УДК 51-71, 532.51, 538.93
DOI 10.21685/2072-3040-2018-1-10

В. М. Журавлев

СОЛИТОННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТИПА НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОДСТАНОВКИ[1]

Аннотация.

Актуальность и цели. Основной целью работы является установление взаимосвязи между методом обратной задачи (МОЗ) и методом функциональных подстановок в теории интегрируемых нелинейных уравнений в частных производных. Метод обратной задачи используется для построения решений уравнений, допускающих многосолитонные решения, а метод функциональных подстановок – к уравнениям, которые часто называются уравнениями типа Бюргерса. В данной работе демонстрируется, что модификация метода функциональных подстановок с помощью введения в процедуру дополнительных замыкающих условий позволяет приводить уравнения типа Бюргерса к уравнениям, совпадающим с уравнениями, интегрируемыми с помощью МОЗ. Исследуются только уравнения типа нелинейного уравнения Шредингера (НУШ), в частности, уравнения Гинзбурга – Ландау.

Материалы и методы. Методом исследования является матричный вариант метода функциональных подстановок.

Результаты. Вычислены уравнения типа Бюргерса, имеющие вид, схожий с уравнением НУШ, для произвольной матричной размерности подстановок. Для частного случая в размерности $n = 2$ построены все возможные типы уравнений типа НУШ. С помощью введения дополнительного матричного дифференицального соотношения порядка 1 вычисляются уравнения, имеющие форму, идентичную форме НУШ.

Выводы. Развитый в работе метод устанавливает связь между уравнениями типа Бюргерса, которые интегрируются с помощью метода функциональных подстановок и уравнениями, интегрируемыми с помощью МОЗ. Приведенный пример устанавливает такую связь лишь для НУШ, причем в частном случае матричной размерности 2, что приводит к односолитонным решениям и их обобщениям.

Ключевые слова: точно интегрируемые нелинейные уравнения, обобщенные функциональные подстановки, точные решения обобщенных нелинейных уравнений Шредингера и Гинзбурга – Ландау.

V. M. Zhuravlev

SOLITON SOLUTIONS OF NONLINEAR SCHRÖDINGER-TYPE EQUATIONS AND FUNCTIONAL SUBSTITUTIONS

[1] Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (номер проекта 16.2773.2017/4.6), РФФИ проекты 16-42-732119 р_офи_м и 16-42-732113 р_офи_мб, а также средств субсидии, выделенной в рамках государственной поддержки Казанского (Приволжского) федерального университета в целях повышения его конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров.

Abstract.

Background. The main goal of the paper is to establish the relationship between the inverse problem method (IPM) and the method of functional substitutions (MFS) in the theory of integrable nonlinear partial differential equations. The inverse problem method is used to construct solutions of equations admitting multi-soliton solutions, and the method of functional substitutions to equations, which are often called Burgers type equations. In this paper, it is demonstrated that modifying the MFS by introducing additional closing conditions into the procedure makes it possible to derive Burgers-type equations for equations that coincide with equations integrable by means of MOS. In this paper we study only equations of the type of the nonlinear Schrödinger equation (NLS), and Ginzburg – Landau equations.

Materials and methods. The method of investigation is a matrix version of the method of functional substitutions.

Results. In the paper, equations of Burgers type are calculated, having a form like the NLS equation for arbitrary matrix dimension of substitutions. Then, in the case of dimension $n = 2$, all possible types of NLS-type equations are constructed. With the introduction of an additional matrix differential equation of the order of 1, equations that are identical in form to the NLS are calculated.

Conclusions. The method developed in this paper establishes a connection between equations of Burgers type that are integrated with the help of the method of functional substitutions and equations integrable with the help of IPM. The above example only fixes such a connection for NLS, and in the case of matrix dimension 2, which leads to one-soliton solutions and their deformation.

Key words: exactly integrable nonlinear equations, generalized functional substitutions, exact solutions of generalized nonlinear Schrödinger and Ginzburg – Landau equations.

Введение

Уравнения типа нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) играют важную роль в различных разделах нелинейной физики [1, 2], в частности, в нелинейной оптике [3, 4]. Особенностью этого класса уравнений является то, что оно допускает многосолитонные решения, которые строятся с помощью метода обратной задачи (МОЗ) [1, 2]. Для задач нелинейной оптики в реальности имеют важное значение различные обобщения НУШ, включающие дополнительные слагаемые и параметры, характеризующие свойства нелинейной среды. В частности, важное значение имеют в нелинейной оптике среды с комплексными показателями преломления, нелинейности и дисперсии, поскольку в реальных средах такие показатели описывают распространение волн в активных средах [3, 4] (с диссипацией и накачкой). Соответствующее обобщение НУШ часто называют уравнением Гинзбурга – Ландау (УГЛ) [4]. Однако в случае комплексных коэффициентов уравнения НУШ не могут быть разрешены с помощью МОЗ. В связи с этим для анализа уравнений типа НУШ и Гинзбурга – Ландау представляет интерес рассмотрение метода функциональных подстановок, который был развит ранее в работах [5]. Такая возможность открывается в результате некоторого расширения метода функциональных подстановок с помощью дополнительных условий, ограничивающих класс решений, но расширяющих класс уравнений, которые допускают такие решения.

В работе [6] был получен предварительный результат, доказывающий возможность построения решений типа НУШ с помощью функциональных подстановок. В настоящей работе этот подход развивается и применяется конкретно к уравнению НУШ и его обобщениям. Попутно устанавливаются условия, при которых такой подход может применяться для построения уравнений Гинзбурга – Ландау. Хотя для НУШ метод позволяет строить решения односолитонного типа, в работе обсуждается вопрос о построении многосолитонных решений исследуемых уравнений.

