```
> restart;
```

```
==================================================================
|                  РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ            |
|             (В.М.ГАЛИЦКИЙ, Б.М.КОРНАКОВ, В.И.КОГАН.             |
|                     ЗАДАЧИ ПО КВАНТОВОЙ МЕХНИКЕ)                |
|                            Журавлев В.М.                        |
|              Ульяновский государственный университет, 2020      |
==================================================================
```

ОПЕРАТОР СПИНА. ОПЕРАТОРЫ s+ и s-

```
> with(plots):
  with(plottools):
```

Формат графиков

```
> frm:=axes=boxed,gridlines=true,labeldirections=[horizontal,vertical],labelfont=[TIMES,BOLD,16],titlefont=
  [TIMES,BOLD,20],font=[TIMES,BOLD,20],symbol=solidcircle,symbolsize=18,legendstyle=[font=["TIMES",BOLD,18],
  location=bottom],size=[900,600];
```

frm := *axes* = *boxed*, *gridlines* = *true*, *labeldirections* = [*horizontal*, *vertical*], *labelfont* = [*TIMES*, *BOLD*, 16], *titlefont* = [*TIMES*, *BOLD*, 20], *font* = [*TIMES*, *BOLD*, 20], *symbol* = *solidcircle*, *symbolsize* = 18, *legendstyle* = [*font* = ["TIMES", *BOLD*, 18], *location* = *bottom*], *size* = [900, 600] **(1)**

ОПЕРАТОР СПИНА

ОПЕРАТОР СПИНА

Оператор собственного момента импульса электрона

Экспериментальным фактом является то, что **электрон** и другие **элементарные частицы** обладают **собственным магнитным полем**.

Согласно классическим представлениям источником магнитного поля являются замкнутые токи, например, движение электрона в атоме приводит к появлению у атома собственного магнитного поля (смотрите лекцию и раздел квантовой механики о квантовании магнитного момента атомов с центрально-симметричным внутренним полем.)

Следовательно, собственный магнитный момент электрона можно объяснить наличием его внутреннего вращения.

Проблема классического объяснения состоит в том, что электрон ведет себя как точка в экспериментах, а в квантовой механике принят постулат о точечности элементарных частиц.

Но заряженная точка не может вращаться и создавать ток.

Поэтому для объяснения **собственного магнитного поля электрона** вводится понятие **спин** − собственного момента импульса, обозначаемого буквой $\hat{S}=\hbar(\hat{s}_x,\hat{s}_y,\hat{s}_z)$, где , безразмерный вектор

$\hat{s}=(\hat{s}_x,\hat{s}_y,\hat{s}_z)$ называется **спин** (аналог орбитального момента).

Однако в отличие от орбитального момента спин не может быть представлен в виде векторного произведения координаты на импульс. Для описания спина вводится матричный оператор, который по определению обладает теми же коммутационными свойствами, что и компоненты орбитального момента :

$$[\hat{s}_x,\hat{s}_y]=i\hat{s}_z,\qquad [\hat{s}_y,\hat{s}_z]=i\hat{s}_x,\qquad [\hat{s}_z,\hat{s}_x]=i\,\hat{s}_y.$$

Операторы $\hat{s}_x,\hat{s}_y,\hat{s}_z$ являются матрицами 2x2. Вывод вида этих матриц в лекциях и учебниках.

$$\hat{s}_x=\frac{1}{2}\hat{\sigma}_x,\quad \hat{s}_y=\frac{1}{2}\hat{\sigma}_y,\quad \hat{s}_z=\frac{1}{2}\hat{\sigma}_z.$$

Здесь $\hat{\sigma}_x,\hat{\sigma}_y,\hat{\sigma}_z$ - матрицы Паули:

$$\hat{\sigma}_x=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\quad \hat{\sigma}_y=\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix},\quad \hat{\sigma}_z=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}.$$

Следовательно:

$$\hat{s}_x=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\quad \hat{s}_y=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix},\quad \hat{s}_z=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}.$$

