/2072-3040-2021-2-7

Многозначные решения многомерных линейных уравнений теплопроводности и ривертоны

В. М. Журавлев[1], В. М. Морозов[2]

[1,2]Самарский национальный исследовательский университет, Самара, Россия
[1]Ульяновский государственный университет, Ульяновск, Россия
[1]zhvictorm@gmail.com, [2]aieler@rambler.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Рассматривается задача о вычислении многозначных решений одного из классов многомерных линейных уравнений параболического типа. Решения такого типа для уравнений теплопроводности в размерности $d > 2$ ранее не были известны и представляют собой важный новый элемент общих свойств решений уравнений этого типа. *Материалы и методы.* Основным методом, который используется в работе, является метод ривертонов, связанный с решениями многомерных систем квазилинейных уравнений первого порядка специального вида. Развитый ранее метод приспосабливается к задачам для уравнений теплопроводности, диффузии и других уравнений параболического типа. *Результаты.* Особое внимание уделяется двумерным и трехмерным уравнениям теплопроводности, для которых представлена полная процедура вывода решений. Для случая координатного пространства размерности большей 3 приведена общая схема построения многозначных решений. *Выводы*. Развитый подход демонстрирует наличие многозначных решений для уравнений теплопроводности в размерности координатного пространства 3 и выше, как и для уравнений гиперболического и эллиптического типов. Следовательно диффузионные процессы могут приводить к образованию разрывных структур в среде.

Ключевые слова: многозначные решения линейных многомерных параболических уравнений, квазилинейные уравнения первого порядка, ривертоны

Финансирование: работа выполнена в рамках проекта FSSS-2020-0018, финансируемого из средств государственного задания победителям конкурса научных лабораторий образовательных организаций высшего образования, подведомственных Минобрнауки России, а также при поддержке фонда РФФИ, проект: 20-02-00280.

Для цитирования: Журавлев В. М., Морозов В. М. Многозначные решения многомерных линейных уравнений теплопроводности и ривертоны // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2021. № 2. С. 90–104. doi:10.21685/2072-3040-2021-2-7

Multivalued solutions of multidimensional linear equations of heat conduction and rivertons

V.M. Zhuravlev[1], V.M. Morozov[2]

[1,2]Samara National Research University, Samara, Russia
[1]Ulyanovsk State University, Ulyanovsk, Russia
[1]zhvictorm@gmail.com, [2]aieler@rambler.ru

Abstract. *Background*. The article considers the problem of calculating multivalued solutions of multidimensional linear parabolic equations. Solutions for this type of equations of heat conductivity in dimension $d > 2$ were not previously known and represent an important new element of the general properties of this type of equations' solutions. *Materials and methods.* The main method used in this work is the riverton method, which is associated with solutions of multidimensional systems of first order quasilinear equations of a special form. The method is adapted to problems for the equations of heat conduction, diffusion, and other equations of parabolic type. *Results.* Special attention is paid to 2D and 3D equations of heat conduction, for which a complete procedure for deriving solutions is presented. For the case of a coordinate space of dimension greater than 3, a general scheme for constructing multivalued solutions is given. *Conclusions.* The developed approach demonstrates the presence of multivalued solutions for heat equations in the dimension of coordinate space 3 and higher, as well as for equations of hyperbolic and elliptic types. Consequently, diffusion processes can lead to the formation of discontinuous structures in the medium.

Keywords: multivalued solutions of linear multidimensional parabolic equations, first order quasilinear equations, rivertons

Acknowledgments: the work was performed within a project FSSS-2020-0018 and was financed from the state assignment for the winners of the scientific laboratories competition of educational institutions of higher education subordinated to the Ministry of Education and Science of the Russian Federation. The work was supported by the RFBR, project: 20-02-00280

For citation: Zhuravlev V.M., Morozov V.M. Multivalued solutions of multidimensional linear equations of heat conduction and rivertons. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2021;2:90–104. (In Russ.). doi:10.21685/2072-3040-2021-2-7

Введение

В работах [1, 2] были найдены классы решений двумерных линейных уравнений параболического типа, представляющие собой многозначные функции, удовлетворяющие одновременно и квазилинейным уравнениям первого порядка. Для линейных параболических уравнений наличие многозначных решений, в некотором смысле, представляется неожиданным, поскольку процессы диффузии и теплопереноса, описываемые этими уравнениями, относятся к классу диссипативных процессов. Ранее считалось, что образованию областей с многозначными функциями (концентраций или температуры), в которых возникают точки с бесконечными градиентами, должна препятствовать диффузионная диссипация. Однако найденные в [1, 2] многозначные решения линейных параболических уравнений в координатной размерности $d = 2$ продемонстрировали обратное. В силу общности структуры параболических уравнений с вещественным и мнимым временем, многозначные решения для $d = 2$ были перенесены и на случай квантовых систем, в частности квантового уравнения Шредингера для гармонического осциллятора [1, 2].

