УДК 532.5:534.1

© 1994 г. В.М. Журавлев

О НОВОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ДВУМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Получено новое представление для уравнений динамики несжимаемой жидкости на вращающейся плоскости и рассмотрены его основные свойства. На основании этого построены новые точные решения, описывающие стационарные течения идеальной жидкости, в частности точные стационарные решения для волн вблизи критического слоя.

1. Уравнения движения несжимаемой жидкости на вращающейся плоскости при наличии внешнего трения и вязкости, можно записать в виде

$$u_t + uu_x + \upsilon u_y - f_0\upsilon + p_x - \kappa(t)u - \nu\Delta u = 0$$

$$\upsilon_t + u\upsilon_x + \upsilon\upsilon_y + f_0 u + p_y - \kappa(t)\upsilon - \nu\Delta\upsilon = 0 \tag{1.1}$$

$$u_x + \upsilon_y = 0(\Delta = \partial^2 / \partial^2 x + \partial^2 / \partial^2 y)$$

Здесь $f_0 = \mathrm{const}$ – параметр Кориолиса, $\kappa = \kappa(t)$ – коэффициент внешнего трения, $p = p(x, y, t)$ – давление, нормированное на плотность $\rho = \mathrm{const}$, u, υ – компоненты скорости в декартовой системе координат (x, y), ν – коэффициент кинематической вязкости. Вводя функцию тока ψ: $u = \partial\psi/\partial y$, $\upsilon = -\partial\psi/\partial x$, традиционно из первых двух уравнений (1.1) исключают давление p перекрестным дифференцированием, что дает одно уравнение относительно функции тока

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\psi + \frac{\partial}{\partial x}\psi\frac{\partial}{\partial y}\Delta\psi - \frac{\partial}{\partial y}\psi\frac{\partial}{\partial x}\Delta\psi = \nu\Delta\Delta\psi + \kappa\Delta\psi \tag{1.2}$$

В случае стационарных невязких течений это уравнение приводится к виду

$$\Delta\psi = F(\psi) \tag{1.3}$$

где $F(\psi)$ – некоторая функция произвольного вида, определяемая граничными условиями. Уравнение (1.3), как правило, является отправной точкой для поисков точных решений уравнений динамики идеальной жидкости [1, 4, 5], интерес к которым в последнее время возрос в связи с успехом метода обратной задачи рассеяния (МОЗР) в теории интегрируемых нелинейных уравнений в частных производных [3].

Ниже предлагается другой подход к исследованию уравнений (1.1), основанный на последовательном их анализе как совокупности трех обобщенных дифференциальных законов сохранения потока импульса и массы. Этот подход в результате дает новое общее представление для уравнений (1.2) и (1.3), что приводит к некоторым новым точным соотношениям и точным решениям в теории течений несжимаемой жидкости.

При помощи функции тока ψ уравнения (1.1) можно переписать в форме дифференциального закона сохранения плотности потока импульса

$$\frac{\partial}{\partial y}(\psi_t - \nu\Delta\psi - \kappa\psi + uv) + \frac{\partial}{\partial x}(u^2 + f_0\psi + p) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(-\psi_t + \nu\Delta\psi + \kappa\psi + uv) + \frac{\partial}{\partial y}(v^2 + f_0\psi + p) = 0$$

эквивалентной следующим соотношениям:

$$u^2 + f_0\psi + p = -h_y, v^2 + f_0\psi + p = -g_x \tag{1.4}$$

$$\psi_t - \nu\Delta\psi - \kappa\psi + uv = h_x, \quad -\psi_t + \nu\Delta\psi + \kappa\psi + uv = g_y$$

где $h = h(x, y, t)$ и $g = g(x, y, t)$ – некоторые вспомогательные функции. При помощи подстановки

$$h = \frac{\partial}{\partial y}\ln\phi + h_0(x,y,t), \quad g = \frac{\partial}{\partial x}\ln\phi + g_0(x,y,t)$$

$$\psi = \ln\phi(x,y,z), \quad E(x,y,z) = 2(p + f_0\psi)$$

и после преобразований уравнения (1.4) приводятся к виду

$$E = -\phi^{-1}\Delta\phi + (h_{0y} + g_{0x})$$

$$\phi_t - (\nu\Delta\ln\phi - \kappa\ln\phi)\phi = (h_{0x} - g_{0y})\phi/2 \tag{1.5}$$

$$\phi_{xx} - \phi_{yy} = (h_{0y} - g_{0x})\phi, \quad -2\phi_{xy} = (h_{0x} + g_{0y})\phi$$

