УДК 530.182, 51-71, 51-72
doi:10.21685/2072-3040-2022-2-6

Нелинейные функциональные подстановки и преобразования для нелинейных диффузионных и волновых уравнений

В. М. Журавлев[1], В. М. Морозов[2]

[1,2]Самарский национальный исследовательский университет, Самара, Россия
[1]Ульяновский государственный университет, Ульяновск, Россия
[1]zhvictorm@gmail.com, [2]aieler@rambler.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Рассматривается задача построения точных решений нелинейных уравнений волнового и диффузионного типа с помощью метода нелинейных функциональных подстановок. *Материалы и методы.* Основным методом, который используется в работе, является метод нелинейных функциональных подстановок, который является развитием метода функциональных подстановок, применявшегося ранее для построения решений уравнений типа Бюргерса. Метод нелинейных функциональных подстановок применим к более широкому кругу задач, в том числе к нелинейным волновым уравнениям и нелинейным уравнениям параболического типа. *Результаты.* Развита общая схема метода и приведены конкретные примеры его применения к вычислению преобразований Бэклунда, а также построения точных решений для широкого круга уравнений нелинейной диффузии. Найдены новые точные решения уравнений диффузионного типа и указана методология применения метода на практике. *Выводы.* Развитый подход демонстрирует свою универсальность и эффективность для решения и анализа нелинейных задач в волновой динамике и разнообразных диффузионных процессах.

Ключевые слова: метод функциональных подстановок, точные решения нелинейных волновых и диффузионных уравнений, нелинейные диффузионные прооцессы и модели

Финансирование: работа выполнена в рамках проекта FSSS-2020-0018, финансируемого из средств государственного задания победителям конкурса научных лабораторий образовательных организаций высшего образования, подведомственных Минобрнауки России, а также при поддержке фонда РФФИ, проект: 20-02-00280.

Для цитирования: Журавлев В. М., Морозов В. М. Нелинейные функциональные подстановки и преобразования для нелинейных диффузионных и волновых уравнений // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2022. № 2. С. 81–98. doi:10.21685/2072-3040-2022-2-6

Nonlinear functional substitutions and transformations for nonlinear diffusion and wave equations

V.M. Zhuravlev[1], V.M. Morozov[2]

[1,2]Samara National Research University, Samara, Russia
[1]Ulyanovsk State University, Ulyanovsk, Russia
[1]zhvictorm@gmail.com, [2]aieler@rambler.ru

Abstract. *Background.* The research considers the problem of constructing exact solutions of nonlinear wave equations and diffusion type using the method of nonlinear functional substitutions. *Materials and methods.* The main method used in the work is the method of non-linear functional substitutions, which is a development of the method of functional substitutions, which was previously used to construct solutions to Burgers-type equations. The method of non-linear functional substitutions is applicable to a wider range of problems, including non-linear wave equations and non-linear equations of parabolic type. *Results.* The study develops the general scheme of the method and gives specific examples of its application to the calculation of the Bäcklund transformations, as well as the construction of exact solutions for a wide range of nonlinear diffusion equations. New exact solutions of equations of the diffusion type are found and the methodology for applying the method in practice is indicated. *Conclusions.* The developed approach demonstrates its versatility and efficiency for solving and analyzing nonlinear problems in wave dynamics and various diffusion processes.

Keywords: Functional substitution method, exact solutions of nonlinear wave and diffusion equations, nonlinear diffusion processes and models

For citation: Zhuravlev V.M., Morozov V.M. Nonlinear functional substitutions and transformations for nonlinear diffusion and wave equations. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2022;(2):81–98. (In Russ.). doi:10.21685/2072-3040-2022-2-6

Введение

Метод функциональных подстановок (МФП), развитый в работах [1–4], оказался полезным для построения точных решений целого ряда нелинейных моделей различных физических процессов. Этот факт вместе с изложением самого метода с примерами обсуждается достаточно подробно в монографии [5]. Основой МФП является возможность превращать линейные уравнения в частных производных с помощью набора простых линейных соотношений, которые называются базовыми, в нелинейные уравнения относительно некоторых вспомогательных функций. В результате такой процедуры можно строить точные решения нелинейных уравнений, исходя из решений линейных. При реализации МФП на практике можно исходить из линейных уравнений достаточно общего вида, но при этом множество получающихся нелинейных уравнений в большинстве своем не встречается в реальных прикладных задачах. Для множества же интересных с точки зрения практики задач МФП не применим. Однако этот метод может быть расширен включением в его рамки не только линейных базовых соотношений, но и нелинейных по своей сути. Такой подход, например, оказался пригодным для вычисления новых уравнений, которые обладают представлением Лакса [6]. Однако его возможности могут быть распространены на гораздо более широкий класс уравнений, включая диффузионные уравнения.

В настоящей работе предлагается расширение метода МФП, которое включает нелинейные базовые соотношения, более общие, чем те, которые рассматривались в [6]. Это позволяет получить новые способы построения точных решений уравнений или хотя бы понизить их порядок, сведя задачу к решению дифференциальных уравнений первого порядка. Такой подход можно назвать методом нелинейных функциональных подстановок (методом НФП). Целью данной работы является изложение общей идеологии метода НФП и применение его к некоторым задачам нелинейной волновой динамики, а также к решению ряда общих и частных задач теории нелинейных диффузионных процессов.