Исходя из важности самого факта существования многозначных решений у параболических уравнений появилась необходимость найти аналогичные многозначные решения для них в размерности $d>2$. Основная проблема состояла в том, что методы, используемые в [1, 2], были связаны принципиально с комплексными координатами на двумерной плоскости и не могли быть перенесены на случай $d>2$. Для решения этой задачи в данной работе предлагается метод ривертонов, развитый ранее в работах [3–5] для построения точных решений многозначных решений многомерных гиперболических и эллиптических уравнений, в том числе и линейных.

Метод ривертонов основан на связи между многомерными квазилинейными уравнениями первого порядка и уравнениями в частных производных второго порядка гиперболического и эллиптического типа. Основой этого подхода послужили решения специальных систем квазилинейных уравнений первого порядка, которые были названы ривертонами. В настоящей работе этот метод приспосабливается для поставленной задачи построения многозначных решений многомерных параболических уравнений. Как и в [1], решения находятся в форме функций, зависящих от одного спектрального параметра, координат и времени. Но, в отличие от [1], зависимость этих функций от координат и времени определяется теперь ривертонами, а решение поставленной задачи к системе алгебраических уравнений – параметрами ривертонов. Эта система алгебраических уравнений на параметры ривертонов имеет своим аналогом систему уравнений теории эйконала [6–8]. После вывода общей схемы вычислений в данной работе показывается, что подход, основанный на ривертонах, в случае $d=2$ эквивалентен методу, использованному в [1, 2]. После этого вычисляются решения для случая $d=3$ и указывается общая схема вычислений для $d>3$.

1. Задача о вычислении решений линейного параболического уравнения

Рассмотрим d-мерные линейные параболические операторы следующего вида:

$$\hat{L}=\frac{\partial}{\partial t}-D(t)\Delta,$$

где D – комплексная функция переменной t; Δ – d-мерный оператор Лапласа:

$$\Delta=\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2},$$

заданный на пространстве R^n с координатами $x^\alpha, \alpha=1,\ldots,d$.

Рассмотрим задачу вычисления решений уравнений следующего вида:

$$\hat{L}\Psi-U(x,t)\Psi=0, \tag{1}$$

где $U(x,t)$ – некоторая заданная функция, вообще говоря, комплексная.

Значения функции $D(t)$ определяют область использования таких операторов в теоретической и математической физике. Например, в случае вещественности $D(t)$ оператор $\hat{L}_1$ является диффузионным, а в случае чисто мнимого постоянного его значения оператор $\hat{L}$ является частью оператора Шредингера. В общем случае комплексных значений D оператор $\hat{L}$ встречается в нелинейной оптике.

Рассмотрим действие оператора $\hat{L}$ на функции $\Psi(x,t)$ следующего общего вида:

$$\Psi(x,t;\lambda) = e^{\theta(x,t)+\lambda\phi(x,t)}, \tag{2}$$

где $\theta(x,t)$ и $\phi(x,t)$ – две вспомогательные функции, которые далее будем называть фазовыми; λ – некоторый формальный спектральный параметр. Подобное представление волновых функций используется в методе Вентцеля – Крамерса – Бриллюэна (ВКБ) и теории квазиклассического приближения квантовой теории [9, 10]. Однако задачей данной работы будет анализ таких ситуаций, когда функции (2) будут не приближенными, а именно точными решениями линейных уравнений параболического типа.

Имеем:

$$\hat{L}\Psi = \Big[\hat{L}\theta - D(\nabla\theta,\nabla\theta) + \lambda\Big(\hat{L}\phi - 2D(\nabla\theta,\nabla\phi)\Big) +$$

$$-\lambda^2[D(\nabla\phi,\nabla\phi)\Big]\Psi = U(x,t;\lambda)\Psi. \tag{3}$$

Здесь и далее вводится скалярное произведение вида

$$(\nabla f,\nabla h) = \sum_{\alpha=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}\frac{\partial h}{\partial x_\alpha}.$$

Рассмотрим задачу о вычислении таких функций $\theta(x,t)$ и $\phi(x,t)$, для которых функция $U(x,t;\lambda)$ в правой части последнего равенства не зависит от λ. Поскольку правая часть (3) $U(x,t;\lambda)$ является квадратичной функцией λ, условием выполнения этого требования являются два следующих соотношения:

$$\hat{L}\phi - 2D(\nabla\theta,\nabla\phi) = 0, D(\nabla\phi,\nabla\phi) = 0. \tag{4}$$

Первое из этих уравнений является аналогом уравнения переноса в приближении геометрической оптики для гиперболических уравнений, а второе – аналогом уравнения эйконала [7]. При выполнении этих условий имеем

$$U(x,t) = \theta_t - D\Delta\theta - D(\nabla\theta,\nabla\theta). \tag{5}$$

Дальнейшей задачей данной работы будет явное вычисление вида функций $\theta(x,t)$ и $\phi(x,t)$, связанного с ними потенциала $U(x,t)$ и анализ соответствующих свойств собственных функций оператора $\hat{S}$.

