```
> restart;
```

```
=====================================================================
|              РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ                  |
|            (В.М.ГАЛИЦКИЙ, Б.М.КОРНАКОВ, В.И.КОГАН.                |
|                 ЗАДАЧИ ПО КВАНТОВОЙ МЕХНИКЕ                       |
|                         Журавлев В.М.                             |
|           Ульяновский государственный университет, 2020          |
=====================================================================
```

СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ОПЕРАТОРОВ

```
> with(plots):
  with(plottools):
```

Формат графиков

```
> frm:=axes=boxed,gridlines=true,labeldirections=[horizontal,vertical],labelfont=[TIMES,BOLD,16],titlefont=[TIMES,BOLD,18],symbol=solidcircle,symbolsize=18,size=[900,600];
```

$$frm := axes = boxed, gridlines = true, labeldirections = [horizontal, vertical], labelfont = [TIMES, BOLD, 16], titlefont = [TIMES, BOLD, 18], symbol = solidcircle, symbolsize = 18, size = [900, 600] \quad (1)$$

Определение собственных функций

1. Собственной функцией оператора $\hat{A}$ называется функция $\psi_\lambda(x)$ из пространства $\mathcal{H}: \psi_\lambda \in \mathcal{H}$, которая является решением уравнения:

$$\hat{A}\psi_\lambda = \lambda\psi_\lambda$$

Здесь $\psi_\lambda(x)$ - собственная функция, отвечающая собственному числу λ.

3. Собственные функции эрмитового оператора, отвечающие различным собственным числам, ортогональны
4. Собственные функции эрмитового оператора вещественны

Определение действия операторов

```
> oIphi:=(x)->phi(-x);
```

$$oIphi := x \to \phi(-x) \quad (2)$$

```
> oTphi:=(x,a)->phi(x+a);
```

$$oTphi := (x, a) \to \phi(x + a) \quad (3)$$

```
> oMphi:=(x,c)->phi(c*x)/sqrt(c);
```

$$oMphi := (x, c) \to \frac{\phi(c\,x)}{\sqrt{c}} \quad (4)$$

```
> oDxphi:=(x)->subs(z=x,diff(phi(x),x));
```

$$oDxphi := x \to subs\left(z = x, \frac{d}{dx}\phi(x)\right) \quad (5)$$

```
> oPxphi:=(x,hbar)->-I*hbar*oDxphi(x);
```

$$oPxphi := (x, \hbar) \to -I\,\hbar\,oDxphi(x) \quad (6)$$

```
> oEkphi:=(x,hbar,m)->-hbar^2*subs(z=x,diff(phi(x),x,x))/(2*m);
```

$$oEkphi := (x, \hbar, m) \to -\frac{1}{2}\,\frac{\hbar^2\,subs\left(z = x, \frac{d^2}{dx^2}\phi(x)\right)}{m} \quad (7)$$

```
> oIeta:=(x)->eta(-x);
```
$$oIeta := x \to \eta(-x) \tag{8}$$

```
> oTeta:=(x,a)->eta(x+a);
```
$$oTeta := (x, a) \to \eta(x + a) \tag{9}$$

```
> oMeta:=(x,c)->eta(c*x)/sqrt(c);
```
$$oMeta := (x, c) \to \frac{\eta(c\,x)}{\sqrt{c}} \tag{10}$$

```
> oDxeta:=(x)->subs(z=x,diff(eta(x),x));
```
$$oDxeta := x \to subs\left(z = x, \frac{d}{dx}\eta(x)\right) \tag{11}$$

```
> oPxeta:=(x,hbar)->-I*hbar*oDxeta(x);
```
$$oPxeta := (x, \hbar) \to -I\,\hbar\; oDxeta(x) \tag{12}$$

```
> oEketa:=(x,hbar,m)->-hbar^2*subs(z=x,diff(eta(x),x,x))/(2*m);
```
$$oEketa := (x, \hbar, m) \to -\frac{1}{2}\,\frac{\hbar^2\, subs\left(z = x, \frac{d^2}{dx^2}\eta(x)\right)}{m} \tag{13}$$

```
>
```

Собственные функции оператор инверсии

$$\hat{I}\,\psi(x) = \psi(-x) = \lambda\psi(x)$$

$$\hat{I}^{\,2}\psi(x) = \psi(x) = \lambda^{2}\psi(x)$$

$$\lambda^{2} = 1$$

Отсюда $\lambda = \pm 1$,

Собственные функции :