1. Общая идеология метода нелинейных функциональных подстановок

Рассмотрим нелинейные уравнения следующего общего вида:

$$F\left(T,T_x,T_t,T_{xx},T_{xt},T_{tt},\cdots,x,t\right)=0. \quad (1)$$

Будем искать решение всех таких уравнений, полагая, что в случае, если $T(x,t)$ удовлетворяет исходному уравнению (1), существуют такие две функции $u(T,x,t)$ и $v(T,x,t)$, для которых выполняются соотношения:

$$T_x=u(T,x,t), \quad T_t=v(T,x,t). \quad (2)$$

Эти соотношения будем называть **нелинейными базовыми соотношениями**. Условие совместности соотношений (2) можно записать в таком виде:

$$u_t+vu_T=v_x+uv_T. \quad (3)$$

Подставляя (2) в исходное уравнение (1), получаем его представление в виде уравнения относительно u и v:

$$F\left(T,u,v,u_x+uu_T,v_t+vv_T,u_t+vu_T,\cdots,x,t\right)=0, \quad (4)$$

как функций трех переменных x,t,T.

По построению совокупность уравнений (3) и (4) эквивалентна исходному уравнению.

Задача построения решений систем уравнений (3) и (4) в общем случае оказывается не менее сложной, чем задача отыскания решений исходного уравнения (1). Однако за счет зависимости функций $u(T,x,t)$ и $v(T,x,t)$ от T повышается координатная размерность исходной задачи. В новом координатном пространстве почти каждому решению исходного уравнения соответствует определенная зависимость $u(T,x,t)$ и $v(T,x,t)$ от T. Поэтому, задавая такую зависимость определенным образом, можно получать частные решения исходных уравнений, сводя процедуру отыскания решений к интегрированию системы базовых соотношений (3).

Эта общая процедура имеет множество разновидностей, которые определяются типом зависимости $u(T,x,t)$ и $v(T,x,t)$ от T. Например, в качестве такого выбора можно использовать полиномиальные подстановки общего вида:

$$u(T,x,t)=\sum_{k=0}^{M}U_k\left(x\ t\right)T^k, \quad v(T,x,t)=\sum_{k=0}^{M}V_k\left(x\ t\right)T^k. \quad (5)$$

В этом случае подстановка соотношений (5) в (3) и (4) часто приводит к совокупности уравнений для функций $U_k(x,t)$, $V_k(x,t)$, интегрирование которых оказывается простым. В других ситуациях совокупность уравнений для $U_k(x,t)$, $V_k(x,t)$ представляет замкнутую систему новых нелинейных уравнений. Это означает, что получено одно из преобразований Бэклунда исходного уравнения относительно T в новые уравнения относительно

$U_k(x,t)$, $V_k(x,t)$. Важным является то, что выбор функциональной формы $u(T,x,t)$ и $v(T,x,t)$ изначально не ограничен, что позволяет применять его и к волновым, и диффузионным уравнениям.

2. Преобразования Бэклунда для уравнений Клейна – Гордона

Если сравнить (2) с классическими преобразованиями Бэклунда [7–9], то можно увидеть, что они в действительности представляют собой частную форму таких соотношений. Поэтому для демонстрации работоспособности данного метода рассмотрим два примера, которые касаются уравнений Клейна – Гордона

$$T_{xt} = F(T) \tag{6}$$

для двух вариантов выбора функции $F(T)$. Это хорошо известные уравнения Sin – Gordon ($F = a\sin(2T)$) и Лиувилля ($F = ae^{2T}$). Покажем, что метод НФП позволяет вычислить преобразования Бэклунда для указанных типов волновых уравнений в обобщенном виде в несколько более общем виде, чем, например, в [9].

2.1. Уравнение Sin – Gordon

Рассмотрим уравнение Sin – Gordon в следующей форме:

$$T_{tt} - T_{xx} = a\sin(T)\cos(T). \tag{7}$$

Используя подстановки (2), преобразуем уравнение (7) относительно вспомогательной функции $T(x,t)$ к уравнению относительно функций $u(x,t)$ и $v(x,t)$. В результате находим:

$$v_t + vv_T - u_x - uu_T = a\sin(T)\cos(T). \tag{8}$$

Будем искать решение этого уравнения и уравнения совместности (3) в следующей форме:

$$u = U_0(x,t) + U_1(x,t)\sin(T) + U_2(x,t)\cos(T),$$

$$v = V_0(x,t) + V_1(x,t)\sin(T) + V_2(x,t)\cos(T).$$

Подставляя эти соотношения в уравнения (8) и (3) и приравнивая нулю коэффициенты при $\sin(T)$ и $\cos(T)$, приходим к системе из семи уравнений относительно шести функций $U_i, V_i, i = 0,1,2$:

$$V_{1,t} - U_{1,x} + U_0U_2 - V_0V_2 = 0,\ \ V_{2,t} - U_{2,x} + V_0V_1 - U_0U_1 = 0,$$

$$U_{1,t} - V_{1,x} + V_2U_0 - U_2V_0 = 0,\ \ U_{2,t} - V_{2,x} + V_0U_1 - U_0V_1 = 0,$$

$$U_{0,t} - V_{0,x} + V_2U_1 - U_2V_1 = 0,\ \ V_{0,t} - U_{0,x} + U_2U_1 - V_2V_1 = 0,$$

$$U_2^2 - U_1^2 + V_1^2 - V_2^2 - 2a = 0.$$

Эта система имеет, по крайней мере, одно решение:

$$U_0 = \phi_t,\ \ U_1 = A\cos\left(\phi(x,t)\right),\ \ U_2 = Ap_0\sin\left(\phi(x,t)\right),$$

$$V_0 = \phi_x,\ \ V_1 = Ap_0\cos\left(\phi(x,t)\right),\ \ V_2 = A\sin\left(\phi(x,t)\right).$$

При этом уравнение совместности преобразуется в уравнение для функции $\phi(x,t)$:

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} = 2a\sin\left(\phi(x,t)\right)\cos\left(\phi(x,t)\right), \tag{9}$$