Матрицы Паули обладают следующими свойствами (необходимо уметь доказать явно!):

$$(\hat{\sigma}_x)^2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\quad (\hat{\sigma}_y)^2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\quad (\hat{\sigma}_z)^2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},$$

$$\hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_y+\hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_x=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},\quad \hat{\sigma}_x\hat{\sigma}_z+\hat{\sigma}_z\hat{\sigma}_x=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},\quad \hat{\sigma}_z\hat{\sigma}_y+\hat{\sigma}_y\hat{\sigma}_z=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}.$$

Согласно наблюдаемым свойствам спин электрона может иметь только два направления в каждом стационарном состоянии. Например, в состоянии с фиксированной проекцией спина на ось z имеются две различных волновых функции, изображаемые двумерным вектором-столбцом, который называется **спинор**:

$$\hat{s}_z\begin{bmatrix}\psi_1\\\psi_2\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi_1\\\psi_2\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}\psi_1\\\psi_2\end{bmatrix}$$

Решая эту задачу на собственные вектора матрицы, приходим к уравнениям:

$$\frac{1}{2}\psi_1=\lambda\psi_1,\quad -\frac{1}{2}\psi_2=\lambda\psi_2.$$

У этой системы имеются два решения.

$\lambda=\frac{1}{2}$: $\psi_2=0$, ψ_1 - произвольно.

$\lambda=-\frac{1}{2}$: $\psi_1=0$, ψ_2 - произвольно.

Этим решениям соответствуют два спинора:

$$\mathbf{\Psi}_{s_z=\frac{1}{2}}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\psi_1(x,y,z,t),\quad \mathbf{\Psi}_{s_z=-\frac{1}{2}}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\psi_2(x,y,z,t).$$

Функции $\psi_1(x,y,z,t)$ и $\psi_2(x,y,z,t)$ описывают состояние частицы по отношению к окружающей физической обстановке. Компоненты спинора описывают внутреннее состояние электрона, либо вдоль оси z $\mathbf{\Psi}_{s_z=\frac{1}{2}}$, либо в обратном по отнощению к ней направлении $\mathbf{\Psi}_{s_z=-\frac{1}{2}}$. Поэтому $\psi_1(x,y,z,t)$ и $\psi_2(x,y,z,t)$ - ранее используемые нами волновые функции частиц.

Нормировка спиноров осуществляется по правилу:

$$\int_V \left(\mathbf{\Psi}_{s_z=\frac{1}{2}}\right)^+ \mathbf{\Psi}_{s_z=\frac{1}{2}}\,dxdydz=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\int_V \left(\psi_1(x,y,z,t)\right)^*\psi_1(x,y,z,t)\,dxdydz=\int_V |\psi_1(x,y,z,t)|^2 dxdydz=1.$$

$$\int_V \left(\mathbf{\Psi}_{s_z=-\frac{1}{2}}\right)^+ \mathbf{\Psi}_{s_z=-\frac{1}{2}}\,dxdydz=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\int_V \left(\psi_2(x,y,z,t)\right)^*\psi_2(x,y,z,t)\,dxdydz=\int_V |\psi_2(x,y,z,t)|^2 dxdydz=1.$$

Предполагается, что $\psi_1(x,y,z,t)$ и $\psi_2(x,y,z,t)$ нормированы стандартным способом, поскольку описывают состояния электронов с различным внутренним состоянием спина.

Рассмотрим теперь задачу на собственные состояния оператора $\hat{s}_x$. Имеем:

$$\hat{s}_x\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{bmatrix}$$

Решая эту задачу на собственные вектора, приходим к уравнениям:

$$\frac{1}{2}\psi_2=\lambda\psi_1,\quad \frac{1}{2}\psi_1=\lambda\psi_2.$$

У этой системы имеются два решения.

$\lambda=\frac{1}{2}$: $\psi_2=\psi_1$, ψ_1 - произвольна,

$\lambda=-\frac{1}{2}$: $\psi_1=-\psi_2$, ψ_2 - произвольна.