Четные : $\psi(-x) = \psi(x)$

Нечетные $\psi(-x) = -\psi(x)$

```
> phi:=(x)->sin(k*x);
```
$$\phi := x \to \sin(k\,x) \tag{14}$$

```
> oIphi(x)+phi(x);
```
$$0 \tag{15}$$

Собственные функции оператора сдвига (трансляции)

$$\hat{T}_a\,\psi(x;\lambda) = \psi(x + a;\lambda),\ \mathrm{Im}(a) = 0$$

$$\hat{T}_a\,\psi(x;\lambda) = \psi(x + a;\lambda) = \lambda\psi(x;\lambda),$$

$$\psi(x + a;\lambda) = \lambda\psi(x;\lambda)$$

$$\psi(x;\lambda) = e^{kx}P(x),$$

Здесь $k = \dfrac{(\ln\lambda)}{a}$ – *произвольное комплексное число,*

$P(x)$ – *произвольная периодическая функция* с *периодом равным* a : $P(x + a) = P(x)$,

$\lambda = e^{ka}$ – *собственное число.*

Собственные функции оператора масштабирования

$$\widehat{M}_c \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{c}} \psi(cx),\ c > 0$$

$$\widehat{M}_c \psi(x, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{c}} \psi(cx, \lambda) = \lambda \psi(x, \lambda)$$

$$\frac{1}{\sqrt{c}} \psi(cx, \lambda) = \lambda \psi(x, \lambda)$$

$$\psi(x, \lambda) = k\, x^n$$

$$\frac{1}{\sqrt{c}} k\, (cx)^n = \lambda k\, x^n \quad \rightarrow \ \lambda = \frac{1}{\sqrt{c}} (c)^n$$

Здесь n - произвольное комплексное число

Собственные функции оператора дифференцирования

$$\widehat{\mathrm{D}}_x \psi(x) = \frac{d}{dx} \psi(x),$$

$$\widehat{\mathrm{D}}_x \psi(x; \lambda) = \frac{d}{dx} \psi(x; \lambda) = \lambda \psi(x; \lambda)$$

$$\psi(x; \lambda) = Ae^{\lambda x}$$

Здесь λ - произвольное комплексное число

Собственные функции оператора импульса

$$\widehat{p}_x \psi(x) = -i\hbar \frac{d}{dx} \psi(x),$$

$$\widehat{p}_x \psi(x; \lambda) = -i\hbar \frac{d}{dx} \psi(x; \lambda) = p \psi(x; p)$$

$$\psi(x; p) = \psi_p(x) = Ae^{\frac{ipx}{\hbar}}$$

Здесь p - вещественное число - значение импульса частицы в состоянии с фиксированным импульсом. Функция $\psi_p(x)$ представляет собой волну де Бройля.

Согласно выводу вида оператора импульса нормировочный коэффициент А был выбран в следующем виде :

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}$$

Напомним общие принципы квантовой механики:

1. Операторы, которые сопоставляются реальным динамическим переменным, должны быть самосопряженными или эрмитовыми.
2. Собственные функции этих эрмитовых операторов представляют собой состояния с фиксированым значением соответствующей динамической переменной, которая совпадает с собственным числом этого оператора.
3. Собственные функции эрмитова оператора, отвечающие различным собственным числам, ортогональны:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\psi_\lambda\right)^* \psi_\mu \, dx = 0,\ если\ \lambda \neq \mu$$

4. Собственные числа эрмитовых операторов вещественны

Решение задач

> # Задача 1.19 ГКК

1.19. В состоянии, описываемом волновой функцией вида

$$\Psi(x) = C\exp\left[\frac{ip_0x}{\hbar} - \frac{(x-x_0)^2}{2a^2}\right],$$

где p_0, x_0, a — вещественные параметры, найти функцию распределения по координатам частицы. Определить средние значения и флуктуации координаты и импульса частицы.