здесь p_0 – произвольный параметр;

$$A = \sqrt{2}\sqrt{\frac{a}{p_0^2 - 1}}.$$

Функции $u(x,t,T)$ и $v(x,t,T)$ принимают следующий вид:

$$u = \phi_t + \sqrt{2}\sqrt{\frac{a}{p_0^2 - 1}}\left(\cos\left(\phi(x,t)\right)\sin(T) + p_0\sin\left(\phi(x,t)\right)\cos(T)\right), \tag{10}$$

$$v = \phi_x + \sqrt{2}\sqrt{\frac{a}{p_0^2 - 1}}\left(p_0\cos\left(\phi(x,t)\right)\sin(T) + \sin\left(\phi(x,t)\right)\cos(T)\right). \tag{11}$$

Соотношения, связывающие функции $\phi(x,t)$ и $T(x,t)$, которые удовлетворяют одному и тому же уравнению Sin – Gordon:

$$T_x = \phi_t + \sqrt{2}\sqrt{\frac{a}{p_0^2 - 1}}\left(\cos\left(\phi(x,t)\right)\sin(T) + p_0\sin\left(\phi(x,t)\right)\cos(T)\right),$$

$$T_t = \phi_x + \sqrt{2}\sqrt{\frac{a}{p_0^2 - 1}}\left(p_0\cos\left(\phi(x,t)\right)\sin(T) + \sin\left(\phi(x,t)\right)\cos(T)\right),$$

представляют собой преобразования Бэклунда уравнения Sin – Gordon. Отличием полученного здесь преобразования от классического [9] является наличие в соотношениях (11) дополнительного параметра p_0, что обобщает указанный известный результат.

2.2. Уравнение Лиувилля

Вторым примером служит уравнение Лиувилля, записанное в следующем виде:

$$T_{xt} = ae^{2T}, \tag{12}$$

здесь a – некоторая вещественная постоянная.

В общем случае для уравнений Клейна – Гордона (6) функция $v(T,x,t)$ должна иметь вид

$$v = \frac{1}{u_T}\left(F(T) - u_t\right). \tag{13}$$

В этом случае уравнение совместности (3) будет уравнением относительно одной функции $u(T,x,t)$. Если найдено некоторое решение этого уравнения для заданной функции $F(T)$, то, интегрируя базовые соотношения, можно найти решение для $T(x,t)$.

Для уравнения Лиувилля функцию $u(T,x,t)$ следует искать в такой форме:

$$u = U_0(x,t) + U_1(x,t)e^{T} + U_2(x,t)e^{-T}. \tag{14}$$

При этом функция $v(T,x,t)$ может быть также представлена в аналогичной форме:

$$v = V_0(x,t) + V_1(x,t)e^{T} + V_2(x,t)e^{-T}.$$

Подставляя эти соотношения в (3) и (13), приходим к следующим соотношениям для выбора коэффициентов U_i, V_i, $i = 0,1,2$:

$$V_0 = \theta_x(x,t),\ \ V_1 = e^{\theta(x,t)},\ \ V_2 = 0;\ \ U_0 = -\theta_x,\ \ U_1 = ae^{-\theta(x,t)}.$$

Если выбрать коэффициент $U_2(x,t)$ в такой форме:

$$U_2 = ce^{\theta(x,t)},$$

где c – произвольная постоянная, отличная от нуля, то функция $\theta(x,t)$ будет удовлетворять исходному уравнению Лиувилля:

$$\theta_{xt} = ae^{2\theta}.$$

Соответствующие этой подстановке базовые соотношения (3) выглядят следующим образом:

$$T_x = -\theta_x + ae^{-\theta+T} - ce^{-T+\theta},\ \ T_t = \theta_t + e^{T+\theta}.$$

Этот вариант соответствует классическому преобразованию Бэклунда для уравнения Лиувилля с дополнительным произвольным параметром c [9].

Если функцию $U_2(x,t)$ выбрать в таком виде:

$$U_2 = ae^{-\theta}\theta_{xt},$$

то функция $\theta(x,t)$ будет удовлетворять уравнению

$$2\theta_t\theta_{xt} - \theta_{xtt} = 0,$$

которое интегрированием по x и с помощью замены $\theta = -\ln(\chi(x,t))$ сводится к уравнению

$$\chi_{tt} = p(t)\chi,$$

где $p(t)$ – произвольная интегрируемая функция одной переменной t. Для этого выбора функции $U_2(x,t)$ имеем

$$T_x = -\theta_x + ae^{-\theta+T} - e^{-T-\theta}\theta_{x,t}, \ \ T_t = \theta_t + e^{T+\theta}.$$

3. Нелинейные диффузионные уравнения общего вида

Общим классом моделей в теории диффузионных процессов, включая процессы с обострением [10–12] и процессы формирования регулярных структур в среде [13], являются модели, основанные на уравнениях:

$$T_t - \frac{\partial}{\partial x}\left(D(T)T_x\right) + J(T_x, T) = 0. \qquad (15)$$

Применение метода НФП для уравнений этого типа позволяет строить некоторое множество точных решений, которые, хотя и образуют ограниченные классы, тем не менее дают возможность представить общие свойства эволюции возмущений в таких средах. Метод НФП варьируется по виду базовых соотношений от задачи к задаче. Поэтому здесь будут приведены несколько примеров, позволяющих получать частные точные решения для ряда уравнений с конкретными нелинейными коэффициентами диффузии и нелинейными источниками.