Этим решениям соответствуют два спинора:

$$\mathbf{\Psi}_{s_x=\frac{1}{2}}=C\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\psi_1(x,y,z,t),\quad \mathbf{\Psi}_{s_x=-\frac{1}{2}}=C\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\psi_2(x,y,z,t).$$

Нормировка спиноров осуществляется по правилу:

$$\int_V \left(\mathbf{\Psi}_{s_x=\frac{1}{2}}\right)^+ \mathbf{\Psi}_{s_x=\frac{1}{2}}\,dxdydz=C^2\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\int_V \left(\psi_1(x,y,z,t)\right)^*\psi_1(x,y,z,t)\,dxdydz=2\,C^2\int_V |\psi_1(x,y,z,t)|^2 dxdydz=1.$$

$$\int_V \left(\mathbf{\Psi}_{s_x=-\frac{1}{2}}\right)^+ \mathbf{\Psi}_{s_x=-\frac{1}{2}}\,dxdydz=C^2\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\int_V \left(\psi_2(x,y,z,t)\right)^*\psi_2(x,y,z,t)\,dxdydz=$$

$$=2\,C^2\int_V |\psi_2(x,y,z,t)|^2 dxdydz=1.$$

Поскольку предполагается, что $\psi_1(x,y,z,t)$ и $\psi_2(x,y,z,t)$ нормированы стандартным способом, то имеем:

$$2\,C^2=1$$

или

$$C=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Поэтому :

$$\mathbf{\Psi}_{s_x=\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\psi_1(x,y,z,t),\quad \mathbf{\Psi}_{s_x=-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\psi_2(x,y,z,t).$$

Вычислите спиноры с фиксированной проекцией спина на ось y.

$\Psi_{s_y=\frac{1}{2}}$ =???, $\Psi_{s_y=-\frac{1}{2}}$ =????

Квадрат оператора спина имеет вид:

$$\hat{\mathbf{s}}^2 = (\hat{s}_x)^2 + (\hat{s}_y)^2 + (\hat{s}_z)^2 = \frac{3}{4}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Для проекций спина можно ввести операторы $\hat{s}_+ = \hat{s}_x + i\hat{s}_y$, $\hat{s}_- = \hat{s}_x - i\hat{s}_y$, которые можно рассматривать как повышающий и понижающий оператор по s_z.

Вид коммутационных соотношений таков :

$$[\hat{s}_+, \hat{s}_z] = -\hat{s}_+$$
$$[\hat{s}_-, \hat{s}_z] = \hat{s}_-,$$
$$[\hat{s}_+, \hat{s}_-] = 2\hat{s}_z$$

Решение задач

Задача 5.2 ГКК

5.2. Указать вид оператора проекции спина $\hat{s}_n$ на произвольное направление, определяемое единичным вектором n.

Чему равно среднее значение проекции спина на ось n в состоянии с определенной проекцией спина $s_z = \pm 1/2$ на ось z?

Каковы вероятности проекции спина $\pm 1/2$ на направление n в указанных состояниях?

Задача состоит в вычислении среднего значения проекции оператора $\hat{\mathbf{s}}$ *на некоторую ось, связанную с единичным вектором* $\mathbf{n}$ $= (\cos(\varphi)\sin(\theta), \sin(\varphi)\sin(\theta), \cos(\theta))$. *Здесь* θ *(полярный угол* $\mathbf{n}$*) – угол между* $\mathbf{n}$ *и осью z, а* φ *(азимутальный угол* $\mathbf{n}$*) – угол между проекцией* $\mathbf{n}$ *на плоскость x, y с осью x.*

Обозначим через $\hat{s}_n$ *оператор следующего вида :*

$$\hat{s}_n = \cos(\varphi)\sin(\theta)\,\hat{s}_x + \sin(\varphi)\sin(\theta)\,\hat{s}_y + \cos(\theta)\,\hat{s}_z.$$