\>

1. Находим нормировку волновой функции

```
> Phi:=(x,p0,s,x0)->C*exp(I*p0*x/hbar-(x-x0)^2/(2*s^2));
```

$$\Phi := (x, p0, s, x0) \rightarrow C\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{I}\,p0\,x}{\hbar} - \frac{1}{2}\frac{(x-x0)^2}{s^2}} \qquad (16)$$

Устанавливаем свойства переменных

```
> assume(p0,'real');
  assume(x0,'real');
  assume(s,'real',s>0);
  assume(hbar,'real');
```

Вычисляем нормировочный коэффициент:

Вычисляем нормировочный коэффициент:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x)^*\Phi(x)\,\mathrm{d}x = C^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-x0)^2}{s^2}}\,\mathrm{d}x$$

Делаем замену переменных : y = x − x0, dy = dx : x = y + x0

$$C^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-x0)^2}{s^2}}\,\mathrm{d}x = C^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{s^2}}\,\mathrm{d}y = C^2 s\sqrt{\pi} = 1$$

Отсюда : $C = \dfrac{1}{\sqrt{s\sqrt{\pi}}}$

2. *Вычисляем* :

```
> simplify(int(conjugate(Phi(x,p0,s,x0))*Phi(x,p0,s,x0),x=-infinity..infinity));
```

$$1 \qquad (17)$$

Отсюда находим нормировку:

```
> C:=1/sqrt(sqrt(Pi)*s);
```

3. Вычисляем среднее значение координаты:

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x)^*x\Phi(x)\,\mathrm{d}x = C^2\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{(x-x0)^2}{s^2}}\,\mathrm{d}x$$

Делаем замену переменных : y = x − x0, dy = dx : x = y + x0

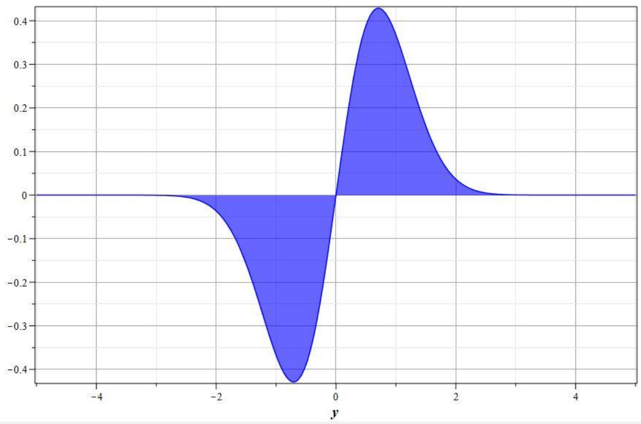
$$\frac{1}{s\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{(x-x0)^2}{s^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{s\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(y+x0)e^{-\frac{y^2}{s^2}}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{s\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} ye^{-\frac{y^2}{s^2}}\,\mathrm{d}y + x0\frac{1}{s\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{s^2}}\,\mathrm{d}y = x0$$

Имеем :

$$\frac{1}{s\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} ye^{-\frac{y^2}{s^2}}\,\mathrm{d}y = 0 -$$ ***подынтегральная функция нечетная***

$$\frac{1}{s\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{s^2}}\, dy = 1$$ – ***это в чистом виде условие нормировки***

```
> plot(y*exp(-y^2),y=-5..5,filled=true,color=blue,frm); # Визуальная проверка нечетности
```




```
> int(C^2*exp(-y^2/s^2),y=-infinity..infinity); #  Проверка нормировки
```

$$1 \qquad (19)$$

4. Проверяем явным вычислением:

```
> ax:=int(conjugate(Phi(x,p0,s,x0))*Phi(x,p0,s,x0)*x,x=-infinity..infinity);
```

$$ax := x0\sim \qquad (20)$$

```
>
```

$$x0\sim \qquad (21)$$

Среднее значение координаты равно x0: $\bar{x} = x0$

5. Вычисляем среднее значение импульса:

$$\bar{x} = -i\hbar\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x)^* \frac{\partial}{\partial x}\Phi(x)\, dx = -i\hbar C^2\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{ip0}{\hbar} - (x - x0)\right) e^{-\frac{(x-x0)^2}{s^2}}\, dx$$

Делаем замену переменных : y = x − x0, dy = dx : x = y + x0

$$\frac{1}{s\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-x0)^2}{s^2}}\, dx = \frac{p0}{s\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{s^2}}\, dy + \frac{i\hbar}{s\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y e^{-\frac{y^2}{s^2}}\, dy = p0$$

Имеем :

$$\frac{1}{s\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y e^{-\frac{y^2}{s^2}}\, dy = 0$$ – ***подынтегральная функция нечетная***

$$\frac{1}{s\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{s^2}}\, dy = 1$$ – ***это в чистом виде условие нормировки***

6. Проверяем явным вычислением

```
> ap:=int(conjugate(Phi(x,p0,s,x0))*(-I*hbar*subs(z=x,diff(Phi(z,p0,s,x0),z))),x=-
  infinity..infinity);
```

$$ap := p0\sim \qquad (22)$$

Среднее значение импульса равно p0: $\bar{p} = p0$

7. Вычисляем распределение вероятностей по импульсам.