В качестве первого примера рассмотрим уравнения общего вида (15), решения которых удовлетворяют следующим базовым соотношениям:

$$T_x = g(x,t)U(T) = u(T,x,t), \ \ T_t = f(x,t)V(T) + W(T) = v(T,x,t). \qquad (16)$$

Подставляя эти соотношения в уравнение (15), находим:

$$f(x,t)V(T) + W(T) = g_x(x,t)R(T) + g^2(x,t)R'(T)U(T) + J(T). \qquad (17)$$

Здесь введено обозначение: $R = D(T)U(T)$. Уравнение совместности (3) в данном случае примет вид

$$g_t(x,t)U(T) - f_x(x,t)V(T) + f(x,t)g(x,t)[U,V] + g[U,W] = 0. \qquad (18)$$

Для сокращения записи введено обозначение

$$[U,V] = U'(T)V(T) - U(T)V'(T).$$

В уравнениях (17) и (18) для построения решений необходимо провести разделение переменных. Рассмотрим два варианта разделения переменных, которые приводят к различным классам решений для уравнений (15).

4.1. Класс решений I

Первый класс решений соответствует выбору функций $g(x,t)$ и $f(x,t)$ в следующей форме: $g = g(x)$, $f = f(x)$, с условиями:

$$g_x = \lambda + \mu g^2, \ \ f = \beta + \alpha g^2. \qquad (19)$$

В этом случае из (17) следуют соотношения:

$$\mu R + R'U = \alpha V,\ \ J + \lambda R = \beta V. \tag{20}$$

Из уравнения совместности находим следующие дополнительные условия:

$$\gamma V = [U, V],\ \ [U, W] = 0,\ \ \lambda = \gamma\beta/(2\alpha),\ \ \mu = \gamma/2. \tag{21}$$

Система уравнений для R, J, U и V состоит из трех уравнений, при этом одна функция остается произвольной, что позволяет, задавая одну из функций, получать точные решения множества уравнений общего вида (15). В качестве произвольной функции удобно задавать в данном варианте функцию $V(T)$. В этом случае функцию $U(T)$ можно представить в виде

$$U = V(T)P(T).$$

Из условий (21) находим:

$$P(T) = \gamma\int\frac{dT}{V(T)},\ \ W = \sigma U, \tag{22}$$

где σ – произвольная вещественная постоянная. В результате уравнение для R примет вид

$$R' + \frac{\mu}{VP}R = \frac{\alpha}{P},$$

отсюда получаем

$$R = D(T)U(T) = C(T)e^{-\Theta(T)},\ \ \Theta(T) = \int\frac{dT}{V(T)P(T)}.$$

Для функции $C(T)$ получаем следующее соотношение:

$$C(T) = C_0 + \alpha\int\frac{e^{\Theta(T)}dT}{P(T)}.$$

Для $J(T)$ получаем:

$$J(T) = \beta V - \lambda R + W = \beta V(T) - \lambda\left(C_0 + \alpha\int\frac{e^{\Theta(T)}dT}{P(T)}\right)e^{-\Theta(T)} + \sigma U(T).$$

Уравнение (19) относительно функции g интегрируется с помощью замены:

$$g = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial\ln\chi}{\partial x}. \tag{23}$$

Функция $\chi(x)$ при этом удовлетворяет уравнению:

$$\chi'' + k^2\chi = 0, \tag{24}$$

где $k^2 = \gamma^2\beta/(4\alpha)$. Это уравнение может иметь как периодические тригонометрические решения при $k^2 > 0$, так и гиперболические $k^2 < 0$. Отсюда следует, что для всех типов уравнений с заданным $V(T)$ могут существовать пространственно периодические решения, указывающие на формирование регулярных структур в средах с нелинейной диффузией и нелинейным источником общего вида.

Непосредственно решение для функции T, играющей роль концентрации, должно находиться из уравнений:

$$T_x = g(x)V(T)P(T), \;\; T_t = f(x)V(T).$$

При условии (22) и выполнении уравнений (19) эти уравнения совместны. Интегрируя первое уравнение, находим:

$$\int \frac{dT}{VP} = \Theta(T) = \int g(x)\,dx + \xi(t) = \zeta(x,t).$$

Из этого соотношения следует, что общий вид функции T имеет вид

$$T = H(\zeta(x,t)), \tag{25}$$

где функция $H(\zeta)$ является обратной к функции $\Theta(T)$. Для того чтобы это решение было также решением второго базового уравнения, достаточно подобрать подходящим образом только функцию $\xi(t)$. Подстановка (25) во второе базовое соотношение приводит к соотношению для $\xi(t)$ следующего вида:

$$\dot{\xi} = \frac{1}{H'(\zeta)}\Big(f(x)V\big(H(\zeta)\big) + \sigma U\big(H(\zeta)\big)\Big).$$

Правая часть этого соотношения по построению должна представлять собой либо некоторую функцию времени, либо постоянную, которые зависят от выбора функций $V(T)$ и $F(U)$.

Как следует из (25), полученные решения для произвольного выбора $V(T)$ и $F(U)$ приводят к автомодельным решениям с автомодельной переменной $\zeta(x,t)$, которая в случае периодических решений для $\chi = a\cos(kx + \phi_0)$ имеет вид

$$\zeta = -\frac{2}{\gamma}\ln\big(\cos(kx + \phi_0)\big) + \xi(t).$$

Хотя эта переменная и имеет периодически расположенные сингулярности, тем не менее само решение для $T(x,t)$ может быть несингулярным. Такие случаи интересны с точки зрения отыскания моделей, описывающих возникновение периодических структур в диффузионной среде.