Среднее значение этого оператора равно :

$$\langle \hat{s}_n \rangle = \cos(\varphi)\sin(\theta) < \hat{s}_x > + \sin(\varphi)\sin(\theta) < \hat{s}_y > + \cos(\theta) < \hat{s}_z >.$$

Средние значения по условию должны вычисляться в состояниях с волновыми функциями :

$$\Psi_{s_z=\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\psi_1(x, y, z, t), \quad \Psi_{s_z=-\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\psi_2(x,y,z,t).$$

Вычисляем для $s_z = \frac{1}{2}$:

$$\langle \hat{s}_x \rangle = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\int_V |\psi_1(x, y, z, t)|^2 dxdydz = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0,$$

$$\langle \hat{s}_y \rangle = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\int_V |\psi_1(x, y, z, t)|^2 dxdydz = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix} = 0,$$

$$\langle \hat{s}_z \rangle = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\int_V |\psi_1(x, y, z, t)|^2 dxdydz = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2},$$

В результате находим :

$$\langle \hat{s}_n \rangle = \cos(\varphi)\sin(\theta)\cdot 0 + \sin(\varphi)\sin(\theta)\cdot 0 + \cos(\theta)\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cos(\theta)$$

Найдите по аналогии значение средней проекции $< \hat{s}_n >$ **в состоянии с** $s_z = -\frac{1}{2}$

Вычисление вероятностей проекции спина на ось **n**.

Вычисление вероятностей можно производить двумя способами. Первый состоит в использовании теории вероятностей, а второй с помощью разложения состояния частицы по собственным состояниям оператора проекции спина на ось **n.**

Метод теории вероятностей.

Обозначим через p_+ *– вероятность того, что в эксперименте будет обнаружена проекция спина на ось* ***n****,* *равная* $s_n = \frac{1}{2}$ *, а через* p_- *– вероятность того, что в эксперименте будет обнаружена проекция спина на ось* ***n****,* *равная* $s_n = -\frac{1}{2}$*. Других вариантов значений в эксперименте не наблюдается.*

Поэтому :

$$p_+ + p_- = 1.$$

С другой стороны, согласно теории вероятности :

$$\langle \hat{s}_n \rangle = \frac{1}{2} p_+ - \frac{1}{2} p_- = \frac{1}{2}\cos(\theta).$$

Имеем два уравнения с двумя неизвестными :

$$p_+ + p_- = 1,$$

$$p_+ - p_- = \cos(\theta).$$

Отсюда :

$$\boldsymbol{P}_{s_n=\frac{1}{2}} = p_+ = \frac{1}{2}(1+\cos(\theta)) = \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2,$$

$$\boldsymbol{P}_{s_n=-\frac{1}{2}} = p_- = \frac{1}{2}(1-\cos(\theta)) = \left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2.$$

Найдите по аналогии вероятности в состоянии с $s_z = -\frac{1}{2}$

Метод разложения по собственным состояниям оператора $\hat{s}_n$

Найдем собственные спиноры оператора $\hat{s}_n$*, который можно записать в виде* :

$$\hat{s}_n = \cos(\varphi)\sin(\theta)\,\hat{s}_x + \sin(\varphi)\sin(\theta)\,\hat{s}_y + \cos(\theta)\,\hat{s}_z =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos(\varphi)\sin(\theta)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \sin(\varphi)\sin(\theta)\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} + \cos(\theta)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta)e^{-i\varphi} \\ \sin(\theta)e^{i\varphi} & -\cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Для отыскания собственных функций $\left(\text{собственные значения заранее известны – это } \pm\frac{1}{2}\right)$ *необходимо решить системы* :

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta)e^{-i\varphi} \\ \sin(\theta)e^{i\varphi} & -\cos(\theta) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta)e^{-i\varphi} \\ \sin(\theta)e^{i\varphi} & -\cos(\theta) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}$$

Первая из них для состояния с проекцией $\frac{1}{2}$ *на ось n, а вторая с проекцией* $-\frac{1}{2}$