1. Метод матричных функциональных подстановок

Метод обобщенных подстановок [5] в размерности 1 + 1 строится на основе двух исходных соотношений, называемых базовыми, для одной вспомогательной матричной функции $\hat{T}(x,t)$ произвольной матричной размерности $n\times n$ с элементами, зависящими от двух независимых переменных x и t. Базовые соотношения могут иметь множество различных, но эквивалентных форм [5]. Выбор той или иной формы определяется в первую очередь тем, что эти базовые соотношения позволяют однозначно связать вспомогательную функцию $\hat{T}(x,t)$ с набором функциональных параметров, которые и удовлетворяют искомым нелинейным интегрируемым уравнениям. Простейшей формой базовых соотношений являются соотношения первого порядка:

$$\hat{T}_x = \hat{A}\hat{T},\ \hat{T}_t = \hat{B}\hat{T}, \tag{1}$$

где $\hat{A}(x,t)$ и $\hat{B}(x,t)$ – комплексные матричные функции той же размерности $n\times n$. Если функция $\hat{T}(x,t)$ задана, то функциональные параметры $\hat{A}(x,t)$ и $\hat{B}(x,t)$ однозначно выражаются через саму функцию $\hat{T}$ и ее производные:

$$\hat{A} = \hat{T}_x\hat{T}^{-1},\ \hat{B} = \hat{T}_t\hat{T}^{-1}, \tag{2}$$

что можно рассматривать как дифференциальные подстановки типа Коула – Хопфа. С другой стороны, требование, что функция $\hat{T}(x,t)$ одновременно обращает в тождество два уравнения (1), накладывает на функции $\hat{A}(x,t)$ и $\hat{B}(x,t)$ ограничение, которое можно выразить в форме одного матричного уравнения:

$$\hat{A}_t - \hat{B}_x + [\hat{A},\hat{B}] = 0, \tag{3}$$

совпадающего по форме с уравнением Захарова – Шабата в теории МОЗ, но имеющее несколько иной смысл, поскольку не содержит в явном виде спектрального параметра.

При выполнении (3) все производные функции $\hat{T}$ можно выразить через саму функцию $\hat{T}$:

$$\hat{T}^{[n,k]} = \frac{\partial^{n+k}}{\partial x^n \partial t^k}\hat{T} = \hat{A}^{[n,k]}\hat{T},$$

где матричные функции $\widehat{A}^{[n,k]}$ могут быть вычислены рекуррентно по формулам:

$$\hat{A}^{[n+1,k]} = \hat{A}_x^{[n,k]} + \hat{A}^{[n,k]}\hat{A},\ \hat{A}^{[n,k+1]} = \hat{A}_t^{[n,k]} + \hat{A}^{[n,k]}\hat{A},\ k = 0,1,\ldots, \qquad (4)$$

с начальными условиями:

$$\hat{A}^{[1,0]} = \hat{A},\ \hat{A}^{[0,1]} = \hat{B}.$$

В частности:

$$\hat{T}_{xx} = (\hat{A}_x + \hat{A}^2)\hat{T}, \hat{T}_{xt} = (\hat{A}_t + \hat{A}\hat{B})\hat{T} = (\hat{B}_x + \hat{B}\hat{A})\hat{T}, \qquad (5)$$

откуда

$$\hat{A}^{[2,0]} = \hat{A}_x + \hat{A}^2,\ \hat{A}^{[1,1]} = \hat{B}_x + \hat{B}\hat{A} = \hat{A}_t + \hat{A}\hat{B}.$$

К базовой системе (1) можно добавить произвольное интегрируемое уравнение для $\hat{T}$. В качестве такого интегрируемого уравнения проще всего использовать линейное уравнение с постоянными коэффициентами $\hat{C}_{n,k}$ конечного порядка L:

$$\sum_{k=0}^{L} \sum_{k+n=0}^{L} \hat{C}_{n,k} \hat{T}^{[n,k]} = 0. \qquad (6)$$

Эти уравнения будем называть **замыкающими**. С помощью соотношений (2) и (4) из (6) можно исключить все производные функции $\hat{T}$ и ее саму. В результате (6) превращается в нелинейное уравнение относительно элементов матричных функций $\hat{A}, \hat{B}$ следующего общего вида:

$$\sum_{k=0}^{L} \sum_{k+n=1}^{L} \hat{C}_{n,k} \hat{A}^{[n,k]} + \hat{C}_{00} = 0,$$

которое вместе с уравнением (3) и системой равенств (4) образует замкнутую нелинейную систему относительно элементов двух функций $\hat{A}, \hat{B}$.

Такой подход составляет суть метода обобщенных функциональных подстановок (МОФП), примеры применения которого для ряда нелинейных уравнений приведены в [5, 6].

2. Основное интегрируемое уравнение типа НУШ

Рассмотрим уравнения, которые возникают в результате использования схемы МОФП с замыкающим матричным уравнением следующего вида:

$$\hat{T}_t = \hat{J}\hat{T}_{xx} + \hat{Q}(t)\hat{T}. \qquad (7)$$

В этом уравнении $K(t)$ и $\hat{Q}(x,t)$ – некоторые заданные комплексные функции t, соответственно, скалярная и матричная, а $\hat{J}$ – постоянная невырожденная матрица. В соответствии с общим изложением МОП приводим данное уравнение к уравнению для матричных коэффициентов базовых соотношений. Имеем:

$$\hat{B} = \hat{J}(\hat{A}_x + \hat{A}^2) + \hat{Q}.$$

Подставляя это соотношение в (3), приходим к уравнению:

$$\hat{A}_t = \hat{J}(\hat{A}_{xx} + \hat{A}_x\hat{A} + \hat{A}\hat{A}_x) - [\hat{A}, \hat{J}\hat{A}_x] - [\hat{A}, \hat{J}]\hat{A}^2 - [\hat{A}, \hat{Q}] + \hat{Q}_x, \quad (8)$$

которое обращается в тождество, если функция $\hat{T}$ удовлетворяет замыкающему уравнению (7) . Это уравнение можно привести к следующему виду:

$$\hat{A}_t = \hat{J}\hat{A}_{xx} + (2\hat{J}\hat{A}_x\hat{A} + [\hat{J}, \hat{A}]\hat{A}_x) - [\hat{A}, \hat{J}]\hat{A}^2 - [\hat{A}, \hat{Q}] - \hat{Q}_x. \quad (9)$$

Это уравнение представляет собой матричное обобщение НУШ с комплексными коэффициентами, которое встречается в том же контексте, что и НУШ, например, в нелинейной оптике [4]. В дальнейшем уравнение (9) и уравнения на компоненты матрицы $\hat{A}$, следующие из (9), будем называть базовыми для рассматриваемого класса уравнений.