В качестве частного примера рассмотрим случай $V(T) = T^{-m}$, где m – некоторое число, отличное от –1: $m \neq -1$. В результате имеем:

$$P=\gamma\int\frac{dT}{V}=\frac{\gamma}{m+1}\left(T^{m+1}+P_0\right),$$

соответственно получаем:

$$U=V(T)P(T)=\frac{\gamma}{m+1}\left(T+P_0T^{-m}\right),$$

$$\Theta=\mu\int\frac{dT}{VP}=\frac{\mu(m+1)}{\gamma}\int\frac{dT}{T+P_0T^{-m}}=\frac{\mu}{\gamma}\ln\left(T^{m+1}+P_0\right),$$

$$D=\frac{(m+1)^{3/2}}{\gamma^2}T^m(T^{m+1}+P_0)^{-3/2}\left(C_0\gamma+\alpha(m+1)^{1/2}\int(T^{m+1}+P_0)^{-1/2}dT\right).$$

Полагая $P_0=C_0=0$, получаем коэффициент диффузии и источник со степенной зависимостью от T следующего вида:

$$D=-\frac{2\alpha(m+1)^2}{\gamma^2(m-1)}T^{-m-1},\quad J=-\frac{2\beta m}{m-1}T^{-m}+\sigma\frac{\gamma}{m+1}T.$$

3.2. Класс решений II

Второй класс решений получается с помощью выбора следующих соотношений для функций g и f : $g=g(t), f=f(t)$. Соответствующие уравнения для этих функций будут иметь вид

$$\dot{g}=-\gamma g\left(\alpha g^2+\beta\right), f=\beta+\alpha g^2. \tag{26}$$

Условия разделения переменных теперь приводят к следующим соотношениям:

$$R'U=\alpha V,\ J=W+\beta V,\ [U,V]=-\gamma U,\ [U,W]=0.$$

Теперь в качестве произвольной функции удобно выбрать $U(T)$. Интегрируя последнюю систему уравнений, находим:

$$V=U(T)Q(T),\quad Q=\gamma\int\frac{dT}{U(T)},\ W=F(U),$$

$$D=\frac{\alpha}{U}\int Q(T)dT,\ J=\beta U(T)Q(T)+\sigma U(T).$$

Как и в предыдущем случае, решение для T находится из системы:

$$T_x=g(t)U(T),\ T_t=\left(\beta+\alpha g^2(t)\right)U(T)Q(T)+\sigma U(T).$$

Из первого уравнения находим, что в общем случае решения для T можно записать в автомодельном виде:

$$T=G(\zeta)),\ \zeta=g(t)x+\xi(t). \tag{27}$$

Функция $\xi(t)$ в этом случае должна вычисляться, исходя из подстановки (27) во второе базовое соотношение, которое принимает для $\xi(t)$ следующий вид:

$$\dot{\xi} = \left(\beta + \alpha g^2(t)\right)\frac{V(G(\zeta))}{G'(\zeta)} - \dot{g}x.$$

Как следует из (27), решения этого типа представляют собой также автомодельные решения с автомодельной переменной ζ. Эти решения теперь могут представлять собой осциллирующие по времени решения в зависимости от выбора параметров уравнения (26). Для данного варианта можно также получить частные решения при конкретном выборе $V(T)$, как это было сделано в предыдущем разделе.

В конце данного раздела заметим, что вид базовых соотношений (16) может быть расширен, что позволяет рассматривать и другие типы решений уравнений типа (15). Здесь приведены самые простые типы представлений для $u(T,x,t)$ и $v(T,x,t)$. Для более конкретных задач данный подход может дать частные решения более сложного вида, связанные с более соложной зависимостью $u(T,x,t)$ и $v(T,x,t)$ от T.

4. Некоторые другие примеры диффузионных уравнений

4.1. Линейный по T коэффициент диффузии

Следующий пример связан с диффузионным уравнением:

$$T_t = \beta T_{xx} T + kT, \tag{28}$$

который является частным случаем уравнений (15). В качестве нелинейной подстановки для него рассмотрим следующее соотношение:

$$u(T,x,t) = \phi(x,t)\ln(T) + \psi(x,t).$$

Исходное уравнение в результате такой подстановки превращается в следующее соотношение:

$$v(T,x,t) = \beta\left(\phi_x T\ln T + \psi_x T + \phi(\phi\ln T + \psi)\right) + kT.$$

Подставляя это соотношение в условие совместности, приходим к ограничениям для функций ϕ и ψ, имеющих следующий вид:

$$\phi = p(t), \ \ \psi = r(t)x + n(t). \tag{29}$$

Функции $c(t)$, $b(t)$, $q(t)$ при этом должны удовлетворять следующим уравнениям:

$$\frac{dr}{dt} - \beta r^2 - kr = 0, \ \frac{dp}{dt} - \beta rp - kp = 0, \ \frac{dn}{dt} - (k + \beta r)n + kp = 0,$$

общее решение которых можно записать так:

$$r = k(C_1 ke^{-kt} - \beta)^{-1},\ p = C_2(C_1 ke^{-kt} - \beta)^{-1},\ n = \left(C_3 - C_2 kt\right)(C_1 ke^{-kt} - \beta)^{-1}.$$

В результате уравнения (2) примут вид

$$T_x = p\left(t\right)\ln T + r\left(t\right)x + n\left(t\right), \tag{30}$$

$$T_t = \beta p\left(t\right)\left(p\left(t\right)\ln T + \left(r\left(t\right)x + n\left(t\right)\right)\right) + T\left(\beta r\left(t\right) + k\right). \tag{31}$$

Эта система первого порядка совместна по построению, но не интегрируется точно. Поэтому для построения ее решения приходится прибегать к численному решению одного из уравнений системы (30).

Следует особо подчеркнуть, что приведенный пример демонстрирует специфическую возможность метода НФП получать решения в виде упрощенных уравнений первого порядка, которые в определенном смысле можно рассматривать как обыкновенные дифференциальные уравнения. Такой способ представления решений можно назвать **полуточным**.