Последние три уравнения можно записать в более компактной комплексной форме

$$\phi_t - (\nu\Delta\ln\phi - \kappa\ln\phi)\phi = i(\overline{R}_z - R_{\bar z})\phi/2$$

$$2\phi_{zz} = R_z\phi, \quad 2\phi_{\bar z\bar z} = \overline{R}_{\bar z}\phi \quad R(z,\bar z,t) = ih_0 - g_0 \tag{1.6}$$

$$z = x + iy, \quad \partial_z = \frac{1}{2}\left(\partial_x - i\partial_x\right), \quad \Delta = 4\partial_z\partial_{\bar z}$$

Подстановка $R(z, \bar z, t) = \partial Q(z, \bar z, t)/\partial z$, где$Q(z, \bar z, t) = A(z, \bar z, t) + iB(z, \bar z, t)$, а функции $A(z, \bar z, t)$ и $B(z, \bar z, t)$ – действительные, приводит систему (1.6) к виду

$$\phi_t - (\nu\Delta\ln\phi - \kappa\ln\phi)\phi = \phi\Delta B/4 \tag{1.7}$$

$$2\phi_{zz} = Q_{zz}\phi, \quad 2\phi_{\bar z\bar z} = \overline{Q}_{\bar z\bar z}\phi$$

а первое уравнение системы (1.4) для E примет вид

$$E = -\phi^{-1}\Delta\phi + \Delta A/2 \tag{1.8}$$

Таким образом доказано, что исходная система уравнений (1.1) эквивалентна системе уравнений (1.6) или (1.7). Отсюда следует, что система (1.6) (или (1.7)) эквивалентна уравнению (1.2) и является некоторым нетривиальным его представлением, напоминающим представление Лакса в МОЗР [3]. В случае же стационарных невязких течений уравнение (1.3) при произвольной функции $F(\phi)$ должно быть эквивалентно паре уравнений

$$2\phi_{zz} = A_{zz}\phi, \quad 2\phi_{\bar z\bar z} = \overline{A}_{\bar z\bar z}\phi \tag{1.9}$$

при некоторой действительной функции $A(z, \bar z)$.

Эквивалентность уравнений (1.6) уравнению (1.2) и уравнений (1.9) уравнению (1.3) может быть установлена и другим способом, основанным на явном вычислении условий совместности пары уравнений (1.9) и соответствующей ей пары уравнений в (1.7). Для (1.9) это условие может быть записано в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\phi_{zz}}{\phi}\right)-\frac{\partial^2}{\partial \bar z^2}\left(\frac{\phi_{\bar z\bar z}}{\phi}\right)=\frac{1}{4}i\left[D_1\left(\frac{1}{\phi}D_2\phi\right)-D_2\left(\frac{1}{\phi}D_1\phi\right)\right]=0$$

$$D_1=\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\quad D_2=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в существовании следующего тождества, выполняющегося для любой дифференцируемой функции $\psi=\ln\phi$:

$$D_1\left(\frac{1}{\phi}D_2\phi\right)-D_2\left(\frac{1}{\phi}D_1\phi\right)\equiv\frac{\partial}{\partial y}\psi\frac{\partial}{\partial x}\Delta\psi-\frac{\partial}{\partial x}\psi\frac{\partial}{\partial y}\Delta\psi \tag{1.10}$$

которое и доказывает более элегантно факт эквивалентности (1.9) и (1.3). Используя аналогичные вычисления можно перейти от системы (1.7) или (1.6) к уравнению (1.2).

2. Одним из простейших применений полученного представления является возможность просто проанализировать ряд свойств исходной системы, что достаточно трудно сделать, исходя непосредственно из ее первоначального вида (1.1) или представления (1.2) – (1.3).