3. Дополнительные интегрируемые соотношения

В работе [6] было показано, что уравнение типа (9) можно превратить в уравнение типа НУШ, если к замыкающему уравнению (3) добавить еще одно линейное матричное соотношение на функцию $\hat{T}$ следующего вида:

$$\hat{T}_x = \hat{G}\hat{T}\hat{L}, \quad (10)$$

где $\hat{G}(t)$ – некоторая матрица, зависящая от t, а $\hat{L}$ – невырожденная постоянная матрица. Для тех матричных функций, которые удовлетворяют одновременно (7) и (10), выполняются следующие дополнительные уравнения для $\hat{A}$ и $\hat{B}$:

$$\hat{A}_x + \hat{A}^2 = \hat{G}\hat{A}\hat{G}^{-1}\hat{A}, \quad \hat{B}_x + \hat{B}\hat{A} = \hat{G}\hat{B}\hat{G}^{-1}\hat{A}. \quad (11)$$

Первое из этих соотношений преобразуем к более удобной форме:

$$\hat{A}_x = [\hat{G}, \hat{A}]\hat{G}^{-1}\hat{A}. \quad (12)$$

Тогда, используя это соотношение, преобразуем уравнение (9) к виду, который аналогичен уравнению НУШ:

$$\hat{A}_t = \hat{J}\hat{A}_{xx} + (2\hat{J}[\hat{A}, \hat{G}]\hat{G}^{-1}\hat{A}^2 + [\hat{J}, \hat{A}][\hat{G}, \hat{A}]\hat{G}^{-1}\hat{A} - [\hat{J}, \hat{A}]\hat{A}^2) - [\hat{A}, \hat{Q}] + \hat{Q}_x. \quad (13)$$

Нелинейное слагаемое в этом уравнении на самом деле может быть представлено в более общей форме. Именно слагаемое со второй производной $\hat{A}_{xx}$ можно дополнительно разделить на две части, одну из которых с помощью соотношения (12) можно превратить также в нелинейное слагаемое. Следуя такому рецепту, уравнение (13) можно представить в следующем виде:

$$\hat{A}_t = \hat{J}(\hat{1} - \hat{D})\hat{A}_{xx} + \hat{N} - [\hat{A}, \hat{Q}] + \hat{Q}_x, \quad (14)$$

где

$$\hat{N}=\hat{J}\hat{D}([\hat{G},[\hat{G},\hat{A}]\hat{G}^{-1}\hat{A}]\hat{G}^{-1}\hat{A}+[\hat{G},\hat{A}]\hat{G}^{-1}[\hat{G},\hat{A}]\hat{G}^{-1}\hat{A})+$$

$$+2\hat{J}[\hat{A},\hat{G}]\hat{G}^{-1}\hat{A}^2+[\hat{J},\hat{A}][\hat{G},\hat{A}]\hat{G}^{-1}\hat{A}-[\hat{J},\hat{A}]\hat{A}^2 .$$

Здесь матрица $\hat{D}$ может быть любой, зависящей только от t, матрицей. При этом уравнение (14) имеет кубическую нелинейность, как и уравнение НУШ.

В отличие от классического НУШ, это уравнение в покомпонентной записи относительно элементов матрицы $\hat{A}$ будет иметь различный вид в зависимости от алгебраической структуры матриц $\hat{J},\hat{A}$ и $\hat{G}$. Имеется ввиду то, что если матрицы $\hat{T},\hat{A},\hat{B},\hat{J},\hat{D},\hat{Q}$ и $\hat{G}$ определены на некоторой подалгебре линейной матричной алгебры GL_n матриц размерности $n\times n$, то структура уравнений будет целиком определяться этой подалгеброй и конкретным выбором элементов матриц $\hat{J},\hat{D},\hat{Q}$ и $\hat{G}$. Вследствие этого дальнейший анализ уравнений (13) должен определяться выбранной структурой подалгебры алгебры GL_n, что и будет являться содержанием дальнейших построений в данной работе.

Однако прежде чем приводить примеры уравнений, соответствующих определенным подалгебрам GL_n, заметим, что матрица Λ играет роль, аналогичную роли спектрального параметра в МОЗ. Уравнения (7) и (10) можно рассматривать как уравнения для вспомогательной функции $\hat{T}$ метода МОЗ, которая удовлетворяет в этом методе паре уравнений для «неодетых» операторов представления Лакса – Захарова – Шабата (ЛЗШ). Для большего сходства уравнение (7), используя (10), можно привести к форме матричного уравнения первого порядка по t:

$$\hat{T}_t=\hat{J}\hat{G}^2\hat{T}\hat{L}^2+\hat{Q}\hat{T}. \tag{15}$$

Это уравнение имеет вид уравнения первого порядка по t, что аналогично представлению ЛЗШ для уравнения НУШ. Для того чтобы существовало общее решение уравнения (10) и уравнения (15), достаточно, чтобы матричные операторы в правой части этих уравнений коммутировали между собой. Это условие эквивалентно требованию

$$\hat{J}\hat{G}^3\hat{T}\hat{L}^3+\hat{Q}\hat{G}\hat{T}\hat{L}=\hat{G}\hat{J}\hat{G}^2\hat{T}\hat{L}^3+\hat{G}\hat{Q}\hat{T}\hat{L}+\hat{Q}_x\hat{T}$$

и обращается в тождество, если выполнены следующие два условия:

$$[\hat{J},\hat{G}]=0,\ [\hat{Q},\hat{G}]=0,\ \hat{Q}_x=0.$$

При такой интерпретации операторы $\hat{L}_A$ и $\hat{L}_B$:

$$\hat{L}_A=\frac{\partial}{\partial x}-\hat{A},\ \hat{L}_B=\frac{\partial}{\partial t}-\hat{B},$$

можно рассматривать как одевающие операторы в схеме МОЗ. Поэтому такой подход, как это было ранее отмечено в [6], представляет собой некоторый аналог МОЗ.