. В каждой из систем необходимо решить только одно уравнение, поскольку второе линейно зависимо от первого

. Для первой системы имеем :

$$\cos(\theta)\psi_1 + \sin(\theta)e^{-i\varphi}\psi_2 = \psi_1$$

Отсюда :

$$\psi_2 = \frac{(1-\cos(\theta))}{\sin(\theta)}e^{i\varphi}\psi_1 = \frac{2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}e^{i\varphi}\psi_1 = \mathrm{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\varphi}\psi_1$$

Находим спинор :

$$\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\varphi} \end{bmatrix}\psi_1.$$

Условие нормировки :

$$C^2\begin{bmatrix} 1 & \mathrm{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\varphi} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\varphi} \end{bmatrix}\int_V |\psi_1|^2\,\mathrm{d}V = 1$$

Отсюда :

$$C^2\left(1+\mathrm{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)=C^2\left(1+\frac{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)=\frac{C^2}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}=1.$$

Окончательно :

$$C=\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

В результате нормированный спинор имеет такой вид :

$$\boldsymbol{\Psi}_{s_n=\frac{1}{2}}=\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\varphi}\end{bmatrix}\psi_1$$

Покажите по аналогии, что для второго состояния имеет место соотношение :

$$\boldsymbol{\Psi}_{s_n=-\frac{1}{2}}=\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\varphi}\end{bmatrix}\psi_1$$

Согласно общему правилу квантовой механики, для отыскания вероятности появления в эксперименте проекции $s_n=\pm\frac{1}{2}$ *, необходимо решить два уравнения* :

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\psi_1=A_1\boldsymbol{\Psi}_{s_n=\frac{1}{2}}+A_2\boldsymbol{\Psi}_{s_n=-\frac{1}{2}}=A_1\begin{bmatrix}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\varphi}\end{bmatrix}\psi_1+A_2\begin{bmatrix}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\varphi}\end{bmatrix}\psi_1,$$

$$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\psi_1=B_1\boldsymbol{\Psi}_{s_n=\frac{1}{2}}+B_2\boldsymbol{\Psi}_{s_n=-\frac{1}{2}}=B_1\begin{bmatrix}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\varphi}\end{bmatrix}\psi_1+B_2\begin{bmatrix}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\varphi}\end{bmatrix}\psi_1.$$

Для первого исходного состояния имеем :

$$A_1\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)+A_2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)=1,$$

$$A_1\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\varphi}+A_2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\varphi}=0.$$

Решаем :

$$A_2=-A_1\mathrm{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

и окончательно :

$$A_1=\cos\left(\frac{\theta}{2}\right),\ A_2=-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Следовательно, вероятность обнаружения системы в состоянии с волновой функцией $\boldsymbol{\Psi}_{s_n=\frac{1}{2}}$ и $\boldsymbol{\Psi}_{s_n=-\frac{1}{2}}$, *если исходное состояние есть* $\boldsymbol{\Psi}_{s_z=\frac{1}{2}}$, *равны соответственно* :

$$\boldsymbol{P}_{s_n=\frac{1}{2}}=(A_1)^2=\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right),\ \ \boldsymbol{P}_{s_n=-\frac{1}{2}}=(A_2)^2=\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

По аналогии вычислите вероятности для исходного состояния $\boldsymbol{\Psi}_{s_z=-\frac{1}{2}}$.

Задача 5.3 ГКК

5.3. Найти собственные значения оператора $\hat{f} = a + \mathbf{b}\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ (a — число, $\mathbf{b}$ — обычный вектор, $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ — матрицы Паули).