1°. Из (1.6) можно исключить внешнее трение и привести систему к более простому виду. Для этого положим

$$\phi=\phi'^{\alpha},\quad \alpha(t)=\alpha_0\exp\left\{\int\kappa(t)dt\right\},\quad \nu'(t)=4\alpha(t)\nu$$

$$R=2\alpha R'-2\alpha(\alpha-1)\frac{\partial}{\partial z}\ln\phi',\quad t'=\int\frac{dt}{\alpha(t)} \tag{2.1}$$

Тогда система (1.6) примет вид

$$\phi_t-\nu\phi\Delta\ln\phi=i(R_z-R_{\bar z})\phi/2$$

$$2\phi_{zz}=R_z\phi,\quad 2\phi_{\bar z\bar z}=\bar R_{\bar z}\phi$$

в которой опущен штрих у переменных. Отсюда также следует, что при $\kappa\equiv0$ преобразования (2.1) соответствуют масштабным преобразованиям переменных, так что, если $\phi(z,\bar z,t)$ – решение уравнений, то и функция $\phi^{\alpha}(z,\bar z,t)$ – решение уравнений (1.6).

2°. Система (1.1) инвариантна относительно перехода к системе отсчета движущейся относительно исходной поступательно с произвольной переменной скоростью $\mathbf{C}=(u_0(t),\upsilon_0(t))$. При этом силы инерции компенсируются перераспределением давления в системе. Соответствующие преобразования функций, входящих в систему (1.6), выглядят следующим образом

$$\begin{gathered}\phi\to\phi(z',\bar z',t')=\phi(z,\bar z,t)\exp\{(zc+\bar z c)/2\}\\ R\to R'(z',\bar z',t')=R(z,\bar z,t)-2c\ln\{\phi'\}+i(\bar z^2\dot c-c^2z)/2\\ z\to z'=z+i\int c(t)dt,\quad t'=t\\ c(t)=-\upsilon_0(t)-iu_0(t),\quad \dot c=dc/dt\end{gathered} \tag{2.2}$$

3°. Система (1.1) инвариантна относительно перехода к системе отсчета равномерно вращающейся с постоянной угловой скоростью ω_0 относительно исходной системы отсчета

$$\phi \to \phi(z',\bar z',t') = \phi(z,\bar z,t)\exp\left\{\left(-\omega_0 z\bar z - 4\nu\omega_0 t\right)/2\right\}$$

$$R \to R'(z',\bar z',t') = \left[R(z,\bar z,t) - 4\omega_0\bar z\ln\phi' - 2\bar z^2 z\omega_0\right]\exp\left\{-2i\omega_0 t\right\}$$

$$z \to z' = z\exp\left\{2i\omega_0 t\right\},\quad t' = t,\ \mathrm{Im}\left\{\omega_0\right\} = 0,\quad \omega_0 = \mathrm{const} \tag{2.3}$$

В этом случае силы инерции вновь компенсируются перераспределением давления в системе.

Для того чтобы в дальнейшем постоянно не указывать на существование нестационарных решений, связанных с рассмотренными выше движениями всей системы отсчета в целом, будем называть стационарными все решения, для которых найдется подходящая система отсчета, связанная с исходной преобразованиями (2.2) – (2.3), такая, что в ней $\phi'_{t'} = 0$, т.е. $\phi(z',\bar z') = \phi(z,\bar z,t)$, где z', $\bar z'$ – комплексные координаты в новой системе отсчета.

4°. Система (1.1) имеет интеграл Коши–Лагранжа, соответствующий потенциальному течению жидкости.

$$2\eta_t + u^2 + \upsilon^2 + E = \mathrm{const} \tag{2.4}$$

где η – потенциал течения. Класс решения, описывающий этот тип течений в рамках данного подхода, параметризуется следующим образом

$$\phi(z,\bar z,t) = \phi_0(z,t)\bar\phi_0(\bar z,t) = \left|\phi_0(z,t)\right|^2$$

$$R(z,\bar z,t) = r(z,t) + \bar q(\bar z,t) \tag{2.5}$$

где функции $r(z, t)$, $q(z, t)$ и $\phi_0(z, t)$ связаны двумя уравнениями

$$\phi_{0zz} = r_z\phi_0,\quad \phi_{0t} = q_z\phi_0 \tag{2.6}$$

так, что одна из функций оказывается произвольной. Потенциал течения в этом случае равен $\eta = i\ln\{\phi_0(z,t)/\bar\phi_0(\bar z,t)\}$. Отметим также известный факт, что решения уравнений (2.6) описывают чисто безвихревое движение жидкости, если функция ϕ_0 аналитична во всей комплексной плоскости. Если же она имеет полюсы, то соответствующие решения будут описывать потенциальные течения с сингулярными вихрями.