4. Интегрируемые уравнения для матриц размерности $n = 2$

Рассмотрим случай алгебры матриц размерности 2×2. В этом случае матричные функции $\hat{T}, \hat{A}, \hat{B}, \hat{G}$ можно представить в виде линейных комбинаций матриц Паули:

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

и единичной матрицы

$$\hat{\sigma}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы $\hat{\sigma}_i$, $i = 0,1,2,3,$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\hat{\sigma}_0\hat{\sigma}_i = \hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_0 = \hat{\sigma}_i,\ [\hat{\sigma}_0, \hat{\sigma}_i] = 0,\ i = 0,1,2,3;$$

$$\hat{\sigma}_\alpha\hat{\sigma}_\beta = -\hat{\sigma}_\beta\hat{\sigma}_\alpha = i\sum_{\gamma=1}^{3}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{\sigma}_\gamma; \tag{16}$$

$$[\hat{\sigma}_\alpha, \hat{\sigma}_\beta] = 2i\sum_{\gamma=1}^{3}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\hat{\sigma}_\gamma,\ \alpha,\beta,\gamma = 1,2,3,$$

Таким образом, любая матричная функция $\hat{T}$, заданная на GL_2, имеет следующий общий вид:

$$\hat{T} = \sum_{i=0}^{3}\psi_i(x,t)\sigma_i, \tag{17}$$

где $\psi_i(x,t)$ – вспомогательные функции. Соответственно

$$\hat{A} = \sum_{i=0}^{3}a_i(x,t)\hat{\sigma}_i,\ \hat{B} = \sum_{i=0}^{3}b_i(x,t)\hat{\sigma}_i, \tag{18}$$

Выберем матрицу $\hat{J}$ в такой форме;

$$\hat{J} = iK(t)\hat{\sigma}_3, \tag{19}$$

где $K = K(t)$ – некоторая комплексная функция переменной t.

Подставляя матрицы в уравнение (8) после простых, но несколько громоздких вычислений, приходим к следующей системе уравнений относительно функций $a_i(x,t), i = 0,1,2,3$:

$$a_{0,t} - iK(t)a_{3,xx} - 2iK(t)\frac{\partial}{\partial x}(a_0 a_3) = 0,$$

$$a_{3,t} - iKa_{0,xx} - iK\frac{\partial}{\partial x}(R^2 + a_1^2 + a_2^2) - 4iK(a_1^2 + a_2^2)a_0 = 0, \tag{20}$$

$$a_{1,t} - Ka_{2,xx} - 2K(a_{2,x}a_0 + 2a_{0,x}a_2) - 2KR^2a_2 + 4iKa_0a_3a_1 = 0,$$

$$a_{2,t} + Ka_{1,xx} + 2K(a_{1,x}a_0 + 2a_{0,x}a_1) + 2KR^2a_1 + 4iKa_0a_3a_2 = 0,$$

здесь $R^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_0^2 + a_3^2$.

Вводя переменные $u = a_1 + ia_2$, $\bar{u} = a_1 - ia_2$, $v = a_0$ и $w = -ia_3$, приходим к следующей системе уравнений:

$$u_t + iKu_{xx} + 4iKv_xu + 2iKvu_x + 2Ki(u\bar{u} + v^2 - w^2)u + 4Kwvu = 0,$$

$$\bar{u}_t - iK\bar{u}_{xx} - 4iKv_x\bar{u} - 2iK\overline{vu}_x - 2Ki(u\bar{u} + v^2 - w^2)\bar{u} + 4Kwv\bar{u} = 0,$$

$$v_t + Kw_{xx} + 2K\frac{\partial}{\partial x}(vw) = 0, \tag{21}$$

$$w_t - Kv_{xx} - K\frac{\partial}{\partial x}(2\bar{u}u + v^2 - w^2) - 4K\bar{u}uv = 0.$$

Уравнение для комплексной функции u является уранением типа НУШ в том случае, если функция $\bar{u} = a_1 - ia_2$ является комплексно сопряженной функции $u = a_1 + ia_2$. Это условие связано с тем, что сами функции $a_i(x,t), i = 0,1,2,3$ могут быть комплексными. Первые два уравнения этой системы комплексно сопряжены, если сопряжены функции u и $\bar{u}$, а функции v и w – вещественны. Поскольку задачей данной работы является разработка метода вычисления решений уравнений типа НУШ с помощью функциональных подстановок, то мы не будем специально рассматривать вопрос о комплексной сопряженности уравнений (21) и функций u и $\bar{u}$.

5. Уравнения типа НУШ

Рассмотрим теперь уравнения в размерности $n = 2$, соответствующие редукции, связанной с дополнительным соотношением (10). Выберем матрицу $\hat{G}$ в следующей форме:

$$\hat{G} = \beta\hat{\sigma}_3,$$

где β – некоторая вещественная постоянная. При этом выбор матриц $\hat{J}, \hat{G}$ оставим прежним (19).

Соотношения (12), которые редуцируют уравнения (14) к уравнениям типа НУШ, в покомпонентной записи имеют такой вид:

$$a_{0,x} + 2(a_1^2 + a_2^2) = 0, \quad a_{3,x} = 0, \tag{22}$$

$$a_{1,x} + 2a_0a_1 + 2ia_3a_2 = 0, \quad a_{2,x} + 2a_0a_2 - 2ia_3a_1 = 0.$$

Отсюда, в частности, следует, что функция a_3 не зависит от x: $a_3 = c_3(t)$, а функцию a_0 можно представить в виде

$$a_0 = -\int(a_1^2 + a_2^2)dx + c_0(t),$$

где функции $c_0(t)$ и $c_3(t)$ будут определяться формой решений для элементов матрицы $\hat{T}$.