2. Ривертоны

Для построения решений воспользуемся результатами работ [3, 4].

Утверждение 1. Пусть $A=\left(a_1(\phi), a_2(\phi), \ldots, a_d(\phi)\right)$ – вообще говоря, комплексная вектор-функция, заданная на R^d и зависящая только от комплексной функции $\phi(x,t)$. Тогда функция $\phi(x,t)$, удовлетворяющая системе квазилинейных уравнений первого порядка:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha}=A_\alpha(\phi)\frac{\partial \Phi}{\partial t},\ \alpha=1,\ldots,d, \tag{6}$$

может быть вычислена из решения алгебраического уравнения

$$H\left(\phi, \tau+\left(A(\phi), x\right)\right)=0 \tag{7}$$

с произвольной дифференцируемой функцией $H(\phi,\xi)$.

Здесь и далее введены обозначения:

$$(A,x)=\sum_{\alpha=1}^{d} A_\alpha x^\alpha,\ (A,A)=\sum_{\alpha=1}^{d}(A_\alpha)^2.$$

Функции $\phi(x,\tau)$, удовлетворяющие системе (6), называются далее **ривертонами**.

Утверждение 2. В случае выполнения условия

$$\left(A(\phi), A(\phi)\right)\equiv\sum_{\alpha=1}^{d}(A_\alpha)^2=0 \tag{8}$$

функция $\phi(x,\tau)$ является решением d-мерных уравнений Лапласа и уравнения эйконала:

$$\Delta\phi=0, \left(\nabla\phi, \nabla\phi\right)=0. \tag{9}$$

Подробные доказательства содержится в работах [3, 4].

Заметим, это будет полезно для дальнейших вычислений, что решение (7) можно записать в следующей эквивалентной форме:

$$t+\left(A(\phi), x\right)=h(\phi), \tag{10}$$

где $h(\phi)$ – некоторая функция ϕ, определяющаяся начальными условиями.

3. Решения параболических уравнений и ривертоны

Поскольку второе соотношение системы условий (4) в точности совпадает со вторым уравнением системы (9), естественно выбирать функцию $\phi(x,t)$ среди ривертонов, т.е. решений системы квазилинейных уравнений (6) с вектор-функцией $A(\phi)$, удовлетворяющей условию (8). В этом случае первое уравнение системы (4) с учетом вида оператора в $\hat{L}$ примет вид линейного уравнения первого порядка относительно функции θ:

$$\phi_t - 2D(\nabla\theta, \nabla\phi) = 0. \quad (11)$$

Поскольку ϕ теперь по определению удовлетворяет (6), последнее уравнение при условии $\phi_t \neq 0$ сводится к линейному уравнению первого порядка для θ:

$$2D(\nabla\theta, A(\phi)) = 1. \quad (12)$$

Будем искать решения уравнения (12) относительно $\theta(x,t)$ в следующем виде:

$$\theta = \frac{1}{2D}\left(Q(\phi) + (B,x) + \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} R_{\alpha\beta}(\phi) x^{\alpha} x^{\beta} \right), \quad (13)$$

где вектор-функция $B(\phi,t)$, функция $Q(\phi,t)$ и симметричная матричная функция $R(\phi,t)$ с компонентами $R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}$ являются функциями ϕ и t. При таком выборе θ имеем

$$2D\frac{\partial\theta}{\partial x^{\alpha}} = B_{\alpha}(\phi) + 2\sum_{\beta=1}^{d} R_{\alpha\beta} x^{\beta} + \left(\sum_{\beta=1}^{d} B'_{\beta}(\phi) x^{\beta} + Q'(\phi) + R'_{\gamma\beta} x^{\gamma} x^{\beta} \right) \frac{\partial\phi}{\partial x^{\alpha}}. \quad (14)$$

Здесь и далее:

$$\frac{\partial B}{\partial \phi} = B', \ \frac{\partial B}{\partial t} = \dot{B}.$$

Подставляя эти соотношения в (12), а также учитывая $(A(\phi,t), \nabla\phi) = (A, A)\phi_t = 0$, приходим к следующему соотношению:

$$1 - (B, A) + 2\sum_{\alpha,\beta=1}^{d} R_{\alpha\beta} A_{\alpha} x^{\beta} = 0. \quad (15)$$

Учитывая (10), находим, что последнее соотношение не будет явно содержать координаты x^{α}, если выполнено условие

$$\sum_{\alpha=1}^{d} R_{\alpha\beta} A_{\alpha} = \mu(\phi,t) A_{\beta}, \ \beta = 1,\ldots,d,$$

т.е. A является собственным вектором матрицы R. В этом случае условие (15) эквивалентно следующему алгебраическому уравнению:

$$(A(\phi), B(\phi,t)) = 1 + 2\mu(\phi,t)(h(\phi) - t). \quad (16)$$

При этом нет ограничений на выбор $Q(\phi,t)$.