Аналогом интеграла Коши–Лагранжа (2.4) для движения жидкости с отличной от нуля завихренностью $\omega = \Delta\psi$ является соотношение

$$u^2 + \upsilon^2 + E + \omega + \Delta A/2 = 0 \tag{2.7}$$

которое следует из уравнения (1.8). Это точное соотношение играющее роль интеграла энергии, справедливо как в случае идеальной так и вязкой жидкости.

3. Полученные представления дают естественный способ построения некоторых типов точных решений исходных уравнений. Именно для анализа системы (1.6), можно воспользоваться тем, что два последних уравнения этой системы представляют собой обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка. Поэтому каждое из этих уравнений по отдельности имеет два линейно независимых решения. Если одно из них имеет решения ϕ_1 и ϕ_2, то второе – комплексно сопряженные им решения $\bar\phi_1$ и $\bar\phi_2$. Необходимым условием того, чтобы система (1.6) была эквивалентна исходной системе (1.1), является требование, что бы хотя бы одно из линейно независимых решений этих уравнений было действительным, т.е. либо $\phi_1 = \bar\phi_1$, либо $\phi_2 = \bar\phi_2$. Наиболее простой случай, соответствует редукции

$$\phi_1 = \bar\phi_1,\quad \phi_2 = \bar\phi_2 \tag{3.1}$$

Можно проверить, что решения этого типа в случае идеальной жидкости являются стационарными. Соотношения (3.1) означают коммутативность операторов

$$L = \partial^2 / \partial z^2 - R_z, \quad L = \partial^2 / \partial \bar{z}^2 - \bar{R}_{\bar{z}}$$

Прямое вычисление коммутатора этих операторов приводит к условию $R_z = f(z)$, $\bar{R}_{\bar{z}} = \bar{f}(\bar{z})$, что при отличной от нуля завихренности эквивалентно условию стационарности течения в соответствии с данным выше определением.

Простейшее решение этого типа может быть сконструировано из решений уравнения (2.6). Пусть $\phi_1(z)$ и $\phi_2(z)$ – два линейно независимых решений уравнения (2.6) для некоторой функции $R(z,\bar{z}) = r(z) + \bar{q}(\bar{z})$. В этом случае простейшим стационарным решением, удовлетворяющим условию (3.1) будет функция

$$\Phi(z,\bar{z}) = \alpha|\phi_1(z)|^2 + \beta|\phi_2(z)|^2 + \gamma\phi_1(z)\bar{\phi}_2(\bar{z}) + \bar{\gamma}\phi_2(z)\bar{\phi}_1(\bar{z}) \tag{3.2}$$

где α, β – действительные, а γ – комплексная постоянная. Вычислим завихренность ω для функции тока $\psi = \ln\Phi(z,\bar{z})$: $\omega = \Delta\{\ln \Phi\}$. Подставляя в эту формулу соотношение (3.2) получаем

$$\omega = \left(\alpha\beta - |\gamma|^2\right)|\sigma|^2\Phi^{-2} = \left(\alpha\beta - |\gamma|^2\right)|\sigma|^2 e^{-2\psi} \tag{3.3}$$

где $\sigma = \phi_1\phi'_2 - \phi_2\phi'_1 = \text{const}$. Таким образом, уравнение (1.3) можно записать для этого типа течений в форме уравнения Лиувилля

$$\Delta\psi = \left(\alpha\beta - |\gamma|^2\right)|\sigma|^2 e^{-2\psi} / 4 \tag{3.4}$$

Простым обобщением решения (3.2), вновь являющимся решением уравнения (3.4), будет

$$\Phi(z,\bar{z}) = |\omega(z)|^2\left(\alpha|\phi_1(z)|^2 + \beta|\phi_2(z)|^2 + \gamma\phi_1(z)\bar{\phi}_2(\bar{z}) + \bar{\gamma}\phi_2(z)\bar{\phi}_1(\bar{z})\right) \tag{3.5}$$