Для вычисления вероятностей обнаружить с систему с импульсом p в заданном состоянии, необходимо волновую функцию представить в виде суперпозиции по состояниям с фиксированным импульсом:

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{\infty} C(p)\psi_p(x)\,dp = \int_{-\infty}^{\infty} C(p)\,\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{ipx}{\hbar}}\,dp$$

Отсюда коэффиценты $C(p)$ *вычисляются* с *помощью обратного преобразования Фурье* :

$$C(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x)\,\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{ipx}{\hbar}}\,dx$$

Вычисляем :

$$C(p) = \frac{1}{s\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{ip0x}{\hbar} - \frac{(x-x0)^2}{2s^2}} e^{-\frac{ipx}{\hbar}}\,dx = \frac{1}{s\pi}\frac{1}{\sqrt{2\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-x0)^2}{2s^2}} e^{\frac{i(p0-p)x}{\hbar}}\,dx$$

Преобразуем показатель подынтегральной экспоненты к полному квадрату :

$$-\frac{(x-x0)^2}{2s^2} + \frac{i(p0-p)x}{\hbar} = -\frac{1}{2s^2}(x-z)^2 + q$$

Отсюда находим :

$$\frac{z}{s^2} = \frac{x0}{s^2} - \frac{i(p0-p)}{\hbar}, \qquad q = \frac{z^2}{2s^2} - \frac{x0^2}{2s^2}$$

$$z = x0 - is^2\frac{(p0-p)}{\hbar}, \qquad z^2 = x0^2 - is^2\frac{(p0-p)}{\hbar} - s^4\frac{(p0-p)^2}{2\hbar^2}$$

$$q = -i\frac{(p0-p)}{\hbar} - s^2\frac{(p0-p)^2}{2\hbar^2}$$

В *результате получаем следующую формулу* :

$$C(p) = \frac{1}{s\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^q \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-z)^2}{2s^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-i\frac{(p0-p)}{\hbar} - s^2\frac{(p0-p)^2}{2\hbar^2}}$$

Отсюда находим , что плотность вероятности найти частицу в состоянии $\Phi(x)$ с импульсом p определяется формулой:

$$\rho(p|\Phi)=|C(p)|^2 = \frac{1}{4\pi\hbar} e^{-s^2\frac{(p-p0)^2}{\hbar^2}}$$

Остальные подзадачи данной задачи доделываете самостоятельно.

>

Задача 1.25 ГКК

1.25. Найти собственные функции и собственные значения физической величины, представляющей линейную комбинацию одноименных компонент импульса и координаты: $\hat{f} = \alpha\hat{p} + \beta\hat{x}$. Убедиться в ортогональности полученных функций и нормировать их соответствующим образом. Рассмотреть предельные случаи: $\alpha \to 0$; $\beta \to 0$.

Собственные функции опертора

$$\hat{f} = \alpha\hat{p} + \beta x = -i\hbar\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta x$$

удовлетворяют уравнению :

$$\hat{f}\psi_\lambda = \left(\alpha\hat{p} + \beta x\right)\psi_\lambda = -i\hbar\alpha\frac{\partial}{\partial x}\psi_\lambda + \beta x\psi_\lambda = \lambda\psi_\lambda$$

Разделяя переменные, получаем :

$$\frac{d\psi_\lambda}{\psi_\lambda} = -\frac{i(\beta x - \lambda)dx}{\alpha\hbar}$$

Отсюда :

$$\ln\psi_\lambda - lnC = -\frac{i}{\alpha\hbar}\left(\frac{\beta x^2}{2} - \lambda x\right)$$

или

$$\psi_\lambda = C\exp\left\{-\frac{i}{\alpha\hbar}\left(\frac{\beta x^2}{2} - \lambda x\right)\right\}$$

Эти функции в *случае вещественности* β *не нормируются на бесконечном интервале*, а *оператор* $\hat{f}$ *обладает непрерывным спектром*. В *случае, если* $\beta = ib$, *где* b – *вещественное число*, *волновая функция нормируется, но оператор* $\hat{f}$ *оказывается неэрмитовым*!

Задача 1.27 ГКК

1.27. Эрмитов оператор (матрица) $\hat{f}$ имеет N различных собственных значений. Показать, что оператор $\hat{f}^N$ линейно выражается через операторы $\hat{I}, \hat{f}, \ldots, \hat{f}^{N-1}$. В качестве примера рассмотреть оператор отражения (инверсии) $\hat{I}$.