Используя подстановку (13), вычислим теперь явный вид потенциала $U(x,t)$. Используя (14), находим последовательно отдельные слагаемые в (5):

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{1}{2D}\left((B',x)+Q'+\sum_{\alpha\beta}R'_{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta}\right)\phi_t+\frac{1}{2D}\left((B,x)+\dot{Q}+\sum_{\alpha\beta}\dot{R}_{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta}\right),$$

$$(\nabla\theta,\nabla\theta)=\frac{1}{4D^2}\left((B,B)+4\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}R_{\alpha\beta}B_{\alpha}x^{\beta}+4\sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{3}R_{\alpha\beta}R_{\alpha\gamma}x^{\beta}x^{\gamma}\right)+$$

$$+\frac{1}{2D^2}(B,A)\phi_t\left((B',x)+Q'+\sum_{\alpha\beta}R'_{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta}\right),$$

$$\Delta\theta=\frac{1}{D}\left((B',A)\phi_t+2\sum_{\alpha=1}^{3}R_{\alpha\alpha}+2\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}R'_{\alpha\beta}A_{\alpha}x^{\beta}\phi_t\right).$$

Подставляя эти соотношения в формулу для потенциала (5) и учитывая (16), находим:

$$U(x,t)=-2\sum_{\alpha=1}^{3}R_{\alpha\alpha}-\frac{1}{4D}\left((B,B)+2\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}R_{\alpha\beta}B_{\alpha}x^{\beta}+2\sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{3}R_{\alpha\beta}R_{\alpha\gamma}x^{\beta}x^{\gamma}\right)+$$

$$+\frac{1}{2D}\left((B,x)+\dot{Q}+\sum_{\alpha\beta}\dot{R}_{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta}\right)-\left((B',A)+2\sum_{\alpha\beta=1}^{3}R'_{\alpha\beta}A_{\alpha}x^{\beta}\right)\phi_t. \qquad (17)$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Утверждение 3. Для любого комплексного значения параметра λ функция $\Psi(x,t;\lambda)$

$$\Psi(x,t;\lambda)=e^{\lambda\phi(x,t)}\exp\left((B(\phi,t),x)/2D+\right.$$

$$\left.+\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}R_{\alpha\beta}(\phi,t)x^{\alpha}x^{\beta}/2D+Q(\phi,t)/2D\right) \qquad (18)$$

является решением параболического уравнения (1) с потенциалом (17), не зависящим от λ при выполнении условий:

1) функция ϕ является ривертоном (т.е. является решением системы (6));

2) θ имеет вид (13) с произвольной функцией $Q(\phi,t)$;

3) вектор-функции $A(\phi)$, $B(\phi,t)$ и матричная функция $R(\phi,t)$ удовлетворяют алгебраическим уравнениям:

$$\left(A(\phi),A(\phi)\right)=0,\left(A(\phi),B(\phi,t)\right)=1+2\mu(\phi,t)\left(h(\phi)-t\right),$$

$$RA=\mu(\phi,t)A. \quad (19)$$

Замечание. Среди всех потенциалов (17) при выполнении условий утверждения 3 существуют потенциалы, которые не зависят от выбора ривертона $\phi(x,t)$ при конкретном выборе A, B и R как функций ϕ и t. Если такой потенциал найден, то решения (18) уравнения (1) будут многозначными, поскольку сами эти решения будут зависеть от многозначной функции ривертона $\phi(x,t)$. Для размерности $d=2$ это было доказано в работах [1, 2].

4. Вычисление потенциала для $d=2$

Общий вид потенциала (17) может допускать несколько вариантов своего функционального вида. Особый интерес представляют ситуации, когда функция $U(x,t)$ является вещественной функцией координат и времени или постоянной величиной. В работах [1, 2] для случая $d=2$ были найдены такие условия с помощью средств, отличных от теории ривертонов. Покажем, что этот же результат можно получить и в рамках рассматриваемого подхода.

Представим вектор-функции $A(\phi)$ и $B(\phi)$ в следующем общем виде:

$$A=a(\phi)e_x+b(\phi)e_y,B=u(\phi,t)e_x+v(\phi,t)e_y, \quad (20)$$

где e_x и e_y – орты декартовой системы координат в R^2. Уравнения для ривертонов (6) в этом случае можно записать так:

$$\phi_x=a(\phi)\phi_t,\phi_y=ia(\phi)\phi_t.$$

Переходя к комплексным координатам, находим:

$$\phi_z=\frac{1}{2}\left(\phi_x-i\phi_y\right)=a(\phi)\phi_t,\ \phi_{z^*}=\frac{1}{2}\left(\phi_x+i\phi_y\right)=0.$$