где функции ϕ_1 и ϕ_2 – линейно независимые решения уравнения

$$\phi_{zz} + (w_z w^{-1})\phi_z = r_z\phi \tag{3.6}$$

Хотя решение (3.5) получается из (3.2) простой подстановкой для функции ϕ, тем не менее оно представляет определенный интерес в связи с тем, что среди решений (3.5) можно выделить особый класс решений вида

$$\Phi(z,z) = |w(z)|^2(N(s(z,\bar{z})) + C), \quad C = 0, +1, -1 \tag{3.7}$$

$$s(z,\bar{z}) = \int (w(z))^{-2} dz + \int (\bar{w}(\bar{z}))^{-2} d\bar{z} + s_0$$

При произвольной функции $w(z)$ имеем $N(s) = \cos(\mu s)$, при $\mu = \text{const} \neq 0$ и $\operatorname{Im}\{\mu\} = 0$, и $N(s) = s$ при $\mu = 0$. Однако при специальном выборе $w(z)$ в случае идеальной жидкости существует два класса решений, у которых структура линий тока фиксирована, но значение величины скорости на линиях тока может быть произвольным, т.е. произвольной является функция $N(s)$, а функциональная зависимость $s = s(z, \bar{z})$ фиксирована. Это осесимметричные течения $\Phi(z, \bar{z}) = \Phi(r)$, $w(z) = z^{1/2}$ и решения вида $\Phi(z,\bar{z}) = \Phi(\chi)$, где $\chi = r^{-3/2}\cos\left\{\frac{3}{4}\theta + \theta_0\right\}$. Здесь $r^2 = z\bar{z} = |z|^2$, а $\theta = (i/2)\ln\{z/\bar{z}\}$ – полярный угол. Аналогичный класс решений в случае вязкой жидкости при специальном выборе функции $w(z) = \lambda z^{1/2}$, где λ – произвольная комплексная постоянная, совпадает с известным классом обобщенных решений Гамеля [1] (см. разд. 5 данной статьи).

Заметим также, что для уравнения Лиувилля известно общее представление решения [2], на которое ссылаются, например в [4, 5], но не анализируют подробно и которое можно записать в следующей форме:

$$\Phi(z,\bar{z}) = 4\left|\partial f(z) / \partial z\right|^2 (1 + |f(z)|^2)^{-2}$$

где $f(z)$ – произвольная аналитическая функция. Можно убедиться, что это решение – частный случай решений типа (3.7). Полученные представления (3.2) и (3.5) являются более общей формой этого решения, и они удобнее для проведения конкретных вычислений.

4. Примером использования решений (3.2) в прикладных задачах, служит подкласс решений, описывающих стационарные волны вблизи критического слоя. Положим в уравнении (2.6) $dr/dz = \xi^2$, $\xi = \text{const}$, $\text{Im}\,\xi = 0$. Тогда в качестве независимых решений $\phi_1(z)$ и $\phi_2(z)$ можно выбрать функции $\phi_1(z) = \sin\xi z$, $\phi_2(z) = \cos\xi z$, подставляя которые в (3.2), получаем

$$\Phi(z,\bar{z}) = \zeta(x,y) = a\,\text{ch}\,\xi y + b\sin\xi x \tag{4.1}$$

Отсюда

$$u = \frac{\partial}{\partial y}\ln\zeta = \frac{\xi a\,\text{sh}\,\xi y}{\zeta(x,y)}, \quad \upsilon = -\frac{\partial}{\partial x}\ln\zeta = \frac{-\xi b\cos\xi x}{\zeta(x,y)} \tag{4.2}$$

Таким образом, постоянные a и b имеют смысл амплитуд волны в u и υ компонентах течения. Вычислим средние скорости

$$U(y) = \frac{\xi}{2\pi}\int_0^{2\pi/\xi} u(x,y)dx = a(a^2\,\text{ch}^2\,\xi y - b^2)^{-1/2}\,\text{sh}\,\xi y \tag{4.3}$$

$$V(y) = \frac{\xi}{2\pi}\int_0^{2\pi/\xi} \upsilon(x,y)dx = 0$$

При $a > b$ рассматриваемое течение является гладким и представляет собой волну в сдвиговом плоско-параллельном потоке со средней скоростью $U(y)$. Максимум амплитуды волны приходится на критическую точку $y = 0$, где фазовая скорость волны совпадает со скоростью течения. Данное решение получено для системы отсчета, движущейся с фазовой скоростью волны.