Решение

Пусть $\hat{f}$ – *оператор, имеющий ровно* $N < \infty$ *собственных значений.*
Обозначим эти собственные значения через f_n, $n = 1, \ldots, N$.

Такой оператор эквивалентен матрице размерности $N \times N$. *С помощью преобразования подобия матрицу можно всегда привести* к *диагональному виду,* *вместе со всеми матрицами, являющимися степенью матрицы* f. В *таком базисе* :

$$\hat{f} = \begin{bmatrix} f_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & f_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & f_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & f_N \end{bmatrix}$$

В *этом случае имеем* :

$$(\hat{f})^N = \begin{bmatrix} f_1^N & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & f_2^N & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & f_3^N & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & f_N^N \end{bmatrix}$$

Числа f_n^N *можно формально представить* в *виде следующей системы алгебраических соотношений* :

$$\begin{aligned} & f_1^N = c_0 + c_1 f_1 + c_2 f_1^2 + \ldots + c_{N-1} f_1^{N-1}, \\ & f_2^N = c_0 + c_1 f_2 + c_2 f_2^2 + \ldots + c_{N-1} f_2^{N-1}, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & f_N^N = c_0 + c_1 f_N + c_2 f_N^2 + \ldots + c_{N-1} f_N^{N-1}. \end{aligned} \qquad (1)$$

По условию задачи все собственные числа отличаются друг от друга.

Поэтому последнюю систему можно рассматривать как линейную алгебраическую систему относительно N *чисел* c_n, $n = 1,\ldots, N$ с *невырожденной матрицей* :

$$\hat{F} = \begin{bmatrix} 1 & f_1 & f_1^2 & \ldots & f_1^{N-1} \\ 1 & f_2 & f_2^2 & \ldots & f_2^{N-1} \\ 1 & f_3 & f_3^2 & \ldots & f_3^{N-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & f_N & f_N^2 & \ldots & f_N^{N-1} \end{bmatrix}$$

Следовательно, числа c_n, $n = 1,\ldots, N$ *всегда могут быть найдены из системы* (1).

Нетрудно видеть, что числа f_N^k *являются собственными числами матриц* $(\hat{f})^k$.

Тогда систему можно записать в *матричном виде так* :

$$\hat{f}^N = c_0 \hat{1} + c_1 \hat{f} + c_2 \hat{f}^2 + \ldots + c_{N-1} \hat{f}^{N-1}$$

Что и *требовалось доказать.*

Задача 1.28 ГКК

1.28. Эрмитов оператор $\hat{f}(\lambda)$, обладающий дискретным спектром собственных значений, зависит от некоторого параметра λ.

Доказать соотношение

$$\frac{\partial f_n(\lambda)}{\partial \lambda} = \overline{\frac{\partial \hat{f}(\lambda)}{\partial \lambda}},$$

в котором индекс n нумерует собственные значения, а усреднение в правой части равенства проводится по состоянию $\Psi_n(\lambda; q)$ *).

Решение

Собственные функции $\psi_f(x;\lambda)$ *оператора* $\hat{f}(\lambda)$, *зависящего от параметра* λ, *также зависят от этого параметра, как* и *собственные числа* $f(\lambda)$, *им соответствующие* :

$$\hat{f}(\lambda)\psi_f(x;\lambda) = f(\lambda)\psi_f(x;\lambda)$$

Предполааегся, что функции $\psi_f(x;\lambda)$ *нормированы*, т.е.:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\psi_f(x;\lambda)\right)^*\psi_f(x;\lambda)dx = 1$$

Умножая это уравнение на $\left(\psi_f(x)\right)^*$ и *интегрируя полученный результат от* $-\infty$ *до* ∞, *находим среднее значение оператора* $<\hat{f}(\lambda)>$ в *состояниях* $\psi_f(x;\lambda)$:

$$\langle \hat{f}(\lambda)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\psi_f(x;\lambda)\right)^*\hat{f}(\lambda)\psi_f(x;\lambda)\mathrm{d}x = f(\lambda)\int_{-\infty}^{\infty}\left(\psi_f(x;\lambda)\right)^*\psi_f(x;\lambda)dx = f(\lambda)$$

Отсюда :

$$\frac{d}{d\lambda}\langle \hat{f}(\lambda)\rangle = \frac{d}{d\lambda}f(\lambda)$$