Таким образом, ривертоны в данном случае являются функциями z и t. В частности, соотношение (10) полезно записать в такой форме:

$$z=\frac{1}{a(\phi)}\left(h(\phi)-t\right). \quad (21)$$

Используя (20), условие (8) можно свести к одному соотношению:

$$a^2+b^2=0, \quad (22)$$

откуда следует

$$b=ia(\phi). \quad (23)$$

В этом случае условие (16) принимает такой вид:

$$a(u+iv)=1+\mu(h-t). \quad (24)$$

Следовательно:

$$u = -iv(\phi, t) + \frac{1}{a(\phi)}\big(1 + \mu(\phi, t)\big(h(\phi) - t\big)\big).$$

Отсюда, в частности, находим:

$$B = \dot{u}e_x + \dot{v}e_y = -i\dot{v}\big(e_x + ie_y\big) + \frac{1}{a}\big(\dot{\mu}(h - t) - \mu\big)e_x,$$

и далее

$$(B, x) = -i\dot{v}(\phi, t)(x + iy) = -i\dot{v}(\phi, t)z + \frac{1}{a}\big(\dot{\mu}(h - t) - \mu\big)x.$$

Последнее соотношение в (16) сводится к двум соотношениям на компоненты матрицы R:

$$R_{11} = \mu(\phi, t) - iR_{12}(\phi, t), R_{22} = \mu(\phi, t) + iR_{12}(\phi, t).$$

В результате матрицу R можно представить в таком виде:

$$R = \begin{pmatrix} \mu(\phi, t) - iP(\phi, t) & P(\phi, t) \\ P(\phi, t) & \mu(\phi, t) + iP(\phi, t) \end{pmatrix}, \tag{25}$$

где $P = R_{12}(\phi, t)$ – произвольная функция ϕ и t. Отсюда:

$$R^2 = \mu(\phi, t)\begin{pmatrix} \mu(\phi, t) - 2iP(\phi, t) & 2P(\phi, t) \\ 2P(\phi, t) & \mu(\phi, t) + 2iP(\phi, t) \end{pmatrix}$$

и $Sp\{R\} = R_{11} + R_{22} = 2\mu(\phi, t)$. Кроме этого, имеем

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{3} R_{\alpha\beta}B_{\alpha}x^{\beta} = \frac{1}{a}\big(1 + \mu\big(h(\phi) - t\big)\big)(\mu x - iPz),$$

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{3} R'_{\alpha\beta}A_{\alpha}x^{\beta} = a\mu' z, \ \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} R_{\alpha\beta}x_{\alpha}x^{\beta} = \big(x^2 + y^2\big)\mu - iPz^2,$$

$$\sum_{\alpha}^{3} B'_{\alpha}A_{\alpha} = a\mu' z, \ \sum_{\alpha}^{3} B_{\alpha}B_{\alpha} = u^2 + v^2 = \frac{1}{a^2}(1 + \mu(h - t))^2 - \frac{2iv}{a}\big(1 + \mu(h - t)\big),$$

где $z = x + iy$.

Проделанные вычисления позволяют потенциал $U(x, t)$ записать в следующем виде:

$$U = U_1(\phi, t) + \frac{1}{D}\big(\dot{\mu} - \mu^2\big)\big(x^2 + y^2\big) - \frac{\mu}{Da}z^*. \tag{26}$$

Выражение для функции $U_1(\phi, t)$ достаточно громоздко и приводить его здесь не имеет смысла. Важно, что эта функция содержит произвольные функции $Q(\phi,t)$ и $P(\phi,t)$, которые можно использовать для придания ей нужного вида. В частности, эти функции можно подобрать таким образом:

$$U_1(\phi,t) = -\frac{\mu^*}{Da^*} z + U_0(t),$$

где $U_0(t)$ – вещественная функция. Полагая теперь произвольную функцию $\mu(\phi,t)$ вещественной функцией только t, приводим потенциал $U(x,y,t)$ к вещественной функции, не зависящей от выбора ривертонов $\phi(z,t)$. Этот результат повторяет в несколько ином виде результат, полученный ранее в работах [1, 2]. Таким образом, метод ривертонов в двумерном случае дает тот же результат, который ранее был получен другим способом.

5. Алгебраические условия для произвольного d

Рассмотрим первоначально совместное решение (22) и (24) в случае произвольной размерности $d > 1$. Представим вектор-функции $A(\phi)$ и $B(\phi)$ в следующем виде:

$$A = \sum_{\alpha=1}^{d} a_\alpha(\phi) e_\alpha, \; B = \sum_{\alpha=1}^{d} b_\alpha(\phi) e_\alpha, \tag{27}$$

где $a_\alpha(\phi)$ и $b_\alpha(\phi)$ – компоненты этих вектор-функций в декартовой системе координат с ортами $e_\alpha, \alpha = 1,\ldots,d$. Введем следующие обозначения:

$$P_d(\phi) = \sqrt{\sum_{\alpha=1}^{d-1} a_\alpha^2}, \; S_d(\phi) = \sum_{\alpha=1}^{d-1} b_\alpha n_\alpha, \; n_\alpha = a_\alpha / P_d, \alpha = 1,\ldots,d-1. \tag{28}$$