Вычисление собственных значений и собственных волновых функций оператора:

$$\hat{f} = a\hat{1} + b_x\hat{s}_x + b_y\hat{s}_y + b_z\hat{s}_z = a\hat{1} + (\boldsymbol{b}, \hat{\boldsymbol{s}}),$$

сводится к решению задачи на собственные значения и вектора матрицы, соответствующей оператору $\hat{f}$:

$$\hat{f} = a\hat{1} + b_x\hat{s}_x + b_y\hat{s}_y + b_z\hat{s}_z = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}b_x\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}b_y\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}b_z\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2a + b_z & b_x - ib_y \\ b_x + ib_y & 2a - b_z \end{bmatrix}$$

В результате необходимо решить задачу :

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2a + b_z & b_x - ib_y \\ b_x + ib_y & 2a - b_z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}$$

Эта задача сводится к двум алгебраическим уравнениям :

$$(2a + b_z)\psi_1 + (b_x - ib_y)\psi_2 = 2\lambda\psi_1,$$

$$(b_x + ib_y)\psi_1 + (2a + b_z)\psi_2 = 2\lambda\psi_2.$$

Для совместности этой системы определитель матрицы должен быть равен нулю :

$$(2a + b_z - 2\lambda)(2a - b_z - 2\lambda) - (b_x + ib_y)(b_x - ib_y) = 0$$

Для λ *имеем уравнение* :

$$4\lambda^2 - 8a\lambda + 4a^2 - b_x^2 - b_y^2 - b_z^2 = 0$$

Отсюда :

$$\lambda_1 = a + \frac{1}{2}\sqrt{\boldsymbol{b}^2},\ \ \lambda_1 = a - \frac{1}{2}\sqrt{\boldsymbol{b}^2}$$

Здесь $\boldsymbol{b}^2 = b_x^2 + b_y^2 + b_z^2$

Проверяем :

```
> Eq:=expand((2*a+b[z]-2*lambda)*(2*a-b[z]-2*lambda)-b[x]^2-b[y]^2);
```

$$Eq := 4a^2 - 8a\lambda + 4\lambda^2 - b_x^2 - b_y^2 - b_z^2 \tag{2}$$

```
> solve(Eq,lambda);
```

$$a + \frac{1}{2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2},\ a - \frac{1}{2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} \tag{3}$$

Находим собственные вектора. Поскольку при найденных значениях собственных чисел уравнения совместны, можно использовать любое из них. Имеем для λ_1:

$$\psi_2 = -\frac{2a + b_z - 2\lambda_1}{b_x - ib_y}\psi_1 = -\frac{b_z - \sqrt{\boldsymbol{b}^2}}{b_x - ib_y}\psi_1.$$

Это решение соответствует спинору:

$$\boldsymbol{\Psi}_+ = \begin{bmatrix} 1 \\ -\dfrac{b_z - \sqrt{\boldsymbol{b}^2}}{b_x - ib_y} \end{bmatrix}\psi_1(x, y, z, t).$$

Аналогично для λ_2:

$$\psi_2 = -\frac{2a + b_z - 2\lambda_2}{b_x - ib_y}\psi_1 = -\frac{b_z + \sqrt{\boldsymbol{b}^2}}{b_x - ib_y}\psi_1$$

Соответственно:

$$\boldsymbol{\Psi}_- = \begin{bmatrix} 1 \\ -\dfrac{b_z + \sqrt{\boldsymbol{b}^2}}{b_x - ib_y} \end{bmatrix}\psi_1(x, y, z, t)$$

Найдите самостоятельно нормированный вид этих спиноров.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 5.9 ГКК

5.9. Найти явное выражение оператора вида $\hat{F} = F(a + \mathbf{b}\hat{\sigma})$, где $F(x)$ — произвольная функция переменной x, $a = \text{const}$, $\mathbf{b}$ — обычный вектор.

Рассмотреть, в частности, оператор $\hat{F} = \exp(i\mathbf{a}\hat{\sigma})$.

Пользуясь тем, что функция от оператора является рядом Тейлора функции *F(x)*, решите задачу самостоятельно. Аналогом служит задача из задания 1.

Задачи 3.4 (а,б,в) ГКК

Вычислите средние значения $<\hat{s}_x \hat{s}_y>$ *в состояниях* с *фиксированной проекцией спина ось z*.