Вводя переменные $u = a_1 + ia_2$, $\bar{u} = a_1 - ia_2$, $v = a_0 + a_3$ и $\bar{v} = a_0 - a_3$, уравнения (14) приводятся к паре комплексных уравнений:

$$u_t + iK(1-\beta)u_{xx} + 2i(3-2\beta)Ku^2\bar{u} + 2iK(1-2\beta)v^2u +$$
$$+2q_3u - 2qa_3 + q_x = 0, \tag{23}$$
$$\bar{u}_t - iK(1-\beta)\bar{u}_{xx} - 2i(3-2\beta)Ku\bar{u}^2 - 2iK(1-2\beta)\bar{v}^2u + 2q_3u - 2\bar{q}a_3 + \bar{q}_x = 0,$$

Здесь $q = q_1 + iq_2, \bar{q} = q_1 - iq_2$. Уравнения (23) комплексно сопряжены друг другу и являются некоторым аналогом НУШ. Используя (22), получаем следующее соотношение:

$$v = a_0 + a_3 = \int <u>^2\, dx + c_{03},$$

которое позволяет уравнение (23) записать в следующем виде:

$$u_t + iK(1-\beta)u_{xx} + 2i(3-2\beta)K <u>^2 u +$$
$$+2i(1-2\beta)K\left(\int <u>^2\, dx + c_{03}\right)^2 u + 2q_3u = 0. \tag{24}$$

При этом функция v удовлетворяет уравнению

$$v_t - iK(1-\beta)v_{xx} - 2iK(3-2\beta) <u>^2 v - 2iK(1-2\beta) <u>^2 \bar{v} - p_x = 0, \tag{25}$$

здесь $p = q_0 + q_3$, кроме этого, введено обозначение: $<u>^2 = a_1^2 + a_2^2$.

Величина $<u>^2 = u\bar{u} = a_1^2 + a_2^2$ переходит в квадрат модуля функции $u = a_1 + ia_2$ в том случае, если функции $a_i(x,t), i = 1,2$ являются вещественными. Следует отметить, что только в этом случае уравнение (24) может перейти в НУШ при определенном выборе параметров системы.

Заметим, что параметр β произволен, но сами решения для функций $u(x,t)$ и $v(x,t)$ от него не зависят. Это означает, что предлагаемый способ получения нелинейных уравнений и их решений, на самом деле, позволяет строить пучки уравнений с инвариантным классом решений, который определяется функциональными подстановками, определенными выше. В частности, полагая $\beta = 1/2$, преобразуем уравнение (24) к классическому НУШ с линейным коэффициентом преломления среды $\gamma(t) = -2iq_3(t)$, который задается произвольной функцией $q_3(t)$. Функции u и v при таком выборе β являются решениями уравнений:

$$u_t + \frac{i}{2}Ku_{xx} + 4iK <u>^2 u + 2q_3u = 0,\ v_t - \frac{i}{2}Kv_{xx} - 4iK <u>^2 v - p_x = 0. \tag{26}$$

Первое уравнение не зависит от функции v и является классическим НУШ (в случае комплексной сопряженности u и $\bar{u}$), а второе уравнение описывает распространение возмущений в среде с показателем преломления $4K\,|u|^2$ и источником p_x.

В случае $\beta = 3/2$ уравнения (24) и (25) принимают следующий вид:

$$u_t - i\frac{K}{2}u_{xx} - i(Kv^2 + 2iq_3)u = 0,$$

$$v_t + i\frac{K}{2}v_{xx} + 4iK < u >^2 \bar{v} - p_{,x} = 0,$$

А в случае $\beta = 1$ уравнения (24) и (25) переходят в систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно u и v:

$$u_t + 2iK < u >^2 u - i2Kv^2 u + 2q_3 u = 0, \quad v_t - 2iK < u >^2 (v - \bar{v}) - p_x = 0,$$

в которых зависимость функций от x является параметрической.

6. Обобщенные уравнения типа НУШ

Выберем в качестве матриц $\hat{J}$ и $\hat{G}$ матрицы следующего вида:

$$\hat{J} = iK_1\hat{\sigma}_3 + K_2\hat{\sigma}_0, \quad \hat{G} = \beta\hat{\sigma}_0 + i\alpha\hat{\sigma}_3.$$

Вводя, как и раньше, переменные $u = a_1 + ia_2$, $\bar{u} = a_1 - ia_2$, $v = a_0 + a_3 = a_0 + ia$, $\bar{v} = a_0 - a_3 = a_0 - ia$ и полагая $q_1 = q_2 = 0$, уравнения (21) преобразуем к следующей форме:

$$u_t - i\gamma_0 u_{xx} - i\gamma_1 v^2 u - 2i\gamma_2 u^2 \bar{u} + 2iq_3 u = 0, \tag{27}$$

$$\bar{u}_t + i\bar{\gamma}_0 \bar{u}_{xx} + i\bar{\gamma}_1 \bar{v}^2 \bar{u} + 2i\bar{\gamma}_2 u\bar{u}^2 - 2iq_3\bar{u} = 0.$$

Здесь также введены следующие обозначения:

$$\gamma_0 = (K_1 + iK_2)(\beta - 1 - i\alpha),$$

$$\gamma_1 = K_1(2\beta - 1 - 2i\alpha) + 2iK_2(\beta - 1 - i\alpha),$$

$$\gamma_2 = K_1(2\beta - 3 - 2i\alpha) + 2iK_2(\beta - 1 - i\alpha) = \gamma_1 - 2K_1.$$

Уравнения для v и $\bar{v}$ будут в этом случае такими:

$$v_t + i\bar{\gamma}_0 v_{xx} + 2i < u >^2 (\bar{\gamma}_1(v + \bar{v}) - K_1(v - \bar{v})) - p_x = 0, \tag{28}$$

$$\bar{v}_t - i\gamma_0 \bar{v}_{xx} - 2i < u >^2 (\gamma_1(v + \bar{v}) + K_1(v - \bar{v})) - \bar{p}_x = 0 .$$

Для того чтобы уравнения (27) были комплексно сопряжены друг другу (это касается и (28)), достаточно потребовать, чтобы функции a_i, $i = 0,1,2$ и $a = -ia_3$ были вещественными, как и коэффициенты K_1, K_2, α, β. При этом коэффициенты K_1, K_2, α, β могут быть произвольными вещественными функциями времени.