Заметим, что исходное уравнение можно представить с помощью замены $n = \ln T$ в виде уравнения диффузии

$$n_t = \beta \frac{\partial}{\partial x}\left(e^n n_x\right) + k$$

с коэффициентом диффузии $D\left(n\right) = e^n$ и постоянным внешним источником с интенсивностью $J = k$. Такое представление интересно для моделей диффузии дефектов в задачах с рождением дефектов от внешнего источника излучения.

4.2. Уравнение быстрой диффузии. Автоволны

Уравнение быстрой диффузии встречается в целом ряде направлений исследований [14, 15], одним из которых является задача образования когерентных структур в средах с нелинейной диффузией. Под уравнением быстрой диффузии в самом общем виде можно понимать диффузионные уравнения с нелинейной зависимостью коэффициента диффузии вида $D\left(T\right) = D_0(T + T_0)^{-1}$.

Рассмотрим уравнение общего вида:

$$\left(T_t + CT_x + QT\right)\left(T_x + KT\right) = \left(T_{xx} + PT_x + ST_t + RT\right)T. \tag{32}$$

Это уравнение при определенном подборе коэффициентов $C\left(x,t\right)$, $Q\left(x,t\right)$, $K\left(x,t\right)$, $P\left(x,t\right)$, $S\left(x,t\right)$, $R\left(x,t\right)$ сводится к уравнению быстрой диффузии. С помощью базовых соотношений это уравнение приводится к следующему виду:

$$T\left(u_x + uu_T\right) - uv - Cu^2 - MuT - ZT^2 - HvT = 0, \tag{33}$$

где

$$M = Q\left(x,t\right) - C\left(x,t\right)K\left(x,t\right) - P\left(x,t\right),$$

$$Z = K(x,t)Q(x,t) - R(x,t),\ H = K(x,t) - S(x,t).$$

Будем искать решение уравнения (33) и уравнения совместности базовых соотношений в виде

$$u = U_1(x,t)T + U_N(x,t)T^N,\ v = V_1(x,t)T + V_N(x,t)T^N, \tag{34}$$

здесь N – некоторый, вообще говоря, вещественный параметр.

Коэффициенты представления (34) запишем следующим образом:

$$U_1 = \phi_x, \quad V_1 = \phi_t, \quad U_N = e^{\theta}, \quad V_N = (N - C)e^{\theta}.$$

После подстановки этих соотношений в уравнения получаем систему уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi - (N - C)\frac{\partial}{\partial x}\Psi + C_x = 0,\ \Psi = \theta + (N-1)\phi,$$

$$M = -(N - C)H - \phi_t - (C - 1)\phi_x + \theta_x,$$

$$Z = \phi_{xx} - H\left(\phi_t - (N - C)\phi_x\right) - \phi_x\theta_x.$$

Разрешая уравнение $T_x = u(x,t,T)$ относительно $T,$ находим:

$$T = e^{\phi}\left[(1-N)\left(\int e^{\Psi}dx + c_0\right)\right]^{1/(1-N)}, \tag{35}$$

где c_0 – произвольная постоянная.

Для перехода к уравнению быстрой диффузии введем функцию $n(x,t)$:

$$n = \frac{T_x}{T} + w - \phi_x,$$

где $w = H(x,t) + \phi_x$.

В результате находим, что функция $n(x,t)$

$$n = \frac{1}{1-N}\frac{\partial}{\partial x}\ln\left(\int e^{\Psi(x,t)}dx + c_0\right) + w(x,t) \tag{36}$$

удовлетворяет уравнению:

$$n_t = \frac{\partial^2 \ln n}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left[(1-C)n + (C+N-2)w\right] +$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{w\Psi_x - (N-1)w^2 - w_x}{n}\right] + w_t - \Psi_{xx}. \tag{37}$$

Рассмотрим случай, когда $C = \text{const}$:

$$\Psi = \Psi(x + pt),\ p = (N - C),$$

$$n=\frac{1}{1-N}\frac{\partial}{\partial x}\ln\left(\int e^{\Psi(x+pt)}dx+c_0\right)+w(x,t). \qquad (38)$$

Кроме этого, потребуем равенства нулю слагаемых в правой части (37), что эквивалентно следующим дополнительным уравнениям:

$$w_t+qw_x-\Psi_{xx}=0,\;\; w\Psi_x-(N-1)w^2-w_x=0,\;\; q=C+N-2. \qquad (39)$$

Из первого уравнения этой системы находим:

$$w=\eta_x,\;\; q\eta_x-\Psi_x=-\eta_t,$$

откуда получаем

$$\eta=f(x-qt)+\frac{1}{2(N-1)}\Psi(x+pt).$$

Решения второго уравнения системы (39) можно записиать так:

$$f=\frac{1}{N-1}\ln\sigma(x-qt),\;\; \Psi=-2\ln\varepsilon(x+pt).$$

Это позволяет вычислить функции σ и ε:

$$\sigma(Z)=\sigma_{01}e^{\sqrt{(N-1)\lambda}Z}+\sigma_{02}e^{-\sqrt{(N-1)\lambda}Z},$$

$$\varepsilon(Z)=\varepsilon_{01}e^{\sqrt{(N-1)\lambda}Z}+\varepsilon_{02}e^{-\sqrt{(N-1)\lambda}Z}.$$

Редукции (39) приводят решение для n к следующему виду:

$$n=\frac{1}{1-N}\frac{\partial}{\partial x}\ln\left(\int\frac{dx}{\varepsilon^2(x+pt)}+c_0\right)+f'(x-qt)+\frac{1}{2(N-1)}\Psi'(x+pt). \qquad (40)$$

Полученное решение описывает две бегущие волны, распространяющиеся с различными скоростями p и q. При этом уравнение

$$n_t=\frac{\partial^2\ln n}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left[(1-C)n\right], \qquad (41)$$

которому удовлетворяет полученное решение, не содержит правой части. Последнее означает, что процесс, соответствующий (41), представляет собой автоволны, для существования которых не требуется внешнего источника, хотя среда, в которой распространяются волны, является диффузионной, т.е. по классическому определению – диссипативной. Отметим также, что последнее уравнение представляет собой классическое уравнение быстрой диффузии [14, 15], а полученные решения – новым классом решений этого уравнения.