Тогда соотношения (19) можно переписать так:

$$a_d = i\delta P_d, b_d = i\delta\left(S_d - \frac{1}{P_d}\left(1 - \mu(\phi,t)\left(h(\phi) - t\right)\right)\right), \tag{29}$$

$$R_{\alpha d} = i\delta \sum_{\beta=1}^{d-1} \left(R_{\alpha\beta} - \mu\delta_{\alpha\beta}\right) a_\beta, \; \alpha = 1,\ldots,d. \tag{30}$$

Здесь $\delta = \pm 1$, а $R_{\alpha\beta}$ – элементы матрицы R. Отсюда следует, что при заданном произвольно выборе первых $(d-1)$ компонентов вектор-функций A, B и строк матрицы R компоненты a_d и b_d находятся однозначно с точностью до выбора знака (параметр δ). При этом вычисления потенциала $U(x,t)$ для $d > 2$ в соответствии с (17) оказываются очень громоздкими за исключением случая, когда этот потенциал является постоянной величиной: $U(x,t) = \Lambda = \text{const}$. В этом случае уравнение (1) примет вид d-мерного классического линейного параболического уравнения с постоянными коэффициентами:

$$\hat{L}\Psi(x,t;\lambda) = \Lambda\Psi(x,t;\lambda). \tag{31}$$

Согласно замечанию, сделанному в разд. 4, соответствующие решения (18) будут многозначными.

6. Решения в случае $U(x,t) = \Lambda = \mathrm{const}$

Упрощение анализа свойств решений (18) для случая $U(x,t) = \Lambda = \mathrm{const}$ состоит в том, что можно без ограничения общности полагать $R = 0$ и $\mu = 0$. В этом случае система (19) упрощается и сводится к системе из двух алгебраических уравнений:

$$\left(A(\phi), A(\phi)\right) = 0,\ \left(A(\phi), B(\phi,t)\right) = 1. \tag{32}$$

При этом условие $U(x,t) = \Lambda = \mathrm{const}$ сводится к двум дополнительным алгебраическим уравнениям на компоненты вектор-функций A и B:

$$\left(B(\phi), B(\phi,t)\right) = \Lambda,\ \left(B'(\phi,t), A(\phi)\right) = 0 \tag{33}$$

при произвольной функции $Q(\phi)$.

Общее число компонентов векторов $A(\phi)$ и $B(\phi)$ в d-мерном пространстве равно $2d$. Поэтому эта система имеет нетривиальные решения при $d > 1$. Следовательно, справедливо следующее

Утверждение 4. При выполнении условий (33) и (32) уравнение (31) имеет решения (18), которые являются многозначными в силу многозначности ривертонов $\phi(x,t)$.

В заключение приведем основные соотношения, позволяющие вычислять в явном виде компоненты вектор-функций A и B как функций ϕ, исходя из системы соотношений (33) и (32). Это позволит при необходимости строить конкретные решения для ривертонов и решений уравнения (31) в явном виде. Для этого воспользуемся соотношениями (29), учитывая обозначения (28). В результате для компонентов a_d и b_d имеем

$$a_d = i\delta P_d(\phi), b_d = i\delta\left(S_d - P_d^{-1}\right), \tag{34}$$

что, по сути, является перезаписью соотношений (29) в новых обозначениях.

Уравнения (33) теперь можно записать в таком виде:

$$\sum_{\alpha=1}^{d-1} b_\alpha^2 = \Lambda + \left(S_d - P_d^{-1}\right)^2,\ \ \sum_{\alpha=1}^{d-1} b_\alpha n_\alpha = \frac{d}{d\phi}\left(S_d - P_d^{-1}\right). \tag{35}$$

Эти два уравнения и будут определять вид компонентов вектор-функций A и B.

6.1. Размерность $d = 3$

В частности, для $d = 3$ имеем:

$$b_1^2 + b_2^2 = \Lambda + K^2,\ a_1^2 + a_2^2 = P_3^2, \tag{36}$$

$$b_1' n_1 + b_2' n_2 = K', n_1 = \cos(\theta),\ n_2 = \sin(\theta),$$

где $K = S_3 - P_3^{-1}$, $\xi = \xi(\phi)$ и $\theta = \theta(\phi)$ – произвольные функции ϕ. В результате находим:

$$b_1 = M\cos(\xi),\ b_2 = M\sin(\xi),\ b_3 = i\delta K,$$

$$a_1 = P_3\cos(\theta),\ a_2 = P_3\sin(\theta),\ a_3 = i\delta P_3, \tag{37}$$

где $M = \sqrt{\Lambda + K^2(\phi)}$ и $\xi = \xi(\phi)$ – еще одна произвольная функция ϕ. При этом $S = M\cos(\xi - \theta)$. Последнее уравнение, которое необходимо удовлетворить, приводится теперь к такому виду:

$$M'\cos(\xi - \theta)) + M\xi'\sin(\xi - \theta) = K'.$$

Полагая $K = K(\phi)$ и $\xi = \xi(\phi)$ заданными функциями ϕ, решение последнего уравнения можно записать в виде

$$\theta = \xi - \chi - \arccos\left(\frac{K'}{\sqrt{M'^2 + M^2\xi'^2}}\right), \chi = \left(\frac{M'}{M\xi'}\right). \tag{38}$$