Особый интерес представляет случай, когда (27) имеет вид уравнения НУШ, но с комплексными коэффициентами. Такое уравнение носит название уравнения Гинзбурга – Ландау. Для того чтобы привести уравнение (27) к подходящему виду, необходимо потребовать, чтобы коэффициент γ_1 обращался в ноль. Как видно, в этом случае в уравнении будет отсутствовать слагаемое с v^2, как и в случае классического НУШ. В данном случае условие обращения γ_1 в ноль эквивалентно двум алгебраическим уравнениям:

$$K_1(2\beta-1)+2\alpha K_2=0,\ \ -2\alpha K_1+2(\beta-1)K_2=0. \tag{29}$$

Это уравнение будет иметь нетривиальные решения относительно K_1 и K_2 в случае выполнения условия

$$2(2\beta-1)(\beta-1)+4\alpha^2=0. \tag{30}$$

Относительно β это уравнение имеет следующие два корня:

$$\beta=\frac{3}{4}\pm\frac{1}{4}\sqrt{1-16\alpha^2}. \tag{31}$$

Поскольку для сопряженности уравнений необходимы вещественные решения β и α, то из (31) следует, что это возможно лишь при условии $|\alpha|<1/4$. При выполнении этих условий коэффициенты K_1 и K_2 связаны одним соотношением:

$$K_2=-\frac{2\beta-1}{2\alpha}K_1.$$

Уравнение (27) при таком выборе переменных будет иметь вид

$$u_t-i\gamma_0 u_{xx}-2i\gamma_2 u^2\bar{u}+2iq_3 u=0,$$

где коэффициенты γ_0 и γ_2 равны

$$\gamma_0=K_1\frac{(\beta-1)^2+\alpha^2}{\beta-1},\ \gamma_2=-2K_1.$$

Здесь было учтено, что условие (30) эквивалентно условию

$$\frac{2\beta-1}{2\alpha}=-\frac{\alpha}{\beta-1}.$$

Нетрудно видеть, что в этом случае уравнение превращается в классическое НУШ с вещественными коэффициентами.

Однако все же среди уравнений (27) имеются уравнения, форма которых соответствует уравнению УГЛ. Обратим еше раз внимание на то, что от параметров α и β зависит только форма уравнений, но не зависят сами их решения, полученные с помощью подстановок. Выберем два произвольных набора параметров α_1,β_1 и α_2,β_2, не требуя выполнения условий (29).

Соответствующие два уравнения (27) перепишем в следующей форме:

$$\frac{1}{\gamma_1^{(1)}}u_t - i\frac{\gamma_0^{(1)}}{\gamma_1^{(1)}}u_{xx} - iv^2u - 2i\left(1-\frac{2K_1}{\gamma_1^{(1)}}\right)u^2\bar{u} + 2i\frac{q_3}{\gamma_1^{(1)}}u = 0,$$

$$\frac{1}{\gamma_1^{(2)}}u_t - i\frac{\gamma_0^{(2)}}{\gamma_1^{(2)}}u_{xx} - iv^2u - 2i\left(1-\frac{2K_1}{\gamma_1^{(2)}}\right)u^2\bar{u} + 2i\frac{q_3}{\gamma_1^{(2)}}u = 0.$$

Вычитая теперь первое уравнение из второго и умножая результат на величину

$$m = \frac{1}{\gamma_1^{(2)}} - \frac{1}{\gamma_1^{(1)}},$$

приходим к уравнению УГЛ следующего вида:

$$u_t - iDu_{xx} - 4iK_1u^2\bar{u} + 2iq_3u = 0, \tag{32}$$

где

$$D = \frac{\gamma_0^{(2)}\gamma_1^{(1)} - \gamma_0^{(1)}\gamma_1^{(2)}}{\gamma_1^{(2)} - \gamma_1^{(1)}}.$$

Аналогичные вычисления следует применить ко второму уравнению системы (27) . В результате получим

$$u_t + i\bar{D}u_{xx} + 4iK_1u^2\bar{u} - 2iq_3u = 0.$$

Величина D является в общем случае комплексной. Следовательно, уравнение (32) является подходящим по форме уравнением Гинзбурга – Ландау с комплексной дисперсией.

7. Вычисление решений основного уравнения

Вычисление решений строится на основе решения матричного уравнения (7) в покомпонентной форме. Используя обозначения (17), перепишем систему для $\hat{T}$ в виде следующей системы уравнений для ψ_i:

$$\psi_{0,t} - K_2\psi_{0,xx} - iK_1\psi_{3,xx} = 0,\ \ \psi_{3,t} - K_2\psi_{3,xx} + iK_1\psi_{0,xx} = 0, \tag{33}$$

$$\psi_{1,t} - K_2\psi_{1,xx} - K_1\psi_{2,xx} = 0,\ \ \psi_{2,t} - K_2\psi_{2,xx} + K_1\psi_{1,xx} = 0. \tag{34}$$

Отыскивая решение этих уравнений в виде

$$\psi_k = A_ke^{kx+\omega t}, \tag{35}$$

находим дисперсионное соотношение:

$$(\omega - k^2K_2)^2 + k^4K_1^2 = 0. \tag{36}$$

Для ω имеем два решения:

$$\omega_+(k) = k^2(K_2 + iK_1),\ \omega_-(k) = k^2(K_2 - iK_1). \tag{37}$$

Обозначим через $A_k^{(\pm)}$ решения для амплитуд, соответствующие $\omega_\pm(k)$. Подставляя (35) для $\omega_\pm(k)$, находим, что амплитуды должны быть связаны соотношениями:

$$A_3^{(+)} = A_0^{(+)},\ A_3^{(-)} = -A_0^{(-)},\ A_2^{(+)} = iA_1^{(+)},\ A_2^{(-)} = -iA_1^{(-)}. \tag{38}$$

Если не требовать выполнения дополнительного соотношения (10) или (12), то решения для функций ψ_k будут иметь следующий общий вид:

$$\psi_0 = h_0(x,t) + g_0(x,t),\ \psi_3 = h_0(x,t) - g_0(x,t),$$

$$\psi_1 = h_1(x,t) + g_1(x,t),\ \psi_2 = ih_1(x,t) - ig_1(x,t), \tag{39}$$

где

$$h_0(x,t) = \int A_0^{(+)}(k) e^{kx+\omega_+(k)t} dk,\ g_0(x,t) = \int A_0^{(-)}(k) e^{kx+\omega_-(k)t} dk,$$

$$h_1(x,t) = \int A_1^{(+)}(k) e^{kx+\omega_+(k)t} dk,\ g_1(x,t) = \int A_1^{(-)}(k) e^{kx+\omega_-(k)t} dk.$$

Эти соотношения позволяют отыскать решения системы уравнений (21) типа Бюргерса, для которой следует положить $K_2 = 0$.