4.3. Уравнение быстрой диффузии. Формирование структуры

Еще одним примером уравнения с коэффициентом диффузии $D=1/n$ является уравнение следующего вида:

$$T_t = T^{-1}\left(T_{xx} + rT_x\right) + kT + p, \tag{42}$$

где k, p, r – постоянные. Используя нелинейные подстановки (2), находим выражение для функции $v(T,x,t)$:

$$v = \left(u_x + uu_T + ru\right)/T + kT + p. \tag{43}$$

Будем искать решение уравнения совместности для функции $u(T,x,t)$ в виде расширенной линейной подстановки:

$$u(T,x,t) = A(x,t) + B(x,t)T\,.$$

В результате уравнение совместности сведется к уравнению для функции $B = B(x)$ третьего порядка:

$$B''' + \left(r + B'\right)B'' - r(B')^2 - (B')^3 - pB' + gke^{-B(x)-rx} = 0.$$

Функция $A(x,t)$ в этом случае будет иметь такой вид:

$$A = \left(A_0 e^{kt} + g\right)e^{-B(x)-rx},$$

здесь A_0 и g – произвольные постоянные. Решение исходного нелинейного уравнения в этом случае будет иметь вид

$$T(x,t) = e^{kt}Z(x) - \frac{1}{k}\left(B'' + \left(B'\right)^2 + rB' + p\right), \tag{44}$$

где функция $Z(x)$ связана с $B(x)$ соотношением:

$$Z(x) = \left(C_1 + C_2\int e^{-rx-2B(x)}dx\right)e^{B(x)},$$

здесь C_1 и C_2 – постоянные интегрирования. В частности, данное решение демонстрирует в случае $k < 0$ возникновение статической структуры в распределении элементов среды при $t \to \infty$. Возникающая статическая структура описывается функцией

$$T(x,\infty) = -\frac{1}{k}\left(B'' + \left(B'\right)^2 + rB' + p\right).$$

Заметим, что исходное уравнение можно представить двумя другими способами. Первый сводится к простой модификации первого слагаемого, что приводит к уравнению

$$T_t = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{T_x}{T}\right) + \left(\frac{T_x}{T}\right)^2 + r\frac{T_x}{T} + kT + p \tag{45}$$

с коэффициентом диффузии $D(T) = T^{-1}$ и нелинейным источником:

$$J = \left(\frac{T_x}{T}\right)^2 + kT + p.$$

Вторая модификация уравнения связана с заменой $n = T^2$. Это приводит к уравнению

$$n_t = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} n_x\right) + r\frac{1}{\sqrt{n}} n_x + 2kn + 2p\sqrt{n}$$

с коэффициентом диффузии вида $D(n) = n^{-1/2}$ и нелинейным источником:

$$J = r\frac{1}{\sqrt{n}} n_x + 2kn + 2p\sqrt{n}.$$

Заключение

Приведенные примеры дают общее представление о методе нелинейных функциональных подстановок. Вместе с теми возможностями, которые были описаны в [6], приведенные в данной работе примеры указывают на эффективность метода НФП при решении общих задач отыскания интегрируемых тем или иным способом уравнений. Если вариант метода НФП, приведенный в [6], связан с методом обратной задачи, то примеры, связанные с уравнениями Sin – Gordon и Лиувилля, приведенные в данной работе, демонстрируют, что такой подход дает реальный способ искать преобразования Бэклунда для уравнений более общего вида.

Важным достоинством данного метода является возможность с его помощью получать новые частные точные решения в тех случаях, когда уравнение не интегрируется другими способами. Среди примеров, рассмотренных в данной работе, имеются ситуации, когда построение решения уравнения в частных производных сводится к решению системы связанных дифференциальных уравнений первого порядка, которые не обязательно интегрируются точно. В этих случаях понижение порядка до первого по каждой из координатных переменных упрощает дальнейший анализ задачи на основе численных расчетов.

В целом можно констатировать, что метод НФП представляет собой достаточно универсальный и эффективный инструмент работы с нелинейными задачами различного типа, который найдет примерение в дальнейшем для широкого круга задач.

Список литературы

1. Журавлев В. М. Метод обобщенных подстановок Коула – Хопфа и новые примеры линеаризуемых нелинейных эволюционных уравнений // Теоретическая и математическая физика. 2009. Т. 158, № 1. С. 58–71.
2. Журавлев В. М., Зиновьев Д. А. Метод обобщенных подстановок Коула – Хопфа в размерности 1+2 и интегрируемые модели двумерных течений сжимаемой жидкости // Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2008. Т. 88, № 3. С. 194–197.
3. Zhuravlev V. M., Zinov'ev D. A. The Application of Generalized Cole-Hopf Substitutions in Compressible-Fluid Hydrodynamics // Physics of Wave Phenomena. 2010. Vol. 18, № 4. P. 245–250.