В этом случае также находим

$$P_3 = (M(\phi)\cos(\xi(\phi) - \theta(\phi)) \pm \sqrt{M^2(\phi) + \Lambda})^{-1}. \tag{39}$$

Теперь соотношения (37) вместе с (38) и (39) дают полное решение систем (32) и (33) для вектор-функций A и B в случае $d = 3$ при двух произвольных функциях K и ξ. Задавая эти функции, находим вид $A(\phi)$, что позволяет построить все возможные ривертоны $\phi(x, y, z, t)$ как неявно заданные с помощью (7) (или (10)) функции (при произвольной $h(\zeta)$):

$$\phi = h\Big(t + P_3(\phi)\Big[x\cos\big(\theta(\phi)\big) + y\sin\big(\theta(\phi)\big)\Big] + P_3(\phi)i\delta z\Big). \tag{40}$$

После этого многозначные решения уравнения (31) строятся в соответствии с (18) и имеют такой вид:

$$\Psi(x, t; \lambda) = e^{\lambda\phi(x,t)}\exp\Big(M(\phi)\Big[x\cos\big(\xi(\phi)\big) + y\sin\big(\xi(\phi)\big)\Big] / 2D +$$

$$+\big(K(\phi)i\delta z + Q(\phi)\big) / 2D\Big). \tag{41}$$

Каждому листу многозначного решения уравнения (40) относительно ϕ будет соответствовать свой лист решения (41) . Таким образом, классическое уравнение диффузии (1) в размерности $d = 3$ с постоянными коэффициентами ($U(x, t) = \Lambda = \text{const}$) имеет богатый набор многозначных решений (41), которые являются сингулярными.

6.2. Размерность $d > 3$

Решения в случае $d > 3$ строятся по схеме, аналогичной $d = 3$. Отличие состоит только в том, что компоненты a_k и b_k вектор-функций A и B с номерами $k = 3,\ldots,d-1$ будут произвольными функциями. Соотношения (36) в этом случае можно переписать так:

$$b_1^2 + b_2^2 = \Lambda + K_d^2 - T_d, a_1^2 + a_2^2 = R_d^2, b'_1 n_1 + b'_2 n_2 = K'_d - N_d, \qquad (42)$$

где

$$K_d = S_d - P_d^{-1},\ T_d = \sum_{\alpha=3}^{d-1} b_\alpha^2,\ N_d = \sum_{\alpha=3}^{d-1} b_\alpha n_\alpha,\ R_d^2 = P_d^2 - \sum_{\alpha=3}^{d-1} a_\alpha^2.$$

Полагая заданными функции K_d, T_d, N_d, можно найти P_d, S_d и компоненты a_1, a_2, b_1, b_2 вектор-функций A и B. После этого строится решение для ϕ и решение для $\Psi(x,t;\lambda)$ уравнения (31).

Заключение

В работе построена схема вычисления решений многомерных параболических уравнений, часть из которых обладает свойством многозначности подобно решениям, найденным в работах [1, 2] для размерности $d = 2$. Построенные решения зависят от одного спектрального параметра, что дает возможность строить их суперпозиции и, следовательно, применять для решения граничных задач. В тех случаях, когда уравнения допускают многозначные решения, зависящие от одного спектрального параметра, они образуют множества решений, порожденных множеством ривертонов, являющихся решениями системы квазилинейных уравнений первого порядка. В двумерном случае аналогичное свойство связано с многозначностью решений квазилинейного комплексного уравнения Хопфа, которое можно рассматривать как вариант двумерной системы уравнений для ривертонов, что и было продемонстрировано в данной работе.

Основным результатом данной работы является вывод решений многомерных линейных уравнений параболического типа, представляющих собой многозначные функции, вместе с общей схемой их построения. Предложенный подход отличается от классической схемы разделения переменных и связан с использованием для построения решений квазилинейных уравнений первого порядка специального вида. Общим следствием этого результата является утверждение, что свойство многозначности решений, исследованное ранее для многомерных линейных (и нелинейных) уравнений гиперболического и эллиптического типов в работах [3, 4], переносится и на многомерные линейные уравнения параболического типа. Предложенный метод дает новый инструмент для исследования различных эффектов в задачах теплопроводности, диффузии и квантовой теории. Хотя в размерности $d > 3$ многозначные решения были получены для ограниченного класса параболических уравнений, в частности для уравнений с постоянными коэффициентами, тем не менее можно предполагать, что такие решения присущи для всего множества многомерных параболических уравнений. Однако доказательства этого предположения требуют других способов построения решений в более общих ситуациях, что выходит за рамки данной работы.