Из базового соотношения (1) имеем

$$\hat{A} = \hat{T}_x \hat{T}^{-1}.$$

Используя (17), находим

$$\hat{T}^{-1} = \frac{1}{Z}\left(\psi_0\hat{\sigma}_0 - \sum_{\alpha=1}^{3}\psi_\alpha\hat{\sigma}_\alpha\right),$$

где

$$Z = \det(\hat{T}) = \psi_0^2 - \psi_1^2 - \psi_2^2 - \psi_3^2.$$

Отсюда находим

$$a_0 = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\ln Z, \qquad a_3 = \frac{1}{Z}\left(\psi_0\psi_3\frac{\partial}{\partial x}\ln\frac{\psi_3}{\psi_0} + i\psi_1\psi_2\frac{\partial}{\partial x}\ln\frac{\psi_2}{\psi_1}\right),$$

$$a_1 = \frac{1}{Z}\left(\psi_0\psi_1\frac{\partial}{\partial x}\ln\frac{\psi_1}{\psi_0} + i\psi_3\psi_2\frac{\partial}{\partial x}\ln\frac{\psi_3}{\psi_2}\right),$$

$$a_2 = \frac{1}{Z}\left(\psi_0\psi_2\frac{\partial}{\partial x}\ln\frac{\psi_2}{\psi_0} + i\psi_1\psi_3\frac{\partial}{\partial x}\ln\frac{\psi_1}{\psi_3}\right).$$

Подставляя в эти соотношения функции ψ_k из (39), можно получить решения уравнений (27) или (32) в явном виде.

8. Решение уравнений с ограничениями

В случае использования дополнительного замыкающего соотношения (10) компоненты матрицы $\hat{T}$ должны дополнительно являться решениями системы линейных уравнений по õ первого порядка. Рассмотрим в качестве матрицы $\hat{L}$ матрицу следующего вида:

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \mu_2 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Теперь решение для ψ_k можно искать в следующем виде:

$$\Psi_0(x,t,k_1,k_2) = A_0^{(+)} e^{k_1 x + \omega_+(k_1)t} + A_0^{(-)} e^{k_2 x + \omega_-(k_2)t},$$

$$\Psi_3(x,t,k_1,k_2) = A_0^{(+)} e^{k_1 x + \omega_+(k_1)t} - A_0^{(-)} e^{k_2 x + \omega_-(k_2)t},$$

$$\Psi_1(x,t,k_1,k_2) = A_1^{(+)} e^{k_1 x + \omega_+(k_1)t} + A_1^{(-)} e^{k_2 x + \omega_-(k_2)t},$$

$$\Psi_2(x,t,k_1,k_2) = iA_1^{(+)}(k_1) e^{k_1 x + \omega_+(k_1)t} - iA_1^{(-)} e^{k_2 x + \omega_-(k_2)t}. \qquad (40)$$

В этом случае условием выполнения соотношения (10) являются следующие ограничения на выбор параметров этих решений:

$$A_1^{(+)} = -\frac{\lambda_2 + k_2}{\mu_1} A_0^{(+)}, \quad A_1^{(-)} = -\frac{\lambda_1 - k_1}{\mu_2} A_0^{(-)} \qquad (41)$$

и

$$(k_1 - \lambda_1)(k_1 - \lambda_2) = \mu_1 \mu_2, \quad (k_2 + \lambda_1)(k_2 + \lambda_2) = \mu_1 \mu_2.$$

Отсюда следует, что для k_1 и k_2 имеются следующие допустимые решения:

$$k_1^{\pm} = ((\lambda_1 + \lambda_2) \pm \sqrt{Q_0}) / 2, \quad k_2^{\pm} = (-(\lambda_1 + \lambda_2) \pm \sqrt{Q_0}) / 2,$$

где $Q_0 = (\lambda_1 - \lambda_2)^2 + 4\mu_1\mu_2$.

Таким образом, в силу линейности соотношения (10) общее решение можно представить в виде

$$\psi_0 = \Psi_0(x,t,k_1^+,k_2^+) + \Psi_0(x,t,k_1^-,k_2^-),$$

$$\psi_3 = \Psi_3(x,t,k_1^+,k_2^+) + \Psi_3(x,t,k_1^-,k_2^-),$$

$$\psi_1 = \Psi_1(x,t,k_1^+,k_2^+) + \Psi_1(x,t,k_1^-,k_2^-),$$

$$\psi_2 = \Psi_2(x,t,k_1^+,k_2^+) + \Psi_2(x,t,k_1^-,k_2^-). \qquad (42)$$

Решение для функций $a_1(x,t)$, $a_2(x,t)$ и $u(x,t)=a_1+ia_2$ теперь имеет такой вид:

$$a_1=\frac{2Q_0}{P(x,t)}\left(u_1u_2\mu_1e^{2Q_1(iK_1-K_2)t+(\lambda_1+\lambda_2)x}-v_1v_2\mu_2e^{-2Q_1(iK_1-K_2)t-(\lambda_1+\lambda_2)x}\right),$$

$$a_2=i\frac{2Q_0}{P(x,t)}\left(u_1u_2\mu_1e^{2Q_1(iK_1-K_2)t+(\lambda_1+\lambda_2)x}+v_1v_2\mu_2e^{-2Q_1(iK_1-K_2)t-(\lambda_1+\lambda_2)x}\right),$$

$$u(x,t)=a_1+ia_2=-\frac{4Q_1v_1v_2\mu_2\mu}{P(x,t)}e^{-2Q_1(iK_1-K_2)t-(\lambda_1+\lambda_2)x}, \qquad (43)$$

где $Q_1=\mu_1\mu_2+(\lambda_1^2+\lambda_2^2)/2$, $\Omega=(\lambda_1+\lambda_2)K_1$, и

$$P(x,t)=e^{2K_2Q_1t}F(x,t),\ F(x,t)=R_1e^{-(i\Omega t+x)\sqrt{Q_0}}+R_2e^{(i\Omega t+x)\sqrt{Q_0}},$$

$$R_1=u_2v_2(Q_0+(\lambda_1-\lambda_2)\sqrt{Q_0}),\ R_2=u_1v_1(Q_0-(\lambda_1-\lambda_2)\sqrt{Q_0}).$$