$\hat{f}(\lambda)$ **(25)**

Задача 1.34 ГКК

1.34. Как известно, эрмитовы операторы (точнее, самосопряженные) обладают следующими свойствами: собственные значения таких операторов — вещественные числа; собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны и образуют полную систему. Если же линейный оператор не является эрмитовым, то его собственные значения и собственные функции могут обладать самыми различными свойствами. Следующие ниже примеры, в которых требуется найти собственные значения и собственные функции указанных неэрмитовых операторов и выяснить их свойства, иллюстрируют эти различные возможности:

а) $x - d/dx$; б) $x + d/dx$; в) $\hat{a} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; г) $\hat{b} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение

Собственные функции $\psi_f(x)$ *оператора* $\hat{f} = x - \varepsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ $(\varepsilon = \pm 1)$ *удовлетворяют уравнению* :

$$\hat{f}\psi_f(x) = \left(x - \varepsilon\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)\psi_f(x) = f\psi_f(x)$$

Интегрируем это уравнение, разделяя переменные :

$$\frac{d\psi_f(x)}{\psi_f(x)} = \varepsilon(x - f)dx$$

Отсюда находим :

$$\ln\psi_f(x) = lnC + \varepsilon\left(\frac{x^2}{2} - fx\right)$$

или

$$\psi_f(x) = Cexp\left\{\varepsilon\left(\frac{x^2}{2} - fx\right)\right\}$$

При $\varepsilon = +1$ *данная функция не нормируема*, а *при* $\varepsilon = -1$ – *нормируема. Поэтому при* $\varepsilon = +1$ *функции при различных значениях* f и f' *неортогональны. При* $\varepsilon = -1$ *имеем* :

$$\left(\psi_f,\psi_{f'}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\psi_f(x)\right)^* \psi_{f'}(x)\,\mathrm{d}x = C^2\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\left(x^2-(f+f')x\right)\right\}\mathrm{d}x$$

Делаем замену переменных $y = x - \dfrac{(f+f')}{2}$. *Тогда имеем* :

$$\left(\psi_f,\psi_{f'}\right) = C^2\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\left(x^2-(f+f')x\right)\right\}\mathrm{d}x = C^2 e^{\frac{(f+f')^2}{4}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-y^2\right\}\mathrm{d}y = C^2\, e^{\frac{(f+f')^2}{4}}\sqrt{\pi}$$

Последнее выражение не обращается в нуль ни при каких значениях f и f' .

Матричный оператор $\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *имеет собственные вектора, удовлетворяющие уравнению* :

$$\hat{A}\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{bmatrix}$$

Это уравнение эквивалентно одному уравнению :

$$\psi_1 + i\psi_2 = \lambda\psi_1$$

Отсюда находим :

$$\psi_2 = -i(\lambda-1)\psi_1$$

При этом λ *является произвольным.*

Все собственные вектора имеют такой вид : $\begin{bmatrix}\psi_1(\lambda)\\ \psi_2(\lambda)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ i(\lambda-1)\end{bmatrix}\psi_1(\lambda)$

Нормировка : $\begin{bmatrix}\left(\psi_1(\lambda)\right)^* & \left(\psi_2(\lambda)\right)^*\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi_1(\lambda)\\ \psi_2(\lambda)\end{bmatrix} = \left|\psi_1(\lambda)\right|^2\left(1+(\lambda-1)^2\right) = 1$

Отсюда : $\left|\psi_1(\lambda)\right|^2 = \dfrac{1}{1+(\lambda-1)^2}$.

Проверяем ортогональность для различных значений λ. *Имеем* :

$$\begin{bmatrix}\left(\psi_1(\lambda)\right)^* & \left(\psi_2(\lambda)\right)^*\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi_1(\lambda')\\ \psi_2(\lambda')\end{bmatrix} = \left(\psi_1(\lambda)\right)^*\psi_1(\lambda') + \left(\psi_2(\lambda)\right)^*\psi_2(\lambda') =$$

$$= \left(\psi_1(\lambda)\right)^*\psi_1(\lambda')\left(1+(\lambda-1)\cdot(\lambda'-1)\right).$$

Если λ и λ' - *вещественные числа, то условие ортогональности будет иметь такой вид* :

$$1+(\lambda-1)\cdot(\lambda'-1) = 0$$

$$\lambda' = 1 + \frac{1}{(1-\lambda)}$$

Таким образом, для этого оператора существует бесконечно много собственных векторов, часть из которых ортогональны, а *часть нет.*

Вариант **г** *рассмотрите сами.*