Список литературы

1. Журавлев В. М., Морозов В. М. О многозначных решениях двумерных линейных параболических уравнений // Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании : материалы XIII Междунар. науч. конф. (Саранск, 12–16 июля 2017 г.). Саранск : СВМО, 2017. С. 330–340. URL: http://conf.svmo.ru/archive/article?id=46
2. Журавлев В. М., Морозов В. М. Многозначные решения уравнений диффузии и гидродинамика // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2018. № 3. С. 87–110.
3. Журавлев В. М. Многомерные нелинейные волновые уравнения с многозначными решениями // Теоретическая и математическая физика. 2013. Т. 174, № 2. С. 236–246.
4. Журавлев В. М. Многомерные квазилинейные уравнения первого порядка и многозначные решения уравнений гиперболического и эллиптического типов // Теоретическая и математическая физика. 2016. Т. 186, № 3. С. 371–385.
5. Журавлев В. М. Многомерные нелинейные уравнения Клейна-Гордона и ривертоны // Теоретическая и математическая физика. 2018. Т. 197, № 3. С. 356–370.
6. Арнольд В. И. Особенности каустик и волновых фронтов. М. : Фазис, 1996. – 334 с.
7. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М. : Наука, 1980. 304 с.
8. Шубин М. А. Лекции об уравнениях математической физики. М. : МЦНМО, 2003. 303 с.
9. Маслов В. П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М. : Наука, 1977. 384 с.
10. Маслов В. П., Шведов О. Ю. Метод комплексного ростка в задаче многих частиц и квантовой теории поля. М. : УРСС, 2000. 358 с.

References

1. Zhuravlev V.M., Morozov V.M. On multivalued solutions of 2D linear parabolic equations. *Differentsial'nye uravneniya i ikh prilozheniya v matematicheskom modelirovanii: materialy XIII Mezhdunar. nauch. konf. (Saransk, 12–16 iyulya 2017 g.) = Differential equations and their applications in mathematical modeling: proceedings of the 13th International scientific conference (Saransk, July 12-16, 2017)*. Saransk: SVMO, 2017:330–340. (In Russ.). Available at: http://conf.svmo.ru/archive/article?id=46
2. Zhuravlev V.M., Morozov V.M. Multivalued solutions of diffusion equations and hydrodynamics. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2018;3:87–110. (In Russ.)
3. Zhuravlev V.M. Multidimensional nonlinear wave equations with multivalued solutions. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika = Theoretical and methematical physics*. 2013;174(2):236–246. (In Russ.)
4. Zhuravlev V.M. Multidimensional quasilinear equations of the first order and multivalued solutions of equations of hyperbolic and elliptic types. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika = Theoretical and methematical physics*. 2016;186(3):371–385. (In Russ.)
5. Zhuravlev V.M. Multidimensional nonlinear Klein-Gordon equations and rivertons. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika = Theoretical and methematical physics*. 2018;197(3):356–370. (In Russ.)

6. Arnol'd V.I. *Osobennosti kaustik i volnovykh frontov = Features of caustics and wavefronts*. Moscow: Fazis, 1996:334. (In Russ.)
7. Kravtsov Yu.A., Orlov Yu.I. *Geometricheskaya optika neodnorodnykh sred = Geometric optics of heterogeneous media. Moscow*: Nauka, 1980:304. (In Russ.)
8. Shubin M.A. *Lektsii ob uravneniyakh matematicheskoy fiziki = Lectures on equations of mathematical physics*. Moscow: MTsNMO, 2003:303. (In Russ.)
9. Maslov V.P. *Kompleksnyy metod VKB v nelineynykh uravneniyakh = Complex WKB method in nonlinear equations*. Moscow: Nauka, 1977:384. (In Russ.)
10. Maslov V.P., Shvedov O.Yu. *Metod kompleksnogo rostka v zadache mnogikh chastits i kvantovoy teorii polya = Complex germ method in the problem of many particles and quantum field theory*. Moscow: URSS, 2000:358. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Виктор Михайлович Журавлев
доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Самарский национальный исследовательский университет (Россия, г. Самара, Московское шоссе, 34); профессор кафедры теоретической физики, Ульяновский государственный университет (Россия, г. Ульяновск, ул. Льва Толстого, 42)

Viktor M. Zhuravlev
Doctor of physical and mathematical sciences, leading researcher, Samara National Research University (34 Moskovskoye highway, Samara, Russia); professor of the sub-department of theoretical physics, Ulyanovsk State University (42 Lva Tolstogo street, Ulyanovsk, Russia)

E-mail: zhvictorm@gmail.com

Виталий Михайлович Морозов
младший научный сотрудник, Самарский национальный исследовательский университет (Россия, г. Самара, Московское шоссе, 34)

Vitaliy M. Morozov
Junior researcher, Samara National Research University (34 Moskovskoye highway, Samara, Russia)

E-mail: aieler@rambler.ru

Поступила в редакцию / Received 03.02.2021

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 25.02.2021

Принята к публикации / Accepted 04.03.2021