При этом $a_3=\lambda_1+\lambda_2$, а решение для a_0 имеет вид

$$a_0=-\frac{4Q_0\mu H(x,t)}{P(x,t)}e^{2K_2Q_1t},$$

где

$$H(x,t)=S_1e^{(-i\Omega t-x)\sqrt{Q_0}}+S_2e^{(i\Omega t+x)\sqrt{Q_0}},$$

$$S_1=u_2v_2\left(\lambda_1-\lambda_2+\sqrt{Q_0}\right),\ S_2=u_1v_1\left(\lambda_1-\lambda_2-\sqrt{Q_0}\right).$$

Эти решения переходят в солитон, подобный НУШ, например, в частном случае выполнения условий:

$$\lambda_i=ik_1,\ \lambda_2=ik_2,\ R_1R_2\neq 0.$$

Однако форма решения несколько отличается от стандартного солитона НУШ. В частном случае:

$$k_1=1,\ k_2=2,\ \mu_1=2,\ \mu_2=1,\ u_1=u_2=1,\ v_1=v_2=-1,\ K_1=1,\ K_2=0{,}1,$$

решение для $u(x,t)$ можно записать в виде

$$u(x,t)=\frac{2e^{i(6t-4x)}}{\operatorname{ch}(2x-8t)+i\operatorname{sh}(2x-8t)},$$

при этом

$$|u(x,t)|^2=\frac{288}{\operatorname{ch}(4x-16t)}.$$

Отличие от солитонов типа НУШ состоит в том, что для такого типа решений не выполняется условие сопряженности u и $\bar{u}$. Выбор параметров в другом виде приводит к решениям, отличающимся от обычных солитонов.

Заключение

В работе развит метод построения точных решений уравнений типа НУШ и УГЛ с помощью метода матричных функциональных подстановок. Были получены конкретные решения этих уравнений в матричной размерности 2×2. Как было показано, метод дает широкий класс решений типа Бюргерса, подобных уравнению НУШ. Хотя применение таких уравнений для конкретных прикладных задач не обсуждалось, тем не менее сам их вид указывает на адекватность этих уравнений определенным физическим задачам. Кроме этого, с помощью введения дополнительных замыкающих соотношений, как было показано, полученные уравнения приводятся к требуемому виду уравнений НУШ и УГЛ. В таком варианте метод был применен для построения конкретных решений уравнений типа УГЛ. Также в работе было показано, что решения уравнений, подобных НУШ и УГЛ, могут быть построены и в размерности матрицы, большей чем 2. В размерности большей 2 возрастает число произвольных функциональных параметров уравнений, что можно сопоставить с ростом числа солитонов в методе обратной задачи при увеличении числа функциональных параметров. Однако при этом необходимо проводить дополнительные исследования, касающиеся редукции таких решений к конкретному виду уравнений типа НУШ или УГЛ. Обсуждение таких редукций выходит за рамки данной работы.

Библиографический список

1. **Захаров, В. Е.** Теория солитонов: Метод обратной задачи / В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский. – М. : Наука, 1980. – 321 с.
2. **Додд, Р.** Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррио. – М. : Мир, 1988. – 694 с
3. **Агарвал, Г.** Нелинейная волоконная оптика / Г. Агарвал. – М. : Мир, 1996. – 321 с
4. **Ахмедиев, Н. Н.** Солитоны. Нелинейные импульсы и пучки / Н. Н. Ахмедиев, А. Анкевич. – М. : Физматлит, 2003. – 300 с.
5. **Журавлев, В. М.** Метод обобщенных подстановок Коула-Хопфа и новые примеры линеаризуемых нелинейных эволюционных уравнений / В. М. Журавлев // Теоретическая и математическая физика. – 2009. – Т. 158, № 1. – С. 58–71.
6. **Бызыкчи, А. Н**. Солитоны и метод обобщенных подстановок Коула-Хопфа / А. Н. Бызыкчи, В. М. Журавлев // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер.: Физ.-мат. науки. – 2013. – № 2 (31). – С. 193–199.

References

1. Zakharov V. E., Manakov S. V., Novikov S. P., Pitaevskiy L. P. *Teoriya solitonov: Metod obratnoy zadachi* [The soliton theory: the method of inverse problem]. Moscow: Nauka, 1980, 321 p.
2. Dodd R., Eylbek Dzh., Gibbon Dzh., Morrio Kh. *Solitony i nelineynye volnovye uravneniya* [Solitons and nonlinear wave equations]. Moscow: Mir, 1988, 694 p.
3. Agarval G. *Nelineynaya volokonnaya optika* [Nonlinear fiber optics]. Moscow: Mir, 1996, 321 p.
4. Akhmediev N. N., Ankevich A. *Solitony. Nelineynye impul'sy i puchki* [Solitons. Nonlinear impulses]. Moscow: Fizmatlit, 2003, 300 p.
5. Zhuravlev V. M. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika* [Theoretical and mathematical physics]. 2009, vol. 158, no. 1, pp. 58–71.

6. Byzykchi A. N., Zhuravlev V. M. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Ser.: Fiz.-mat. Nauki* [Bulletin of Samara State Technical University. Series: Physical and mathematical sciences]. 2013, no. 2 (31), pp. 193–199.

Журавлев Виктор Михайлович
доктор физико-математических наук, профессор, кафедра теоретической физики, Ульяновский государственный университет (Россия, г. Ульяновск, ул. Льва Толстого, 42);

E-mail: zhvictorm@gmail.com

Zhuravlev Viktor Mikhaylovich
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, sub-department of theoretical physics, Ulyanovsk State University (42 Lva Tolstogo street, Ulyanovsk, Russia)

УДК 51-71, 532.51, 538.93

Журавлев, В. М.

Солитонные решения уравнений типа нелинейного уравнения Шредингера и функциональные подстановки / В. М. Журавлев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2018. – № 1 (45). – С. 147–163. – DOI 10.21685/2072-3040-2018-1-10.