4. Журавлев В. М. Многофункциональные подстановки и солитонные решения интегрируемых нелинейных уравнений // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2019. № 3. С. 93–119.
5. Журавлев В. М. Нелинейные интегрируемые модели физических процессов. Метод функциональных подстановок. Ульяновск : Изд-во УлГУ, 2020. 181 с.
6. Журавлев В. М., Морозов В. М. Представление Лакса с операторами первого порядка для новых нелинейных уравнений типа Кортевега – де Фриза // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2021. № 4. С. 178–191.
7. Lamb G. R. Becklund transformations at the turn of century // Lecture Notes in Mathematics / ed. by R. M. Miura. Springer, 1976. 515 p.
8. Лэм Дж. Л. Ведение в теорию солитонов. М. : Мир, 1983. 294 с.
9. Солитоны. Сборник / под ред. Р. Буллафа, Ф. М. Кодри. М., 1983. 408 с.
10. Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М. : Наука, 1987. 480 с.
11. Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Тельковская О. В. Режимы с обострением в двухкомпонентных средах // Математическое моделирование. 1989. Т. 1, № 1. С. 34–50.
12. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование. (Идеи. Методы. Примеры). М. : Наука, 1997. 320 с.
13. Журавлев В. М., Золотовский И. О., Морозов В. М. Об условиях возникновения регулярных структур в конденсированных средах под действием внешнего излучения // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2015. № 3. С. 144–162.
14. Семенов Э. И. Свойства уравнения быстрой диффузии и его многомерные точные решения // Сибирский математический журнал. 2003. Т. 44, № 4. С. 863–869.
15. Аристов С. Н. Периодические и локализованные точные решения уравнения $h_t = \Delta \ln h\_t$ // Прикладная механика и техническая физика. 1999. Т. 40, № 1. С. 22–29.

References

1. Zhuravlev V.M. Generalized Cole–Hopf substitution method and new examples of linearizable nonlinear evolution equations. *Teoreticheskaya i ma-tematicheskaya fizika = Theoretical and mathematical physics*. 2009;158(1):58–71. (In Russ.)
2. Zhuravlev V.M., Zinov'ev D.A. The method of generalized Cole-Hopf substitutions in 1+2 dimensions and integrable models of two-dimensional compressible fluid flows. *Pis'ma v Zhurnal eksperimental'noy i teoreticheskoy fiziki = Letters to the Journal of experimental and theoretical physics*. 2008;88(3):194–197. (In Russ.)
3. Zhuravlev V.M., Zinov’ev D.A. The Application of Generalized Cole-Hopf Substitutions in Compressible-Fluid Hydrodynamics. *Physics of Wave Phenomena*. 2010;18(4):245–250.
4. Zhuravlev V.M. Multifunctional substitutions and soliton solutions of integrable nonlinear equations. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Po-volzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2019;(3):93–119. (In Russ.)
5. Zhuravlev V.M. *Nelineynye integriruemye modeli fizicheskikh protsessov. Metod funktsional'nykh podstanovok = Nonlinear integrable models of physical processes. Functional substitution method*. Ul'yanovsk: Izd-vo UlGU, 2020:181. (In Russ.)
6. Zhuravlev V.M., Morozov V.M. Lax representation with first-order operators for new nonlinear equations of the Korteweg-de Vries type. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki. = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2021;(4):178–191. (In Russ.)

7. Lamb G.R. Becklund transformations at the turn of century. *Lecture Notes in Mathematics.* Springer, 1976:515.
8. Lem Dzh.L. *Vedenie v teoriyu solitonov* = *Introduction to the theory of solitons*. Moscow: Mir, 1983:294. (In Russ.)
9. Bullafa R., Kodri M. (eds.). *Solitony. Sbornik = Solitons. Collection*. Moscow, 1983:408. (In Russ.)
10. Samarskiy A.A., Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P., Mikhaylov A.P. *Rezhimy s obostreniem v zadachakh dlya kvazilineynykh parabolicheskikh uravneniy = Blow-up regimes in problems for quasilinear parabolic equations*. Moscow: Nauka, 1987:480. (In Russ.)
11. Kurdyumov S.P., Kurkina E.S., Tel'kovskaya O.V. Blow-up regimes in two-component media. *Matematicheskoe modelirovanie* = Math modeling. 1989;1(1):34–50. (In Russ.)
12. Samarskiy A.A., Mikhaylov A.P. *Matematicheskoe modelirovanie. (Idei. Metody. Primery) = Math modeling. (Ideas. Methods. Examples)*. Moscow: Nauka, 1997:320. (In Russ.)
13. Zhuravlev V.M., Zolotovskiy I.O., Morozov V.M. On the conditions for the appearance of regular structures in condensed media under the action of external radiation. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2015;(3):144–162. (In Russ.)
14. Semenov E.I. Properties of the fast diffusion equation and its multidimensional exact solutions. *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal = Siberian mathematical journal*. 2003;44(4):863–869. (In Russ.)
15. Aristov S.N. Periodic and localized exact solutions of the equation $h_t = \Delta \ln h\_t$. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika = Applied mechanics and engineering physics*. 1999;40(1):22–29. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Виктор Михайлович Журавлев
доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Самарский национальный исследовательский университет (Россия, г. Самара, Московское шоссе, 34); профессор кафедры теоретической физики, Ульяновский государственный университет (Россия, г. Ульяновск, ул. Льва Толстого, 42)

Viktor M. Zhuravlev
Doctor of physical and mathematical sciences, leading researcher, Samara National Research University (34 Moskovskoye highway, Samara, Russia); professor of the sub-department of theoretical physics, Ulyanovsk State University (42 L'va Tolstogo street, Ulyanovsk, Russia)

E-mail: zhvictorm@gmail.com

Виталий Михайлович Морозов
младший научный сотрудник, Самарский национальный исследовательский университет (Россия, г. Самара, Московское шоссе, 34)

Vitaliy M. Morozov
Junior researcher, Samara National Research University (34 Moskovskoye highway, Samara, Russia)

E-mail: aieler@rambler.ru

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 19.05.2022

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 15.06.2022

Принята к публикации / Accepted 27.06.2022