При $a = b$ вдоль линии критического слоя появляется периодическая цепочка сингулярных вихрей, перемещающихся с фазовой скоростью волны. Средняя скорость в этом случае постоянна во всем слое жидкости и испытывает конечный скачок в точке $y = 0$: $U(y) = \text{sign}(y)$. Этот режим течения является потенциальным: $\omega = \Delta\psi = 0$.

При $b > a$ сингулярные вихри превращаются в конечные вихревые лакуны, движущиеся с фазовой скоростью волны, на краях которых скорость обращается в бесконечность. Вне области $a^2\text{ch}\,\xi y < b^2$ средняя скорость описывается той же формулой (4.3). Внутри области средняя скорость не определена.

Используя технику построения многосолитонных [3] решений, можно построить большое число точных решений, описывающих течение в случае наличия нескольких критических слоев, с постоянной средней скоростью на бесконечности. Аналогичные решения могут быть выписаны и в полярных координатах.

5. В заключение рассмотрим два типа вязких течений, тесно связанных с предыдущим анализом точных решений для течений идеальной жидкости. Этими специальными классами решений являются решения соответствующие представлению (3.7). При специальном выборе $w(z) = \lambda z^{1/2}$, где λ – действительная постоянная, уравнение для $N(s)$ принимает вид следующего уравнения

$$\partial \ln N / \partial t - \nu e^{-2s}\partial^2 \ln N / \partial s^2 = 0 \tag{5.1}$$

описывающего нестационарные осесимметричные течения вязкой жидкости. В случае, когда λ – комплексная постоянная, решения переходят в известные стационарные решения Гамеля.

Пусть $\lambda - k + im$. Тогда полная система уравнений, описывающая течения этого типа, будет иметь вид

$$\frac{d^2}{ds^2}\left(\nu \ln N - \frac{1}{2}B\right) = 0 \tag{5.2}$$

$$2\frac{1}{N}\frac{d^2N}{ds^2} = \frac{d^2A}{ds^2} + i\frac{d^2B}{ds^2} - (k+im)\frac{d}{ds}(A+iB)$$

Отсюда, исключая A и B, приходим к одному уравнению относительно $\chi(s) = dN/ds$:

$$\chi'' - (2k + \frac{m}{2\nu})\chi' + (m^2+k^2)\chi - \frac{m}{2\nu}\chi^2 + \alpha(m^2+k^2) = 0 \tag{5.3}$$

(штрих означает дифференцирование по s). В этом случае

$$s = \ln\left|z^{1/\lambda}\right| = \frac{2k}{m^2+k^2}\ln r + \frac{2m}{m^2+k^2}\theta$$

Здесь $r = |z|$, а $\theta = (i/2)\ln(z/\bar{z})$ – соответственно радиальная и угловая координаты. Уравнения (5.3) в точности соответствуют уравнениям обобщенных течений Гамеля [1].

6. Проделанные вычисления показывают, что представление (1.6) – (1.9) уравнений динамики несжимаемой жидкости на плоскости может быть полезным при исследовании структуры течений и возможно более содержательным, чем представление (1.2) – (1.3). Аналогичные (1.6) представления могут быть выписаны для уравнений динамики жидкости при более общих условиях, например для случая сжимаемой идеальной жидкости или для двумерных течений на сфере, что представляет интерес для геофизики.

Автор благодарит Л.В. Овсянникова за важное замечание о существовании тождества (1.10), из которого следует альтернативный более простой вывод построенного в разд. 1 представления двумерных уравнений динамики несжимаемой жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лэмб Г.* Гидродинамика. М.: Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
2. *Векуа И.Н.* Основы тензорного анализа и теории ковариантов. М.: Наука, 1978. 296 с.
3. *Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П.* Теория солитонов: метод обратной задачи. М: Наука, 1980. 319 с.
4. *Капцов О.В.* Эллиптические решения стационарных уравнений Эйлера. // Докл. АН СССР. 1988. Т. 298. N 3. С. 597–600.
5. *Капцов О.В.* Стационарные вихревые структуры в идеальной жидкости. // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 3. С. 409–415.

Ульяновск

Поступила в редакцию
7.VII.1993